ΧΡΙΣΤΟΣ Γ. ΦΙΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2003

Κάθε γνήσιο αντίτυπο έχει την υπογραφή του συγγραφέα.

Λ. Φίλος

Τα Κεφάλαια I - VI του Βιβλίου αυτού παρυσιάσθηκαν από τον συγγραφέα το 1985 με τη μορφή Σημειώσεων. Επίσης, τα Κεφάλαια I - VII του παρόντος αποτέλεσαν την ύλη του Βιβλίου του συγγραφέα με τίτλο «ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ», το οποίο εκδόθηκε το 1986 από το Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και χρησιμοποιήθηκε μέχρι το 1989 για τη διδασκαλία των Μαθημάτων «Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις» και «Διαφορικές εξισώσεις I» καθώς και μέρους του Μαθήματος «Διαφορικές Εξισώσεις II» του Προγράμματος Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών. Υπό την παρούσα μορφή το Βιβλίο αυτό εκδόθηκε το 1989 και χρησιμοποιήθηκε και χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία των Μαθημάτων όπως παραπάνω.

Περιεχόμενα

I. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 1
   - 1.1. Διαφορικές εξισώσεις και διαφορικά συστήματα. Προβλήματα αρχικών τιμών 1
   - 1.2. Παραδείγματα 5
   - 1.3. Ασκήσεις 8

2. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ 9
   - 2.1. Η συνθήκη του Lipschitz 10
   - 2.2. Ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών 12
   - 2.3. Παραδείγματα 22
   - 2.4. Ασκήσεις 27

II. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ 29

1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BERNOULLI. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ RICCATI 30
   - 1.1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 30
   - 1.2. Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli 32
   - 1.3. Διαφορικές εξισώσεις Riccati 34
   - 1.4. Ασκήσεις 36

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 37
   - 2.1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών 37
   - 2.2. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 39
   - 2.3. Ασκήσεις 41

3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΜΕΣΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ 42
   - 3.1. Διαφορικές εξισώσεις αμέσως ολοκληρώσιμες 42

3.2. Ολοκληρωτικοί παράγοντες 45
3.3. Ασκήσεις 47

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ 49
4.1. Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μη περιέχουσες την άγνωστη συνάρτηση 49
4.2. Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μη περιέχουσες την ανεξάρτητη μεταβλητή 50
4.3. Υποβιβασμός της τάξης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης 51
4.4. Ασκήσεις 52

5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 53

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 59

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ 59
0.1. Η έννοια της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Ύπαρξη και μονοσήμαντο των λύσεων 60
0.2. Ορίζουσες. Γραμμικά συστήματα. Πολυώνυμα 62

1. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 63
1.1. Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 64
1.2. Γραμμική ανεξαρτησία. Ορίζουσα Wronski 65
1.3. Βασικά σύνολα λύσεων 69
1.4. Υποβιβασμός της τάξης 74
1.5. Παραδείγματα 77
1.6. Ασκήσεις 82

2. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 84
2.1. Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης 84
2.2. Μερικές λύσεις. Το σύνολο των λύσεων 85
2.3. Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών 86
2.4. Παραδείγματα 91
2.5. Ασκήσεις 95

3. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ 96
3.1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

με σταθερούς συντελεστές 96
3.2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. 'Ενα βασικό σύνολο λύσεων 97
3.3. Η μέθοδος των αγνώστων σταθερών 103
3.4. Διαφορικές εξισώσεις Euler 105
3.5. Παραδείγματα 106
3.6. Ασκήσεις 113

4. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ. ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 115
4.1. Η ταυτότητα του Lagrange και ο τύπος του Green 115
4.2. Αυτοσυζυγείς ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης 117
4.3. Παραδείγματα 119
4.4. Ασκήσεις 121

5. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ: ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΤΟΥ STURM. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ 122
5.1. Ρίζες των λύσεων. Το Θεώρημα διαχωρισμού του Sturm. Το Θεώρημα σύγκρισης του Sturm 123
5.2. Προβλήματα ιδιοτιμών 128
5.3. Παραδείγματα 132
5.4. Ασκήσεις 136

6. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 137

IV. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 145

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ 145
0.1. Η έννοια του γραμμικού διαφορικού συστήματος. 'Υπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων 146
0.2. Μερικά στοιχεία απ'τη Γραμμική 'Αλγεβρα και την Ανάλυση για τους πίνακες 150

1. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 154
1.1. Πίνακες λύσεων. Ο τύπος του Jacobi 154
1.2. Γραμμική ανεξαρτησία. Βασικοί πίνακες. Το σύνολο των λύσεων 158

1.3. Υποβιβασμός της τάξης 163
1.4. Παραδείγματα 166
1.5. Ασκήσεις 172

2. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 175
2.1. Μερικές λύσεις. Το σύνολο των λύσεων 175
2.2. Παραδείγματα 177
2.3. Ασκήσεις 181

3. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ 182
3.1. Ο βασικός πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ 182
3.2. Παραδείγματα 186
3.3. Ασκήσεις 195

4. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ) 197
4.1. Εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ 197
4.2. Συνθήκες ώστε e^{xA} να είναι φραγμένος για $x \geq 0$ ή $\lim_{x\to\infty} e^{xA} = 0$ 198
4.3. Παραδείγματα 199
4.4. Ασκήσεις 206

5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΠΑΛΕΙΦΗΣ 207
5.1. Η μέθοδος της απαλειφής 207
5.2. Παραδείγματα 207
5.3. Ασκήσεις 212

6. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 213
6.1. Η ευστάθεια: Ορισμοί 214
6.2. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια 215
6.3. Παραδείγματα 220
6.4. Άσκηση 221

7. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 222

V. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 227

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ 227
0.1. Μια εισαγωγή 228

0.2. Δυναμοσειρές. Αναλυτικές συναρτήσεις 229

1. ΟΜΑΛΑ ΚΑΙ (ΚΑΝΟΝΙΚΑ Ή ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΑ) ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 232
   1.1. Ομαλά και (κανονικά ή μη κανονικά) ανώμαλα σημεία 232
   1.2. Παραδείγματα 233
   1.3. Ασκήσεις 235

2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ 236
   2.1. Δυναμοσειρές λύσεις από ομαλά σημεία 236
   2.2. Παραδείγματα 241
   2.3. Ασκήσεις 248

3. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ 249
   3.1. Δυναμοσειρές λύσεις γύρω από κανονικά ανώμαλα σημεία 249
   3.2. Παραδείγματα 257
   3.3. Ασκήσεις 264

4. ΜΕΡΙΚΕΣ ΚΛΑΣΣΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 265
   4.1. Διαφορικές εξισώσεις του Legendre. Τα πολυώνυμα του Legendre 266
   4.2. Διαφορικές εξισώσεις του Chebyshev. Τα πολυώνυμα του Chebyshev 276
   4.3. Διαφορικές εξισώσεις του Hermite. Τα πολυώνυμα του Hermite 281
   4.4. Διαφορικές εξισώσεις του Laguerre. Τα πολυώνυμα του Laguerre 288
   4.5. Διαφορικές εξισώσεις του Bessel. Οι συναρτήσεις του Bessel 292
   4.6. Απλές ορθογώνιες ακολουθίες πολυωνύμων 302
   4.7. Σειρές Fourier 306
   4.8. Ασκήσεις

5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 317

VI. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ LAPLACE 323

1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE 323
   1.1. Ο μετασχηματισμός Laplace 324
   1.2. Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace 326
   1.3. Οι μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων 333
   1.4. Η συνέλιξη. Το Θεώρημα συνέλιξης 336
   1.5. Συναρτήσεις μοναδιαίου βήματος. Συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης 338
   1.6. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace 341
   1.7. Παραδείγματα 346
   1.8. Ασκήσεις 353

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ LAPLACE 355
   2.1. Εφαρμογή των μετασχηματισμών Laplace στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων 355
   2.2. Παραδείγματα 361
   2.3. Ασκήσεις 367

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 368

VII. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 371

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ 371
   0.1. Η ευστάθεια: Ορισμοί 371
   0.2. Μη επεκτάσιμες λύσεις μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 373
   0.3. Το Λήμμα του Gronwall 375

1. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 376
   1.1. Ευστάθεια της μηδενικής λύσης διαταραγμένων διαφορικών εξισώσεων 376
   1.2. Παραδείγματα 381
   1.3. Ασκήσεις 383

2. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ. Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ LYAPUNOV 384

2.1. Ευστάθεια της μηδενικής λύσης μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η δεύτερη μέθοδος του Lyapunov 384
2.2. Παραδείγματα 397
2.3. Ασκήσεις 399

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 400

VIII. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ 403

1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ 403
1.1. Μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης: Ορισμοί 403
1.2. Παραδείγματα 404
1.3. Ασκήσεις 406

2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ 407
2.1. Επίλυση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης 407
2.2. Παραδείγματα 412
2.3. Ασκήσεις 415

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 416

IX. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 419

0. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER 420
0.1. Προκαταρκτικά 420
0.2. Σειρές Fourier 424
0.3. Κατά σημείο σύγκλιση των σειρών Fourier 426
0.4. Η ανισότητα του Bessel. Ο τύπος του Parseval 432
0.5. Ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών Fourier 433
0.6. Παραγώγιση και ολοκλήρωση των σειρών Fourier 436
0.7. Παραδείγματα 439
0.8. Ασκήσεις 448

1. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 452
1.1. Γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης 452

1.2. Αναγωγή στις κανονικές μορφές 455
1.3. Αναγωγή σε ακόμα πιο απλές μορφές 462
1.4. Παραδείγματα 464
1.5. Ασκήσεις 471

2. Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ 474
2.1. Προβλήματα αρχικών τιμών 474
2.2. Προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών 479
2.3. Παραδείγματα 486
2.4. Ασκήσεις 488

3. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ 489
3.1. Η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου. Ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών 489
3.2. Παραδείγματα 499
3.3. Ασκήσεις 500

4. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE 501
4.1. Αρμονικές συναρτήσεις. Η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου. Το πρόβλημα του Dirichlet 501
4.2. Το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό κυκλικού δίσκου 505
4.3. Το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό ορθογωνίου. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών 510
4.4. Παραδείγματα 519
4.5. Ασκήσεις 522

5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 522

X. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ, ΑΡΧΙΚΩΝ--ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 527

1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER 527
1.1. Προκαταρκτικά 528
1.2. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Fourier 529
1.3. Ο μετασχηματισμός Fourier. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier 541

1.4. Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier 545
1.5. Συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης. Η δέλτα συνάρτηση του Dirac 551
1.6. Παραδείγματα 553
1.7. Ασκήσεις 560

2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ, ΑΡΧΙΚΩΝ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ 562
2.1. Προκαταρκτικά 562
2.2. Προβλήματα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση 562
2.3. Προβλήματα αρχικών τιμών και προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας 568
2.4. Προβλήματα του Dirichlet 578
2.5. Παραδείγματα 583
2.6. Ασκήσεις 584

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 585

Ι. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις, τα διαφορικά συστήματα και τα προβλήματα αρχικών τιμών (Εδάφιο 1) και θα μελετηθεί το πρόβλημα της ύπαρξης και του μονοσημάντου λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών (Εδάφιο 2).

1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Στο Εδάφιο αυτό θα εισαγάγουμε τις έννοιες της διαφορικής εξίσωσης, του διαφορικού συστήματος και του προβλήματος αρχικών τιμών.

1.1. Διαφορικές εξισώσεις και διαφορικά συστήματα. Προβλήματα αρχικών τιμών

Ας είναι f μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα υποσύνολο D του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων. Μια εξίσωση της μορφής

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

όπου $' = \frac{d}{dx}$, λέμε ότι είναι μια n-<u>διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την</u> y <u>και ανεξάρτητη μεταβλητή την</u> x. Αν $n=1$, τότε λέμε ότι η (1) είναι μια (<u>βαθμωτή</u>) διαφορική εξίσωση <u>πρώτης τάξης</u>. Ας είναι I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας. Μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση y λέγεται <u>λύση</u> της διαφορικής εξίσωσης (1) <u>στο διάστημα</u> I αν και μόνο αν η y είναι παραγωγίσιμη στο I και επιπλέον για όλα τα $x \in I$ είναι $(x,y(x)) \in D$ και $y'(x) = f(x,y(x))$. Επίσης, αν $x_0 \in I$ και $(x_0,y_0) \in D$, τότε μια λύση

y της (1) στο διάστημα I τέτοια ώστε να πληροί την <u>αρχική</u> <u>συνθήκη</u>

$$(2) \qquad y(x_0) = y_0$$

λέμε ότι είναι μια λύση στο I του <u>προβλήματος</u> <u>αρχικών</u> <u>τιμών</u> (1)-(2).

Ας είναι τώρα $f_1,\ldots,f_n$ n συναρτήσεις ορισμένες σ'ένα υποσύνολο D του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων. 'Ενα σύστημα της μορφής

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1' = f_1(x,y_1,\ldots,y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x,y_1,\ldots,y_n) \end{cases}$$

θα λέμε ότι είναι ένα n-<u>διάστατο</u> <u>διαφορικό</u> <u>σύστημα</u> <u>με</u> <u>άγνωστες</u> <u>συναρτήσεις</u> <u>τις</u> $y_1,\ldots,y_n$ <u>και</u> <u>ανεξάρτητη</u> <u>μεταβλητή</u> x. Επίσης, θα λέμε ότι το διαφορικό σύστημα (3) είναι <u>πρώτης</u> <u>τάξης</u>. Ας είναι I ένα διάστημα. Μια n-άδα συναρτήσεων $y_1,\ldots,y_n$ λέγεται <u>λύση</u> <u>στο</u> I του διαφορικού συστήματος (3) αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $y_1,\ldots,y_n$ είναι παραγωγίσιμες στο I και για όλα τα $x \in I$ είναι $(x,y_1(x),\ldots$ $\ldots,y_n(x)) \in D$ και

$$y_k'(x) = f_k(x,y_1(x),\ldots,y_n(x)) \quad (k=1,\ldots,n).$$

Ακόμα, αν $(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0}) \in D$ και $x_0 \in I$, τότε μια λύση στο διάστημα I του διαφορικού συστήματος (3) που πληροί την <u>αρχική</u> <u>συνθήκη</u>

$$(4) \qquad y_1(x_0) = y_{10},\ldots,y_n(x_0) = y_{n0}$$

θα λέγεται λύση στο I του <u>προβλήματος</u> <u>αρχικών</u> <u>τιμών</u> (3)-(4).

Αν θέσουμε

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

τότε το διαφορικό σύστημα (3) παίρνει τη μορφή

$$(3)' \qquad y' = f(x,y).$$

Επίσης, θέτοντας

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix},$$

η αρχική συνθήκη (4) γράφεται

$$(4)' \qquad y(x_0) = y_0.$$

Έτσι, κάθε n-διάστατο διαφορικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή μιας n-διάστατης διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης. Επίσης, ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα n-διάστατο διαφορικό σύστημα γράφεται στη μορφή ενός προβλήματος αρχικών τιμών για μια n-διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση.

Μια ενδιαφέρουσα ειδική μορφή n-διάστατων διαφορικών συστημάτων είναι τα <u>γραμμικά διαφορικά συστήματα</u>

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n, \end{cases}$$

όπου a_{ij} $(i,j=1,\dots,n)$ και b_i $(i=1,\dots,n)$ είναι συναρτήσεις ορισμένες σ'ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Θέτοντας

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

το γραμμικό διαφορικό σύστημα γράφεται

$$(5)' \qquad y' = Ay + b.$$

Επίσης, αν $x_0 \in I$ και $y_{10},\dots,y_{n0}$ είναι σταθερές, το πρόβλημα αρχικών τιμών (5)-(4) γράφεται (5)'-(4)' για

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ορισμένη σ'ένα υποσύνολο D του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων. Τότε μια εξίσωση της μορφής

$$(6) \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

όπου $^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}$ $(k=1,\dots,n)$, θα λέμε ότι είναι μια (<u>βαθμωτή</u>) <u>δια-</u>

φορική εξίσωση n-τάξης. Η y είναι η άγνωστη συνάρτηση αυτής και x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της. Ας είναι I ένα διάστημα. Μια συνάρτηση στο I που έχει παράγωγο και είναι τέτοια ώστε για κάθε $x \in I$ $(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n-1)}(x)) \in D$ και $y^{(n)}(x) = f(x,y(x),y'(x),\ldots$ $\ldots,y^{(n-1)}(x))$

θα λέμε ότι είναι μια λύση στο I της διαφορικής εξίσωσης (6). Αν $(x_0,y_{10},\ldots,y_{n0}) \in D$ με $x_0 \in I$, μια λύση y της (6) στο I που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_{10}, y'(x_0) = y_{20},\ldots,y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0} \tag{7}$$

θα λέμε ότι είναι μια λύση στο I του προβλήματος αρχικών τιμών (6)-(7).

Αν θέσουμε $y = y_1$, $y' = y_2,\ldots,y^{(n-1)} = y_n$, τότε η διαφορική εξίσωση (6) ανάγεται στο n-διάστατο διαφορικό σύστημα

$$(6)' \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x,y_1,\ldots,y_n) \end{cases}$$

και οι αρχικές συνθήκες (7) ανάγονται στην αρχική συνθήκη

$$(7)' \qquad y_1(x_0) = y_{10},\ldots,y_n(x_0) = y_{n0}$$

για το διαφορικό σύστημα (6)'. Το διαφορικό σύστημα (6)' μπορεί να γραφεί ως μια n-διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση. Τελικά,η n-τάξης διαφορική εξίσωση (6) ανάγεται σε μια n-διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση και το πρόβλημα αρχικών τιμών (6)-(7) μπορεί ν' αναχθεί σ'ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για μια n-διάστατη διανυσματική διαφορική εξίσωση.

Μια ενδιαφέρουσα ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων n-τάξης είναι οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις n-τάξης της μορφής

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b, \tag{8}$$

όπου a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1,n)$ και b είναι συναρτήσεις ορισμένες σ'ένα διάστημα I και $a_n(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Αν $x_0 \in I$ και $y_{10},\ldots,y_{n0}$ είναι τυχούσες σταθερές, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (8)-(7). Θέτοντας

$$Y=\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix},$$

η γραμμική διαφορική εξίσωση (8) ανάγεται στο γραμμικό διαφορικό σύστημα

(8)′ $$Y' = AY+B$$

και οι αρχικές συνθήκες (7) μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή μιας αρχικής συνθήκης για το γραμμικό διαφορικό σύστημα (8)′ , δηλαδή

(7)″ $$Y(x_0) = Y_0,$$

όπου

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

1.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Καθένα απ' τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών να γραφεί ως ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για μια διανυσματική διαφορική εξίσωση:

(i) $y_1' = y_2^2+1,\ y_2' = x+y_1^3;\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -2.$

(ii) $y_1'' = 5y_1+e^x y_2,\ y_2' = xy_1+x^2 y_2+\sin x;\ y_1(0)=1,\ y_1'(0)=7,\ y_2(0)=-1.$

(iii) $e^x y''' -7x(y')^2+y^3+\cos x = 0;\ y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = -2.$

(iv) $y_1'=y_1+y_3,\ y_2'=e^x y_1+y_2-(\sin x)y_3,\ y_3'=y_1;\ y_1(1)=0,\ y_2(1)=2,$
$y_3(1)=7.$

(v) $(x^2+1)y''' - 5xy' +x^2 y = e^x;\ y(2) = 0,\ y'(2) = 1,\ y''(2) = -3.$

(vi) $y_1''-y_1 = 0,\ y_2''+xy_2'-y_2 = e^x;\ y_1(0) = y_1'(0) = 1,\ y_2(0) = 7,\ y_2'(0)=3.$

(vii) $y_1''+y_1=e^x,\ y_2'=5y_2+y_3,\ y_3'=-y_2;\ y_1(0)=y_1'(0)=1,\ y_2(0)=y_3(0)=2.$

Λύση. (i) Θέτοντας

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \\ y_2\end{pmatrix},\ y_0=\begin{pmatrix}1\\ \\ -2\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad f(x,y)=\begin{pmatrix}y_2^2+1\\ \\ x+y_1^3\end{pmatrix},$$

παίρνουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'=f(x,y),\ y(0)=y_0.$$

(ii) Θέτουμε $y_1=u_1$, $y_1'=u_2$ και $y_2=u_3$, οπότε το πρόβλημα αρχικών τιμών μετασχηματίζεται στο

$$u_1'=u_2,\ u_2'=5u_1+e^x u_3,\ u_3'=xu_1+x^2u_3+\sin x;\ u_1(0)=1,\ u_2(0)=7,\ u_3(0)=-1,$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως εξής

$$u'=f(x,u),\ u(0)=u_0$$

αρκεί να θέσουμε

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix},\ u_0=\begin{pmatrix}1\\ 7\\ -1\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad f(x,u)=\begin{pmatrix}u_2\\ 5u_1+e^x u_3\\ xu_1+x^2u_3+\sin x\end{pmatrix}.$$

(iii) Θέτουμε $y=y_1$, $y'=y_2$, $y''=y_3$ και παίρνουμε

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ y_3'=\frac{1}{e^x}(-\cos x-y_1^3+7xy_2^3);\ y_1(0)=y_2(0)=1,\ y_3(0)=-2$$

οπότε έχουμε

$$Y'=f(x,Y);\ Y(0)=Y_0$$

με

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\end{pmatrix},\ Y_0=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad f(x,Y)=\begin{pmatrix}y_2\\ y_3\\ \frac{1}{e^x}(-\cos x-y_1^3+7xy_2^3)\end{pmatrix}.$$

(iv) Για

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\quad y_0=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 7\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ e^x & 1 & -\sin x\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

παίρνουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'=A(x)y;\ y(1)=y_0.$$

(v) Αυτό γράφεται

$$Y' = A(x)Y+B(x)\,;\quad Y(2) = Y_0,$$

όπου

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix},\quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{x^2}{x^2+1} & \dfrac{5x}{x^2+1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x/(x^2+1) \end{pmatrix}.$$

(vi) Θέτουμε $y_1 = u_1$, $y_1' = u_2$, $y_2 = u_3$, $y_2' = u_4$, οπότε

$u_1' = u_2$, $u_2' = u_1$, $u_3' = u_4$, $u_4' = -xu_4+u_3+e^x$; $u_1(0) = u_2(0) = 1$, $u_3(0) = 7$, $u_4(0) = 3$.

Αυτό γράφεται

$$u' = A(x)u+b(x)\,;\quad u(0) = u_0,$$

όπου

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},\ u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}.$$

(vii) Για $y_1 = u_1$, $y_1' = u_2$, $y_2 = u_3$, $y_3 = u_4$, παίρνουμε

$u_1' = u_2$, $u_2' = -u_1+e^x$, $u_3' = 5u_3+u_4$, $u_4' = -u_3$; $u_1(0) = u_2(0) = 1$, $u_3(0) = u_4(0) = 2$

ή ακόμα

$$u' = Au+b(x)\,;\quad u(0) = u_0,$$

όπου

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},\ u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y)\,;\quad y(1) = y_0$$

με

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y_1+y_2^2-\log^2 x \\ xe^{-x}y_1-x+\frac{1}{x} \end{pmatrix},\quad x>0 \quad \text{και} \quad y_0 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

έχει τη λύση

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ \log x \end{pmatrix},\quad x>0.$$

(ii) Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' = \frac{2x}{x^2+1}\,y'\,;\quad y(0)=1,\; y'(0)=3$$

έχει τη λύση $y(x) = x^3+3x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. (i) Είναι

$$y(1) = \begin{pmatrix} e^1 \\ \log 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} = y_0$$

και για όλα τα $x>0$ έχουμε

$$f(x,y(x)) = \begin{pmatrix} e^x+\log^2 x-\log^2 x \\ xe^{-x}e^x-x+\frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = y'(x).$$

(ii) Είναι $y(0)=1$ και $y'(0)=3$. Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$y'(x) = 3x^2+3 \quad \text{και} \quad y''(x) = 6x$$

και επομένως

$$y''(x) = \frac{2x}{x^2+1}\,y'(x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

1.3. Ασκήσεις

1. Τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών να μετασχηματισθούν σ' άλλα που ν'αναφέρονται σε διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y_1' = 2y_1^2+7xy_2,\; y_2'' = -y_1\,;\; y_1(0)=1,\; y_2(0)=-1,\; y_2'(0)=1.$

(ii) $y_1''' - e^x y_1' + y_1 = \sin x,\; y_2'' = e^x y_1\,;\; y_1(1) = y_1'(1) = 0,\; y_1''(1) = y_2(1) = y_2'(1) = 2.$

(iii) $y_1''-y_1^2+4\cos y_1' = 0,\ y_2' = e^x y_1;\ y_1(1) = 2,\ y_1'(1) = 0,$

$y_2(1) = -3.$

(iv) $y_1'' = 4y_1-y_2,\ y_2' = e^x+y_1;\ y_1(2) = 0,\ y_1'(2) = -1,\ y_2(2) = 0.$

(v) $e^x y_1''' - y_2 = 0,\ y_2' = e^x y_1+xy_2;\ y_1(0) = y_1'(0) = y_1''(0) = 1,$

$y_2(0) = 2.$

2. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Η συνάρτηση

$$y(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x} \\ \frac{1}{3}e^{2x}+\frac{2}{3}e^{-x} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}e^{2x}-\frac{4}{3}e^{-x} \end{pmatrix},\quad x \in \mathbb{R}$$

είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} y,\quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Η συνάρτηση

$$y(x) = -\log(1-x),\quad x < 1$$

είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' = e^{2y};\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

2. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟ ΛΥΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Στο Εδάφιο αυτό θ'ασχοληθούμε με την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών. Θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση προβλημάτων αρχικών τιμών που αναφέρονται σε διανυσματικές διαφορικές εξισώσεις και θα δώσουμε τρία συμπεράσματα (Θεωρήματα 1,2 και 3) για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων αυτών. Στα συμπεράσματα αυτά η συνάρτηση που ορίζει τη διαφορική εξίσωση θα υποτίθεται ότι πληροί τη συνθήκη του Lipschitz σε κατάλληλο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Θα εξετασθούν ακόμα οι ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικά διαφορικά συστήματα (Θεώρημα 4) καθώς και για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Θεώρημα 5). Επίσης, θα δοθούν παραδείγματα εφαρμογής των συμπερασμάτων και θα προταθούν ασκήσεις για λύση.

2.1. Η συνθήκη του Lipschitz

Πριν προχωρήσουμε, θ'αναφέρουμε ότι οι τρείς πιο συνηθισμένες στάθμες ενός n-διάστατου διανύσματος c με συντεταγμένες $c_1,\ldots,c_n$ είναι

$$\sup_{i=1,\ldots,n} |c_i|,\quad \sum_{i=1}^{n} |c_i| \quad \text{και} \quad \left[\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right]^{1/2} \quad \text{(Ευκλείδεια στάθμη).}$$

Στα παρακάτω, με $|c|$ θα παριστάνουμε μια οποιαδήποτε στάθμη του n--διάστατου διανύσματος c. Εξάλλου, στον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων όλες οι στάθμες είναι ισοδύναμες με την έννοια ότι, αν $|\ |_1$ και $|\ |_2$ είναι δύο στάθμες στον χώρο αυτόν, τότε υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ έτσι ώστε για όλα τα n-διάστατα διανύσματα c να ισχύει

$$\alpha|c|_1 \leqq |c|_2 \leqq \beta|c|_1 .$$

Θα σημειώσουμε ακόμα ότι, αν h είναι μια συνεχής n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση σ'ένα συμπαγές διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} h(t)\,dt\right| \leqq \int_{\alpha}^{\beta} |h(t)|\,dt .$$

Ας είναι g μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα υποσύνολο D_g του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων.

Αν E είναι ένα υποσύνολο του D_g, λέμε ότι η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο E αν και μόνο αν υπάρχει μια μη αρνητική σταθερά K έτσι ώστε

(*) $\quad |g(x,y_1)-g(x,y_2)| \leqq K|y_1-y_2|$ για όλα τα $(x,y_1),(x,y_2)$ στο E,

και λέμε ότι η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K \geqq 0$ στο E αν και μόνο άν η (*) ισχύει. Όταν η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz (με σταθερά $K \geqq 0$) στο πεδίο ορισμού της, τότε θα λέμε ότι η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz (με σταθερά $K \geqq 0$).

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο $(x_0,y_0) \in D_g$. Έχουμε τότε τα παρακάτω δύο συμπεράσματα:

(i) Ας είναι a και b δύο θετικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$R=\{(x,y)\ :\ |x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b\}\subseteq D_g$$

και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial g/\partial y_k$ $(k=1,\ldots,n)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R. Ακόμα, ας είναι

$$K=\max_{\substack{(x,y)\in R\\ k=1,\ldots,n}}\left|\frac{\partial g}{\partial y_k}(x,y)\right|.$$

Τότε η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K\geq 0$ στο R.

(ii) Ας είναι a μια θετική σταθερά τέτοια ώστε

$$S=\{(x,y)\ :\ |x-x_0|\leq a,\ y\ \text{αυθαίρετο}\}\subseteq D_g$$

και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial g/\partial y_k$ $(k=1,\ldots,n)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς και φραγμένες στο S. Ακόμα, ας είναι

$$K=\sup_{\substack{(x,y)\in S\\ k=1,\ldots,n}}\left|\frac{\partial g}{\partial y_k}(x,y)\right|.$$

Τότε η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K\geq 0$ στο S.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: (i) Καθεμιά απ'τις μερικές παράγωγες $\partial g/\partial y_k$ $(k=1,\ldots,n)$ είναι συνεχής στο R και επομένως παίρνει ένα μέγιστο σ' αυτό. 'Ετσι, K είναι μια μη αρνητική σταθερά. Ας θεωρήσουμε δύο τυχόντα (x,z), (x,w) στο R. Τότε για κάθε $t\in[0,1]$ είναι

$$\begin{aligned}|w+t(z-w)-y_0| &= |(1-t)(w-y_0)+t(z-y_0)|\leq(1-t)|w-y_0|+t|z-y_0|\\ &\leq(1-t)b+tb=b\end{aligned}$$

και επομένως $(x,w+t(z-w))\in R$. 'Ετσι, μπορεί να ορισθεί η συνάρτηση

$$G(t)=g(x,w+t(z-w)),\quad t\in[0,1].$$

Για όλα τα $t\in[0,1]$ έχουμε

$$G'(t)=(z_1-w_1)\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,w+t(z-w))+\ldots+(z_n-w_n)\frac{\partial g}{\partial y_n}(x,w+t(z-w)),$$

όπου $z_1,\ldots,z_n$ και $w_1,\ldots,w_n$ είναι οι συντεταγμένες των z και w αντίστοιχα. Επομένως, για κάθε $t\in[0,1]$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}|G'(t)| &\leq|z_1-w_1|\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,w+t(z-w))\right|+\ldots+|z_n-w_n|\left|\frac{\partial g}{\partial y_n}(x,w+t(z-w))\right|\\ &\leq K|z_1-w_1|+\ldots+K|z_n-w_n|\leq K|z-w|.\end{aligned}$$

Αλλά

$$g(x,z)-g(x,w)=G(1)-G(0)=\int_0^1 G'(t)\,dt$$

και επομένως

$$|g(x,z)-g(x,w)|\leq\int_0^1|G'(t)|\,dt\leq K|z-w|.$$

(ii) Επειδή καθεμιά απ'τις μερικές παραγώγους $\partial g/\partial y_k$ $(k=1,\ldots,n)$ είναι φραγμένη στο S, K θα είναι μια μη αρνητική σταθερά. Θεωρούμε πάλι δύο τυχόντα (x,z) και (x,w) στο S και παρατηρούμε ότι για κάθε $t\in[0,1]$ είναι $(x,w+t(z-w))\in S$. Η περαιτέρω απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της περίπτωσης (i).

2.2. Ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών

Ας θεωρήσουμε τη (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

(E) $$y'=f(x,y),$$

όπου f είναι μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη σ'ένα υποσύνολο D_f του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων. Ακόμα, ας θεωρήσουμε ένα σημείο $(x_0,y_0)\in D_f$ και την αρχική συνθήκη

(C) $$y(x_0)=y_0.$$

Έχουμε έτσι το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C).

Το πρώτο ερώτημα που τίθεται για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών είναι: Υπάρχει λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) και, αν υπάρχει, σε ποιό διάστημα είναι ορισμένη και είναι η μοναδική λύση στο διάστημα αυτό; Το θέμα της μελέτης του ερωτήματος αυτού αναφέρεται ως ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C). Τα παρακάτω Θεωρήματα 1,2 και 3 αναφέρονται στο αντικείμενο αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Ας είναι a και b δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε*

$$R=\{(x,y):|x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b\}\subseteq D_f$$

και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά K > 0 στο R. Ακόμα, ας είναι

$$M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)| \quad \text{και} \quad r=\min\{a,b/M\}$$

(είναι r = a, όταν M = 0).

<u>Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών</u> (E)-(C) <u>έχει ακριβώς μια λύση</u> y <u>στο διάστημα</u> $I = \{x: |x-x_0| \leq r\}$. <u>Επιπλέον, η λύση</u> y <u>είναι το όριο της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων</u> $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\ldots}$, <u>όπου</u>

$$\varphi_0(x) = y_0, \; x \in I \;\underline{\text{και}}\; \varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_\nu(t))dt, \; x \in I$$
$$(\nu = 0,1,\ldots).$$

<u>Ακόμα, είναι</u>

$$|y(x) - \varphi_\nu(x)| \leq \frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr}, \; x \in I \; (\nu = 0,1,\ldots).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (I) Η ακολουθία $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\ldots}$ ορίζεται ως μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα I και ακόμα $(x,\varphi_\nu(x)) \in R$ για κάθε $x \in I$ $(\nu = 0,1,\ldots)$. Πραγματικά: Η συνάρτηση $\varphi_0(x) = y_0$, $x \in I$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα I και ακόμα $(x,\varphi_0(x)) = (x,y_0) \in R$ για κάθε $x \in I$. Τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο R, ο τύπος

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_0(t))dt, \; x \in I$$

ορίζει μια συνεχή συνάρτηση φ_1 στο I για την οποία έχουμε

$$|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_0(t))dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_0(t))|dt\right| \leq M|x-x_0| \leq b$$

για όλα τα $x \in I$, δηλαδή $(x,\varphi_1(x)) \in R$ για κάθε $x \in I$. Τώρα, ας υποθέσουμε ότι m είναι ένας ακέραιος θετικός τέτοιος ώστε η συνάρτηση φ_m ορίζεται και είναι συνεχής στο I και $(x,\varphi_m(x)) \in R$ για κάθε $x \in I$. Τότε ο τύπος

$$\varphi_{m+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_m(t))dt, \; x \in I$$

ορίζει μια συνεχή συνάρτηση στο I, αφού η f είναι συνεχής στο R. Επίσης, για οποιοδήποτε $x \in I$ είναι

$$|\varphi_{m+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_m(t))dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_m(t))|dt\right| \leq M|x-x_0| \leq b,$$

δηλαδή $(x,\varphi_{m+1}(x)) \in R$.

(II) Ισχύει

$$|\varphi_\nu(x)-\varphi_{\nu-1}(x)| \leq \frac{MK^{\nu-1}}{\nu!}|x-x_0|^\nu \text{ για κάθε } x\in I \ (\nu=1,2,\ldots).$$

Πραγματικά: Για όλα τα $x\in I$ έχουμε

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_0(t))\,dt\right| \leq M|x-x_0|.$$

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο θετικό ακέραιο m είναι

$$|\varphi_m(x)-\varphi_{m-1}(x)| \leq \frac{MK^{m-1}}{m!}|x-x_0|^m \text{ για κάθε } x\in I.$$

Τότε, παίρνοντας υπόψη το γεγονός ότι η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά K στο R, για οποιοδήποτε $x\in I$ παίρνουμε

$$|\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_m(t))\,dt-\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_{m-1}(t))\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} [f(t,\varphi_m(t))-f(t,\varphi_{m-1}(t))]\,dt\right|$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_m(t))-f(t,\varphi_{m-1}(t))|\,dt\right|$$

$$\leq K\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)|\,dt\right| \leq \frac{MK^m}{m!}\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^m dt\right|$$

$$= \frac{MK^{(m+1)-1}}{(m+1)!}|x-x_0|^{m+1}.$$

(III) Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\ldots}$ συγκλίνει. Πραγματικά: Επειδή, όπως εύκολα διαπιστώνεται, ισχύει

$$\varphi_\nu = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\nu}(\varphi_k-\varphi_{k-1}) \quad (\nu=1,2,\ldots),$$

αρκεί ν'αποδειχθεί ότι συγκλίνει η σειρά συναρτήσεων

$$\varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varphi_\nu-\varphi_{\nu-1}).$$

Αυτή η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει απόλυτα, γιατί για κάθε $x\in I$ η σει[ρά] πραγματικών αριθμών $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{MK^{\nu-1}}{\nu!}|x-x_0|^\nu$ συγκλίνει.

(IV) Η οριακή συνάρτηση

$$y=\lim_{\nu\to\infty}\varphi_\nu=\varphi_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varphi_\nu-\varphi_{\nu-1})$$

είναι συνεχής στο διάστημα I και τέτοια ώστε $(x,y(x))\in R$ για κάθε $x\in I$. Πραγματικά: Για τυχόντα $x_1,x_2\in I$ έχουμε

$$|\varphi_{\nu+1}(x_1)-\varphi_{\nu+1}(x_2)|=\left|\int_{x_2}^{x_1}f(t,\varphi_\nu(t))dt\right|\leqq M|x_1-x_2|$$

και έτσι για $\nu\to\infty$ παίρνουμε

$$|y(x_1)-y(x_2)|\leqq M|x_1-x_2|.$$

Αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της οριακής συνάρτησης y. Για $x_1=x$ και $x_2=x_0$ είναι

$$|y(x)-y(x_0)|=|y(x)-y_0|\leqq M|x-x_0|.$$

'Αρα $(x,y(x))\in R$ για κάθε $x\in I$.

(V) Ισχύει

$$|y(x)-\varphi_\nu(x)|\leqq\frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr},\quad x\in I\quad(\nu=0,1,\ldots).$$

Πραγματικά: Για κάθε $x\in I$ είναι

$$y(x)=\varphi_0(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}[\varphi_\nu(x)-\varphi_{\nu-1}(x)]$$

και

$$\varphi_\nu(x)=\begin{cases}\varphi_0(x), & \text{για } \nu=0\\ \varphi_0(x)+\sum\limits_{k=1}^{\nu}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)], & \text{για } \nu=1,2,\ldots.\end{cases}$$

'Ετσι, για οποιονδήποτε μη αρνητικό ακέραιο ν και για όλα τα $x\in I$ είναι

$$|y(x)-\varphi_\nu(x)|=\left|\sum_{p=\nu+1}^{\infty}[\varphi_p(x)-\varphi_{p-1}(x)]\right|\leqq\sum_{p=\nu+1}^{\infty}|\varphi_p(x)-\varphi_{p-1}(x)|$$

$$\leqq\sum_{p=\nu+1}^{\infty}\frac{MK^{p-1}}{p!}|x-x_0|^p\leqq\frac{M}{K}\sum_{p=\nu+1}^{\infty}\frac{(Kr)^p}{p!}$$

$$\leqq\frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(Kr)^p}{p!}=\frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr}.$$

(VI) Η οριακή συνάρτηση y είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C). Πραγματικά: Για κάθε $x\in I$ και για κάθε $\nu=0,1,\ldots$ έχουμε

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt-\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_\nu(t))dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y(t))-f(t,\varphi_\nu(t))|dt\right|$$

$$\leq K\left|\int_{x_0}^{x} |y(t)-\varphi_\nu(t)|dt\right|$$

$$\leq M\,\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\,e^{Kr}|x-x_0|,$$

αφού η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά K στο R. Αλλά

$$[(Kr)^{\nu+1}/(\nu+1)!] \to 0 \text{ όταν } \nu\to\infty,$$

και επομένως

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_\nu(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t,y(t)dt \text{ για κάθε } x\in I.$$

'Αρα, είναι

$$y(x) = y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt,\ x\in I.$$

'Ετσι, παίρνουμε $y(x_0) = y_0$ και $y'(x) = f(x,y(x))$ για όλα τα $x\in I$.

(VII) Η λύση y είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) στο διάστημα I. Πραγματικά: Ας θεωρήσουμε μια λύση z του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) στο διάστημα I. Τότε για όλα τα $x\in I$ θα είναι

$$z(x) = z(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(t,z(t))dt = y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,z(t))dt$$

και επομένως

$$|y(x)-z(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t,y(t)-f(t,z(t))]dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t,y(t))-f(t,z(t))|dt\right|.$$

Αλλά η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά K στο R, οπότε

$$|y(x)-z(x)| \leq K\left|\int_{x_0}^{x} |y(t)-z(t)|dt\right| \text{ για κάθε } x\in I.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \left|\int_{x_0}^{x} |y(t)-z(t)|dt\right|,\ x\in I.$$

Τότε είναι

$$h'(x) \leq Kh(x) \text{ για όλα τα } x\in I.$$

Έτσι, για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$[e^{-K(x-x_0)}h(x)]' = e^{-K(x-x_0)}h'(x) - Ke^{-K(x-x_0)}h(x) =$$

$$= e^{-K(x-x_0)}[h'(x) - Kh(x)] \leq 0$$

και άρα

$$\left|e^{-K(x-x_0)}h(x) - h(x_0)\right| = e^{-K(x-x_0)}h(x) \leq 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Έτσι, έχουμε ότι $h(x) = 0$ για $x \in I$, δηλαδή $|y(x) - z(x)| = 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα,

$$y(x) = z(x) \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος είναι και απόδειξη του παρακάτω συμπεράσματος, το οποίο ουσιαστικά είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 1.

Το Θεώρημα 1 εξακολουθεί να ισχύει με

$$R = \{(x,y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\} \text{ και } I = [x_0, x_0 + r]$$

ή αντίστοιχα

$$R = \{(x,y) : x_0 - a \leq x \leq x_0, |y - y_0| \leq b\} \text{ και } I = [x_0 - r, x_0].$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ας είναι a ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$S = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, \ y \text{ αυθαίρετο}\} \subsetneq D_f$$

και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο S και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K > 0$ στο S.

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C) έχει ακριβώς μια λύση y στο διάστημα $I = \{x : |x - x_0| \leq a\}$. Επιπλέον, η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\ldots}$, όπου

$$\varphi_0(x) = y_0, \ x \in I \text{ και } \varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_\nu(t))dt, \ x \in I \ (\nu = 0,1,\ldots).$$

Ακόμα, είναι

$$|y(x) - \varphi_\nu(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{(Ka)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{Ka}, \ x \in I \ (\nu = 0,1,\ldots),$$

όπου

$$M = \max_{x \in I} |f(x, y_0)|.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (Ι) Η ακολουθία $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\dots}$ ορίζεται ως μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα I. Επιπλέον, είναι $(x,\varphi_\nu(x))\in S$ για κάθε $x\in I$ $(\nu=0,1,\dots)$. Πραγματικά: Η συνάρτηση $\varphi_0(x)=y_0$, $x\in I$ είναι συνεχής. Έτσι, επειδή η f είναι συνεχής στο S, η συνάρτηση φ_1 με

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_0(t))dt,\ x\in I$$

ορίζεται και είναι συνεχής στο I. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση φ_m ορίζεται και είναι συνεχής στο I, όπου m είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο τύπος

$$\varphi_{m+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_m(t))dt,\ x\in I$$

ορίζει μια συνεχή συνάρτηση φ_{m+1} στο I. Τώρα, είναι φανερό ότι $(x,\varphi_\nu(x))\in S$ για κάθε $x\in I$ $(\nu=0,1,\dots)$.

(ΙΙ) Ισχύει

$$|\varphi_\nu(x)-\varphi_{\nu-1}(x)|\leqq\frac{MK^{\nu-1}}{\nu!}|x-x_0|^\nu \text{ για κάθε } x\in I\ (\nu=1,2,\dots).$$

Πραγματικά: Για όλα τα $x\in I$ έχουμε

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)dt\right|\leqq\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_0)|dt\right|\leqq M|x-x_0|.$$

Το υπόλοιπο της απόδειξης γίνεται όπως ακριβώς στο μέρος (ΙΙ) της απόδειξης του Θεωρήματος 1 (με S αντί για R).

(ΙΙΙ) Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\dots}$ συγκλίνει. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι η ίδια με την απόδειξη του ίδιου ισχυρισμού στο μέρος (ΙΙΙ) της απόδειξης του Θεωρήματος 1.

(IV) Η οριακή συνάρτηση $y=\lim_{\nu\to\infty}\varphi_\nu$ είναι συνεχής στο διάστημα I. Πραγματικά: Για κάθε $\nu=0,1,\dots$ και για όλα τα $x\in I$ έχουμε

$$|\varphi_{\nu+1}(x)-y_0|=\left|\sum_{p=1}^{\nu+1}[\varphi_p(x)-\varphi_{p-1}(x)]\right|\leqq\sum_{p=1}^{\nu+1}|\varphi_p(x)-\varphi_{p-1}(x)|$$

$$\leqq\frac{M}{K}\sum_{p=1}^{\nu+1}\frac{K^p}{p!}|x-x_0|^p\leqq\frac{M}{K}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(Ka)^p}{p!}=\frac{M}{K}(e^{Ka}-1).$$

Έτσι, αν θέσουμε

$$b=\frac{M}{K}(e^{Ka}-1),$$

τότε θα είναι

$$|\varphi_\nu(x)-y_0|\leq b \text{ για κάθε } x\in I \quad (\nu=0,1,\ldots).$$

Παραπέρα, θέτουμε

$$N=\max_{\substack{|x-x_0|\leq a\\ |y-y_0|\leq b}}|f(x,y)|.$$

Τότε για τυχόντα $x_1,x_2\in I$ παίρνουμε

$$|\varphi_{\nu+1}(x_1)-\varphi_{\nu+1}(x_2)|=\left|\int_{x_2}^{x_1}f(t,\varphi_\nu(t))dt\right|\leq N|x_1-x_2|$$

και επομένως, για $\nu\to\infty$, είναι

$$|y(x_1)-y(x_2)|\leq N|x_1-x_2|,$$

το οποίο αποδεικνύει τη συνέχεια της συνάρτησης y.

(V) Ισχύει

$$|y(x)-\varphi_\nu(x)|\leq\frac{M}{K}\frac{(Ka)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Ka},\quad x\in I\quad(\nu=0,1,\ldots).$$

Η απόδειξη γίνεται ακριβώς όπως στο μέρος (V) της απόδειξης του Θεωρήματος 1 με a στη θέση του r.

(VI) Η οριακή συνάρτηση y είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C). Αρκεί να επαναλάβουμε την απόδειξη του ίδιου ισχυρισμού του μέρους (VI) της απόδειξης του Θεωρήματος 1 με a στη θέση του r.

(VII) Η λύση y είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C). Ισχύει η ίδια ακριβώς απόδειξη με εκείνη του μέρους (VII) της απόδειξης του Θεωρήματος 1.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 είναι και απόδειξη του παρακάτω συμπεράσματος, ισοδύναμου ουσιαστικά με το Θεώρημα 2.

<u>Το Θεώρημα</u> 2 <u>εξακολουθεί να ισχύει με</u>

$$S=\{(x,y):x_0\leq x\leq x_0+a,\ y \text{ αυθαίρετο}\} \text{ και } I=[x_0,x_0+a]$$

<u>ή αντίστοιχα</u>

$$S=\{(x,y):x_0-a\leq x\leq x_0,\ y \text{ αυθαίρετο}\} \text{ και } I=[x_0-a,x_0].$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ας είναι I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας τέτοιο ώστε $x_0 \in I$ και

$$E = \{(x,y) : x \in I,\ y \text{ αυθαίρετο}\} \subseteq D_f$$

και ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο E. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι για κάθε συμπαγές υποδιάστημα J του I η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σύνολο

$$E_J = \{(x,y) : x \in J,\ y \text{ αυθαίρετο}\}.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C) έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα I.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πρώτα απ'όλα, παρατηρούμε ότι, αν y^* είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) σ'ένα κλειστό δεξιά διάστημα I^* με δεξιό άκρο ξ και $\tilde{y}$ είναι μια λύση αυτής σ'ένα κλειστό αριστερά διάστημα $\tilde{I}$ με αριστερό άκρο ξ και $y^*(\xi) = \tilde{y}(\xi)$, τότε η συνάρτηση y που ορίζεται ως εξής

$$y(x) = y^*(x) \text{ για } x \in I^* \text{ και } y(x) = \tilde{y}(x) \text{ για } x \in \tilde{I}$$

είναι μια λύση της (E) στο διάστημα $I^* \cup \tilde{I}$.

Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C) έχει μια ακριβώς λύση στο διάστημα $I \cap [x_0,\infty)$, εφόσον το x_0 δεν είναι το δεξιό άκρο του I, και μια ακριβώς λύση στο $I \cap (-\infty,x_0]$, εφόσον το x_0 δεν είναι το αριστερό άκρο του I. Υποθέτουμε ότι $x_0 < \vartheta$, όπου ϑ είναι το δεξιό άκρο του I. Αν $\vartheta \in I$, τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση του (E)-(C) στο διάστημα $[x_0,\vartheta] = I \cap [x_0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι $\vartheta \notin I$ και ας θεωρήσουμε μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \geq 1}$ σημείων του διαστήματος $[x_0,\vartheta)$ με $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ και $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \vartheta$. Επαγωγικά ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $(\varphi_\nu)_{\nu \geq 0}$, όπου φ_0 είναι η μοναδική λύση του (E)-(C) στο διάστημα $[x_0,x_1]$ και, για κάθε $\nu \geq 1$, φ_ν είναι η μοναδική λύση στο διάστημα $[x_\nu,x_{\nu+1}]$ της διαφορικής εξίσωσης (E) με $\varphi_\nu(x_\nu) = \varphi_{\nu-1}(x_\nu)$. Τότε η συνάρτηση y με

$$y(x) = \varphi_\nu(x),\ x \in [x_\nu,x_{\nu+1}]\ (\nu = 0,1,\ldots)$$

είναι μια λύση στο διάστημα $[x_0,\vartheta) = I \cap [x_0,\infty)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C) και μάλιστα αυτή είναι μοναδική. Κατά ένα ανάλογο τρόπο, μπορούμε ν'αποδείξουμε ότι, στην περίπτωση όπου το x_0 δεν είναι το αριστερό άκρο του I, το (E)-(C) έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $I \cap (-\infty,x_0]$.

Τώρα, ας είναι A ένας n-τάξης (τετραγωνικός) πίνακας-συνάρτηση σ'ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας που είναι συνεχής και b μια συνεχής n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο διάστημα I. Επιπλέον, ας είναι $E=\{(x,y) : x\in I, \ y$ αυθαίρετο n-διάστατο διάνυσμα$\}$. Τότε η συνάρτηση f με

$$f(x,y)=A(x)y+b(x), \quad (x,y)\in E$$

είναι συνεχής στο E. Επιπλέον, αν J είναι ένα συμπαγές υποδιάστημα του I και $E_J=\{(x,y) : x\in J, \ y$ αυθαίρετο$\}$, τότε η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο E_J, αφού για κάθε $(x,z),(x,w)$ στο E_J έχουμε

$$|f(x,z)-f(x,w)| = |A(x)(z-w)| \leq |A(x)||z-w| \leq [\max_{x\in J} |A(x)|]|z-w|,$$

όπου για ένα n-τάξης τετραγωνικό πίνακα C η στάθμη του $|C|$ ορίζεται με τον τύπο

$$|C| = \sup_{\xi\neq 0} \frac{|C\xi|}{|\xi|}.$$

Έτσι, το Θεώρημα 3 οδηγεί στο παρακάτω Θεώρημα 4 για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικά διαφορικά συστήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Ας είναι A ένας n-τάξης συνεχής πίνακας-συνάρτηση σ'ένα διάστημα I και b μια συνεχής n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο I. Τότε, για κάθε $x_0\in I$ και για οποιοδήποτε n-διάστατο διάνυσμα y_0, το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y'=Ay+b$$

έχει ακριβώς μια λύση y στο διάστημα I που πληροί την αρχική συνθήκη

$$y(x_0)=y_0.$$

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση ανάγεται σ'ένα αντίστοιχο γραμμικό διαφορικό σύστημα, όπως έχουμε δεί στο προηγούμενο Εδάφιο. Έτσι, για προβλήματα αρχικών τιμών που αναφέρονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις έχουμε το παρακάτω Θεώρημα 5 για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων, που προκύπτει ως μια συνέπεια απ'το Θεώρημα 4.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Ας είναι a_i $(i=0,1,\dots,n)$ και b συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα I και $a_n(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Τότε, για κάθε

$x_0 \in I$ <u>και για οποιεσδήποτε σταθερές</u> $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, <u>η γραμμική διαφορική εξίσωση</u>

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b$$

<u>έχει ακριβώς μια λύση</u> y <u>στο διάστημα</u> I <u>που πληροί τις αρχικές συνθήκες</u>

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

2.3. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ν'αποδειχθεί ότι σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο σύνολο:

(i) $g(x,y) = \sin y + y\cos x$; $R = \{(x,y) : |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}$.

(ii) $g(x,y) = x^2 \mathrm{Artg} y + e^x$; $S = \{(x,y) : |x| \leq 2,\ y$ αυθαίρετο$\}$.

(iii) $g(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} x^2 + y_1^2 \\ x^2 e^{x+y_2} \end{pmatrix}$; $R = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y_1| + |y_2| \leq 1\}$.

(iv) $g(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} e^x + \sin y_1 \\ x\,\mathrm{Artg}\, y_2 + \cos y_1 \end{pmatrix}$; $S = \{(x,y) : |x| \leq 1, y_1$ και y_2 αυθαίρετα$\}$.

<u>Λύση</u>. (i) Έχουμε

$$K = \max_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in R} |\cos y + \cos x| = 2$$

και επομένως η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο R με σταθερά K = 2.

(ii) Είναι

$$K = \sup_{(x,y)\in S} \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right| = \sup_{(x,y)\in S} |x^2/(1+y^2)| = 4$$

και άρα η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά K = 4 στο σύνολο S.

(iii) Η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K = e^2$ στο R, γιατί

$$\max_{(x,y_1,y_2)\in R} \left|\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,y_1,y_2)\right| = \max_{(x,y_1,y_2)\in R} \left\|\begin{pmatrix} 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \max_{(x,y_1,y_2)\in R} |2y_1| = 2$$

και

$$\max_{(x,y_1,y_2)\in R}\left|\frac{\partial g}{\partial y_2}(x,y_1,y_2)\right| = \max_{(x,y_1,y_2)\in R}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 e^{x+y_2}\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \max_{(x,y_1,y_2)\in R} |x^2 e^{x+y_2}| = e^2,$$

και $K = \max\{2, e^2\} = e^2$.

(iv) Είναι

$$\sup_{(x,y_1,y_2)\in S}\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}(x,y_1,y_2)\right| = \sup_{(x,y_1,y_2)\in S}\left|\begin{pmatrix} \cos y_1 \\ -\sin y_1\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \sup_{(x,y_1,y_2)\in S} [|\cos y_1| + |\sin y_1|] = \sqrt{2}$$

και

$$\sup_{(x,y_1,y_2)\in S}\left|\frac{\partial g}{\partial y_2}(x,y_1,y_2)\right| = \sup_{(x,y_1,y_2)\in S}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ x/(1+y_2^2)\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \sup_{(x,y_1,y_2)\in S} |x/(1+y_2^2)| = 1$$

και άρα η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K = \sqrt{2}$ στο S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

<u>Λύση</u>. Θέτουμε $f(x,y) = x^2+y^2$ για όλα τα x,y. Θεωρούμε δύο θετικούς αριθμούς a και b και θέτουμε

$$R = \{(x,y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Επίσης, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K = 2b$ στο R, γιατί

$$\max_{(x,y)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in R}|2y| = 2b.$$

Τώρα, έχουμε

$$M = \max_{(x,y)\in R}|f(x,y)| = \max_{(x,y)\in R}|x^2+y^2| = a^2+b^2,$$

και έτσι

$$r = \min\{a, b/M\} = \min\{a, b/(a^2+b^2)\}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-r,r]$. Θα βρούμε τώρα το μέγιστο τέτοιο διάστημα. Για ένα δεδομένο $a>0$, η μέγιστη τιμή της παράστασης $b/(a^2+b^2)$ λαμβάνεται για $b=a$ και είναι ίση με $1/2a$. Τότε η μέγιστη τιμή του $r=\min\{a,1/2a\}$ είναι ίση με $1/\sqrt{2}$ καιλαμβάνεται για $a=1/\sqrt{2}$. 'Ετσι, εκλέγοντας $a=b=1/\sqrt{2}$, συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών που δόθηκε έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ν'αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = x+y^2, y(0) = 0$$

έχει ακριβώς μια λύση y στο διάστημα $[-1/2,1/2]$. Στη συνέχεια, να βρεθεί μια προσέγγιση $\tilde{y}$ της λύσης y τέτοια ώστε

$$|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \frac{10-7\sqrt{2}}{24}\, e^{(2-\sqrt{2})/2} \quad \text{για } x \in [-1/2,1/2].$$

<u>Λύση</u>. Ο τύπος $f(x,y) = x+y^2$ ορίζει τη συνάρτηση f για όλα τα x,y. Θεωρούμε ένα θετικό αριθμό b και θέτουμε

$$R = \{(x,y) : |x| \leq 1/2, |y| \leq b\}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Επίσης, η f πληροί στο R τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K=2b$, αφού

$$\max_{(x,y)\in R} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in R} |2y| = 2b.$$

Ακόμα, είναι

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = \frac{1}{2} + b^2.$$

Θέτουμε

$$r = \min\left\{\frac{1}{2}\ ,\ b\Big/\left(\frac{1}{2}+b^2\right)\right\}.$$

Επιλέγοντας $b=(2-\sqrt{2})/2$, βρίσκουμε $r=1/2$ και επομένως (Θεώρημα 1) το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-1/2,1/2]$. Για την παραπάνω επιλογή του b είναι $K=2-\sqrt{2}$ και $M = 2-\sqrt{2}$. Η λύση y είναι (Θεώρημα 1) το όριο της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων $(\varphi_\nu)_{\nu=0,1,\ldots}$, όπου

$$\varphi_0(x) = 0,\ x \in [-1/2,1/2] \text{ και } \varphi_{\nu+1}(x) = \int_0^x [t+\varphi_\nu^2(t)]dt,\ x \in [-1/2,1/2]$$
$$(\nu = 0,1,\ldots).$$

Επίσης, ισχύει (Θεώρημα 1)

$$|y(x)-\varphi_\nu(x)| \leq \frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr}, \quad x\in[-1/2,1/2] \quad (\nu=0,1,\dots).$$

'Ετσι, για $\nu=2$ έχουμε

$$|y(x)-\varphi_2(x)| \leq \frac{10-7\sqrt{2}}{24}e^{(2-\sqrt{2})/2} \quad \text{για } x\in[-1/2,1/2].$$

Αρκεί, λοιπόν, να πάρουμε $\tilde{y}=\varphi_2$. Αλλά είναι

$$\varphi_1(x) = \int_0^x [t+\varphi_0^2(t)]dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}, \quad x\in[-1/2,1/2]$$

και

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [t+\varphi_1^2(t)]dt = \int_0^x \left(t+\frac{t^4}{4}\right)dt = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}, \quad x\in[-1/2,1/2].$$

'Ετσι, η ζητούμενη προσέγγιση της λύσης y είναι

$$\tilde{y}(x) = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}, \quad x\in[-1/2,1/2].$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = e^{-y^2}+\sqrt{1-x^2}, \quad y(0)=1.$$

<u>Λύση</u>. Θέτουμε

$$S = \{(x,y) : |x|\leq 1, \ y \text{ αυθαίρετο}\}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = e^{-y^2}+\sqrt{1-x^2}, \quad (x,y)\in S.$$

Η f είναι συνεχής στο S. Επίσης, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο S, αφού για κάθε $(x,y)\in S$ είναι

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = 2|y|e^{-y^2} \leq \sqrt{2}\,e^{-1/2}.$$

'Αρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-1,1]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = x^2\text{Artg}y+e^{-x}, \quad y(1)=-2.$$

<u>Λύση</u>. Θέτουμε $f(x,y)=x^2\text{Artg}y+e^{-x}$ για όλα τα x,y. Η συνάρτηση f είναι συνεχής. Ακόμα, για κάθε συμπαγές διάστημα J του $\mathbb{R}$, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σύνολο

$$E_J = \{(x,y) : x \in J,\ y \text{ αυθαίρετο}\},$$

αφού

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |x^2/(1+y^2)| \leq \max_{x\in J} x^2 \text{ για κάθε } (x,y) \in E_J.$$

'Ετσι, το Θεώρημα 3 εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_1' = y_2^2,\ y_2' = x+y_1^2;\ y_1(0) = y_2(0) = 0.$$

<u>Λύση</u>. Θέτουμε

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ και } f(x,y) = f(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ x+y_1^2 \end{pmatrix},$$

οπότε το πρόβλημα αρχικών τιμών γράφεται στη μορφή

$$y' = f(x,y),\ y(0) = 0.$$

Θεωρούμε δύο θετικούς αριθμούς a και b και θέτουμε

$$R = \{(x,y) : |x| \leq a,\ |y| \leq b\}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Ακόμα, έχουμε

$$\max_{(x,y)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial y_1}(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in R}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix}\right| = \max_{(x,y)\in R}|2y_1| = 2b$$

και

$$\max_{(x,y)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial y_2}(x,y)\right| = \max_{(x,y)\in R}\left|\begin{pmatrix} 2y_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \max_{(x,y)\in R}|2y_2| = 2b.$$

'Ετσι, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K = 2b$ στο R. Στη συνέχεια, έχουμε

$$M = \max_{(x,y)\in R}|f(x,y)| = \max_{(x,y)\in R}[y_2^2+|x+y_1^2|] = a+b^2.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-r,r]$, όπου

$$r = \min\{a,b/M\} = \min\{a,b/(a+b^2)\}.$$

Για ένα δεδομένο $a>0$ η μέγιστη τιμή της παράστασης $b/(a+b^2)$ λαμβάνεται όταν $b=\sqrt{a}$ και είναι ίση με $1/2\sqrt{a}$. Το $r=\min\{a,1/2\sqrt{a}\}$ γίνεται μέγιστο για $a=1/\sqrt[3]{4}$. Έτσι, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-1/\sqrt[3]{4},\ 1/\sqrt[3]{4}]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. (i) Να διαπιστωθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 3xy^{1/3},\quad y(0)=0$$

έχει τις λύσεις $y_1(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ και $y_2(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$. (ii) Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με $f(x,y)=3xy^{1/3}$ δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σύνολο

$$R=\{(x,y)\ :\ |x|\leq a,\ |y|\leq b\}\quad (a,b>0).$$

<u>Λύση</u>. (i) Είναι φανερό. (ii) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με μια σταθερά $K>0$ στο R. Τότε θα είναι

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leq K|y-z|\ \text{ για όλα τα } (x,y),(x,z) \text{ στο } R.$$

Έτσι, για κάθε δ με $0<\delta<b$ έχουμε

$$|f(a,\delta)-f(a,-\delta)| = |3a\delta^{1/3}-3a(-\delta)^{1/3}| = 6a\delta^{1/3}\leq K|\delta-(-\delta)| = 2K\delta .$$

Άρα, για κάθε δ με $0<\delta<b$ είναι $\delta^{2/3}\geq(3a)/K$. Αυτό όμως είναι ένα άτοπο.

2.4. <u>Ασκήσεις</u>

<u>1</u>. Ν'αποδειχθεί ότι σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο σύνολο:

(i) $g(x,y)=x^2\cos^2 y+y\sin^2 x$, $S=\{(x,y):|x|\leq 1,\ y$ αυθαίρετο$\}$.

(ii) $g(x,y)=4x^2+y^2$, $R=\{(x,y)\ :\ |x|\leq 1,|y|\leq 1\}$.

(iii) $g(x,y)=x^3e^{-xy^2}$; $S=\{(x,y)\ :\ 0\leq x\leq 1;\ y$ αυθαίρετο$\}$.

(iv) $g(x,y)=x^2|y|$, $R=\{(x,y)\ :\ |x|\leq 1,|y|\leq 1\}$.

(v) $g(x,y)=\begin{cases} y(1-2x), & \text{αν } x\geq 0 \\ y(2x-1), & \text{αν } x<0 \end{cases}$, $S=\{(x,y):|x|\leq 1,\ y$ αυθαίρετο$\}$.

(vi) $g(x,y)=e^xy^2+(\log x)y+x^3$, $E=\{(x,y):\ 1\leq x\leq 2,1\leq y\leq 4\}$.

<u>2</u>. Ν'αποδειχθεί ότι σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση g δεν πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σημειούμενο

σύνολο:

(i) $g(x,y)=xy^2$, $S=\{(x,y):|x|\leq 1,\ y$ αυθαίρετο$\}$.

(ii) $g(x,y)=e^x y^{2/3}$, $R=\{(x,y):|x|\leq 1,|y|\leq 1\}$.

(iii) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x}{x^2+y^2}, & \text{αν } x\neq 0 \text{ ή } y\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=y=0\end{cases}$, $R=\{(x,y):|x|\leq 1,|y|\leq 1\}$.

3. Ν'αποδειχθεί ότι καθένα απ'τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση στο σημειούμενο διάστημα:

(i) $y'=y^2+\cos x^2$, $y(0)=0$; $I=[-1/2,1/2]$.

(ii) $y'=e^{-x^2}+y^2$, $y(0)=0$; $I=[-\sqrt{e}/2,\sqrt{e}/2]$.

(iii) $y'=y^3+e^{-5x}$, $y(0)=2/5$; $I=[-3/10,3/10]$.

(iv) $y'=1+y+y^2\cos x$, $y(0)=0$; $I=[-1/3,1/3]$.

(v) $y'=(4y+e^{-x^2})e^{2y}$, $y(0)=0$; $I=\left[-\frac{1}{8\sqrt{e}},\frac{1}{8\sqrt{e}}\right]$.

(vi) $y'=\frac{1}{4}(1+\cos 4x)y-\frac{1}{800}(1-\cos 4x)y^2$, $y(0)=100$; $I=[-1,1]$.

(vii) $y'=e^{-x}+\log(1+y^2)$, $y(0)=0$; $I=(-\infty,\infty)$.

4. Ν'αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_1'=1+y_2^2,\quad y_2'=y_1^2;\quad y_1(0)=y_2(0)=0$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[-1,1]$.

5. Ν'αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'=\frac{\cos y}{1-x^2},\quad y(0)=-2$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

6. Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'=1+xy^2,\quad y(0)=0.$$

7. Να μελετηθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_1''=x^2y_1'+x^4y_1+y_2,\quad y_2'=e^xy_1-y_2;\quad y_1(1)=2,\ y_1'(1)=0,\ y_2(1)=-1.$$

II. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Στο Κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται μερικές στοιχειώδεις μέθοδοι για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ορισμένων ειδικών μορφών. Στο Εδάφιο 1 εξετάζονται οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης καθώς και δύο άλλες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και οι διαφορικές εξισώσεις Riccati) που ανάγονται με κατάλληλους μετασχηματισμούς σε γραμμικές εξισώσεις. Το Εδάφιο 2 αφορά τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών και των ομογενών διαφορικών εξισώσεων που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών. Οι αμέσως ολοκληρώσιμες διαφορικές εξισώσεις και εκείνες που ανάγονται σε τέτοιες με τη βοήθεια ενός ολοκληρωτικού παράγοντα μελετώνται στο Εδάφιο 3. Στο Εδάφιο 4 θεωρούνται τρείς κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης (οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης που δεν περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση ή την ανεξάρτητη μεταβλητή καθώς και οι γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης)· οι εξισώσεις των κατηγοριών αυτών έχουν την ιδιότητα ότι μπορούν ν'αναχθούν σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Σε καθένα απ' τα Εδάφια 1-4 δίνονται μερικά παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση, ενώ το Εδάφιο 5 περιέχει μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ BERNOULLI. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ RICCATI

Στο Εδάφιο αυτό θα μελετηθούν οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και δύο άλλες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli και οι διαφορικές εξισώσεις Riccati) που ανάγονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα, για μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης θα δοθεί ένας τύπος που δίνει όλες τις λύσεις της· για μια διαφορική εξίσωση Bernoulli θα δοθεί ο μετασχηματισμός που την ανάγει σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης· για μια διαφορική εξίσωση Riccati θα δοθεί επίσης ένας μετασχηματισμός που τη μετατρέπει σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή μια (μερική) λύση της. Για καθεμιά απ'τις τρείς κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων που θα εξετασθούν θα δοθούν παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση των μεθόδων επίλυσης. Επίσης, θα προταθούν μερικές ασκήσεις για λύση.

1.1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$(E) \qquad y'+p(x)y=q(x),$$

όπου p και q είναι γνωστές συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x που είναι συνεχείς σ'ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (E) με $e^{\int p(x)dx}$, παίρνουμε

$$y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

ή

$$\left[ye^{\int p(x)dx}\right]'=q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

'Ετσι, έχουμε

$$ye^{\int p(x)dx}=c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα:

Οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης (E) δίνονται απ' τον τύπο

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[c+\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right],$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'+(\operatorname{tg} x)y = \sin x.$$

Λύση. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής (E) με $p(x) = \operatorname{tg} x$ και $q(x) = \sin x$. Έτσι, όλες οι λύσεις της είναι

$$y=e^{-\int \operatorname{tg}x\,dx}\left[c+\int (\sin x)\,e^{\int \operatorname{tg}x\,dx}\,dx\right]=e^{\log|\cos x|}\left[c+\int (\sin x)\,e^{-\log|\cos x|}\,dx\right]$$

$$=|\cos x|\left(c+\int \frac{\sin x}{|\cos x|}\,dx\right) = |\cos x|\,(c-\log|\cos x|)\,.$$

Οι λύσεις λοιπόν της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ' τον τύπο

$$y = |\cos x|\,(c-\log|\cos x|)\quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$xy'-2y=-x^2,\quad y(1)=0.$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$y'-\frac{2}{x}y=-x$$

και είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Οι λύσεις της είναι

$$y=e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\left[c+\int (-x)\,e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\,dx\right]=e^{\log x^2}\left(c-\int xe^{-\log x^2}dx\right)=x^2\left(c-\int \frac{1}{x}\,dx\right),$$

δηλαδή

$$y=x^2(c-\log|x|)\quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Για τη λύση y που πληροί την αρχική συνθήκη $y(1)=0$ θα είναι $0 = 1^2(c-\log 1)$, δηλαδή $c=0$. Ακόμα, γι' αυτή τη λύση θα περιορισθούμε στο διάστημα $(0,\infty)$. Έτσι, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y=-x^2\log x.$$

1.2. Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli είναι της μορφής

(E) $$y'+a(x)y=b(x)y^r,$$

όπου a και b είναι συνεχείς συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής x (σ'ένα διάστημα) και r είναι ένας πραγματικός αριθμός με $r\neq 0$, $r\neq 1$. Ο λόγος για τους περιορισμούς $r\neq 0$ και $r\neq 1$ είναι ότι για $r=0$ ή $r=1$ η (E) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Η αντικατάσταση $z=y^{1-r}$ μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση Bernoulli (E) σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Πραγματικά: Για $z=y^{1-r}$ έχουμε $z'=(1-r)y^{-r}y'$. Η (E) όμως γράφεται

$$y^{-r}y'+a(x)y^{1-r}=b(x)$$

και έτσι αυτή γίνεται

$$\frac{1}{1-r}z'+a(x)z=b(x)$$

ή

$$z'+(1-r)a(x)z=(1-r)b(x).$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x-2)y'+y=7(x-2)^3y^{1/2}.$$

Ιδιαίτερα, να βρεθεί η μη μηδενική λύση y_0 αυτής που πληροί την αρχική συνθήκη $y_0(3)=0$.

Λύση. Η διαφορική αυτή εξίσωση γράφεται

$$y'+\frac{1}{x-2}y=7(x-2)^2y^{1/2}$$

και είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r=1/2$. Αυτή έχει τη μηδενική λύση $y=0$. Για να βρούμε τις άλλες λύσεις τη γράφουμε

$$y^{-1/2}y'+\frac{1}{x-2}y^{1/2}=7(x-2)^2$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $y^{1/2}=z$, οπότε $\frac{1}{2}y^{-1/2}y'=z'$. Έτσι, η εξίσωσή μας γίνεται

$$z'+\frac{1}{2(x-2)}z=\frac{7}{2}(x-2)^2.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και οι λύσεις της είναι

$$z = e^{-\int\frac{dx}{2(x-2)}}\left[c+\int\frac{7}{2}(x-2)^2 e^{\int\frac{dx}{2(x-2)}}dx\right] = |x-2|^{-1/2}(c+|x-2|^{7/2}),$$

δηλαδή

$$z = c|x-2|^{-1/2}+|x-2|^3 \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

'Ετσι, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσής μας θα δίνονται απ'τους τύπους

$$y = 0 \text{ και } y = (c|x-2|^{-1/2}+|x-2|^3)^2 \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Ειδικά, για τη λύση $y_0 \neq 0$ που πληροί την αρχική συνθήκη $y_0(3)=0$ θα περιορισθούμε στο διάστημα $(2,\infty)$ και επιπλέον θα έχουμε $0=(c+1)^2$, δηλαδή $c=-1$. 'Αρα

$$y_0 = [-(x-2)^{-1/2}+(x-2)^3]^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2y}\ ; \quad y(-1) = 2.$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r=-1$. Γράφουμε την εξίσωση ως εξής

$$yy' - \frac{1}{x}y^2 = -\frac{1}{2}$$

και θέτουμε $y^2=z$. Τότε $2yy'=z'$ και η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται στη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$z' - \frac{2}{x}z = -1.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τις λύσεις

$$z = e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[c+\int(-1)e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx\right] = x^2\left(c+\frac{1}{x}\right) = cx^2+x,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. 'Ετσι, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ'τους τύπους

$$y = \pm\sqrt{cx^2+x} \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Για τη λύση y με $y(-1)=2$ έχουμε $2=\sqrt{c(-1)^2+(-1)}$, δηλαδή $c=5$. Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = \sqrt{5x^2+x}.$$

1.3. Διαφορικές εξισώσεις Riccati

Μια διαφορική εξίσωση Riccati είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\text{(E)} \qquad y'+a(x)y+b(x)y^2+d(x)=0,$$

όπου a,b και d είναι γνωστές συνεχείς συναρτήσεις του x (σ'ένα διάστημα) και $d\neq 0$ (αν $d=0$, τότε η (E) είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $r=2$). Δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων Riccati. Αν όμως είναι γνωστή μια (μερική) λύση μιας διαφορικής εξίσωσης Riccati, τότε μ'ένα κατάλληλο μετασχηματισμό αυτή μετατρέπεται σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Πιο συγκεκριμένα:

Αν y_1 είναι μια (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης Riccati (E), τότε η αντικατάσταση $z=\frac{1}{y-y_1}$ μετασχηματίζει την (E) σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Πραγματικά: Είναι $y=y_1+\frac{1}{z}$ και $y'=y_1'-\frac{1}{z^2}z'$ και έτσι η (E) γίνεται

$$y_1'-\frac{1}{z^2}z'+a(x)\left(y_1+\frac{1}{z}\right)+b(x)\left(y_1+\frac{1}{z}\right)^2+d(x)=0$$

ή

$$[y_1'+a(x)y_1+b(x)y_1^2+d(x)]-\frac{1}{z^2}\{z'-[a(x)+2y_1b(x)]z-b(x)\}=0$$

ή ακόμα (αφού η y_1 είναι μια λύση της (E))

$$z'-[a(x)+2y_1b(x)]z=b(x).$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'-\frac{1}{x}y-x^3y^2+x^5=0,$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι $y_1=x$ είναι μια λύση της.

Λύση. Η εξίσωση αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση Riccati. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $y_1=x$ είναι μια λύση της. Θέτουμε, στη συνέχεια, $y=y_1+\frac{1}{z}=x+\frac{1}{z}$. Τότε $y'=1-\frac{1}{z^2}z'$ και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$1-\frac{1}{z^2}z'-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{z}\right)-x^3\left(x+\frac{1}{z}\right)^2+x^5=0$$

ή (μετά από πράξεις)

$$z'+\left(2x^4+\frac{1}{x}\right)z=-x^3.$$

Οι λύσεις της παραπάνω γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$z=\frac{c}{|x|}\,e^{-(2/5)x^5}-\frac{2}{x},$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ' τους τύπους

$$y=x \text{ και } y=x+1\Big/\left[\frac{c}{|x|}\,e^{-(2/5)x^5}-\frac{2}{x}\right] \text{ (c αυθαίρετη σταθερά).}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'-y+e^{-x}y^2-e^x=0,$$

αφού πρώτα βρεθεί μια λύση αυτής y_1 της μορφής $y_1=ke^{\lambda x}$ (k,λ σταθερές). Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί την αρχική συνθήκη $y_0(0)=1/3$.

<u>Λύση</u>. Η συνάρτηση $y_1=ke^{\lambda x}$ θα είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης αν και μόνο αν

$$k\lambda e^{\lambda x}-ke^{\lambda x}+e^{-x}k^2e^{2\lambda x}-e^x=0$$

ή

$$k(\lambda-1)e^{\lambda x}+[k^2e^{2(\lambda-1)x}-1]e^x=0.$$

Για λ = 1 και k = 1 είναι φανερό ότι η τελευταία ισότητα αληθεύει για όλα τα x. Έτσι, έχουμε τη μερική λύση $y_1=e^x$. Τώρα, θέτουμε $y=y_1+\frac{1}{z}=e^x+\frac{1}{z}$, οπότε $y'=e^x-\frac{1}{z^2}z'$ και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$e^x-\frac{1}{z^2}z'-e^x-\frac{1}{z}+e^{-x}\left(e^x+\frac{1}{z}\right)^2-e^x=0$$

ή

$$z'-z=e^{-x}.$$

Οι λύσεις αυτής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$z=ce^x-\frac{1}{2}e^{-x},$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Επομένως, οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνονται απ' τους τύπους

$$y=e^x \text{ και } y=e^x+\frac{2}{2ce^x-e^{-x}} \text{ (c αυθαίρετη σταθερά).}$$

Για την λύση y_0 θα είναι $1/3 = 1+2/(2c-1)$ και άρα $c=-1$. Επομένως,

$$y_0 = e^x - 2/(2e^x - e^{-x}).$$

1.4. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y'-y=2e^x$.

(ii) $xy'-y=x^2e^x$.

(iii) $(3x^2+1)y'-2xy=6x$.

(iv) $x(x+1)y'+(2x+1)y=x^2-1$.

(v) $y'+\frac{1}{\sin x}y=\operatorname{tg} x$.

(vi) $(1+x^2)y'+xy=x$.

(vii) $y'+y\cos x=0$.

(viii) $y'+y\sqrt{x}\sin x=0$.

2. Να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y'+\sqrt{1+x^2}\,y=0$, $y(0)=\sqrt{5}$.

(ii) $y'+e^{-x}\sqrt{1+x^2}\,y=0$, $y(0)=0$.

(iii) $y'+y=\frac{1}{1+x^2}$, $y(1)=2$.

(iv) $(1+x^2)y'+4xy=x$, $y(1)=\frac{1}{4}$.

(v) $y'+\frac{1}{\sqrt{x}}y=e^{\sqrt{x}/2}$, $y(1)=-1$.

3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$y'+y=g(x)$, $y(0)=0$ με: $g(x)=2$ για $x\in[0,1]$, $g(x)=0$ για $x>1$.

4. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $xy'+y=-2x^2y^2$.

(ii) $xy'-\frac{y}{2\log x}=y^2$.

(iii) $2xy'+y=2x^2y^{-3}$.

(iv) $xy'+y=(xy)^{3/2}$.

5. Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, αφού πρώτα βρεθεί για καθεμιά απ'αυτές μια μερική λύση y_1 της μορφής που σημειώνεται:

(i) $y'-xy^2-(1/x)y+x^3=0$, $y_1=\alpha x+\beta$ (α,β σταθερές).

(ii) $y'+y^2=1+x^2$, $y_1=\alpha x$ (α σταθερά).

(iii) $y'-y+e^{-x}y^2=4e^x$, $y_1=ke^{\lambda x}$ (k,λ σταθερές).

6. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $(x-1)y'-3y=(x-1)^5,\ y(-1)=16.$

(ii) $y'-xy+(x^2-1)e^{(1/2)x^2},\ y(0)=0.$

(iii) $y'+xy=y^3e^{x^2},\ y(0)=1/2.$

(iv) $2x^3y'=y(y^2+3x^2),\ y(1)=1.$

(v) $y'=4y+2e^x\sqrt{y},\ y(0)=-1.$

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Το Εδάφιο αυτό αναφέρεται στις διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών καθώς επίσης και στις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες με κατάλληλο μετασχηματισμό ανάγονται σε εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών. Για καθεμιά απ'τις δύο αυτές κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων δίνεται η μέθοδος επίλυσης, για την καλύτερη κατανόηση της οποίας παρατίθενται παραδείγματα. Επίσης, προτείνονται για λύση μερικές ασκήσεις.

2.1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

(E) $$y'=\frac{P(x)}{Q(y)},$$

όπου P είναι μια συνεχής συνάρτηση του x και Q είναι μια συνεχής συνάρτηση του y. Η (E) γράφεται στη μορφή

(E)' $$Q(y)\,dy=P(x)\,dx$$

και επομένως οι λύσεις της δίνονται απ'τον τύπο

$$\int Q(y)\,dy=\int P(x)\,dx+c \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x\,dx-(5y^4+3)\,dy=0.$$

Λύση. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$\int x\,dx=\int (5y^4+3)\,dy+c$$

ή

$$\frac{x^2}{2}=y^5+3y+c$$

ή ακόμα

$$y^5+3y-\frac{x^2}{2}+c=0 \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2x(y^2+y)\,dx+(x^2-1)y\,dy=0.$$

<u>Λύση</u>. Η διαφορική εξίσωση αυτή έχει τις λύσεις $y=0$, $y=-1$. Για να βρούμε τις άλλες λύσεις της τη γράφουμε στη μορφή

$$\frac{2x}{x^2-1}\,dx=-\frac{1}{y+1}\,dy,$$

οπότε έχουμε

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx=-\int \frac{1}{y+1}\,dy+c,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, είναι

$$\log|x^2-1|=-\log|y+1|+c$$

ή

$$(x^2-1)(y+1)=\pm e^c.$$

Θέτουμε λοιπόν $\pm e^c=C$ (είναι φανερό ότι $C\neq 0$) και επιλύουμε την παραπάνω σχέση ως προς y, οπότε παίρνουμε

$$y=-1+\frac{C}{x^2-1}.$$

Για $C=0$ ο τύπος αυτός δίνει τη λύση $y=-1$. Έτσι, όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης δίνονται απ'τους τύπους

$$y=0 \text{ και } y=-1+\frac{C}{x^2-1} \quad (C \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(y^2-1)\,dx+y(x-1)\,dy=0,\quad y(0)=-2.$$

<u>Λύση</u>. Η εξίσωση έχει τις λύσεις $y=1$, $y=-1$ που δεν μας ενδιαφέρουν εδώ γιατί καμμιά απ'αυτές δεν πληροί την αρχική συνθήκη. Γράφουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή

$$\frac{1}{x-1}\,dx=-\frac{y}{y^2-1}\,dy$$

και παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x-1} = -\int \frac{y\,dy}{y^2-1} + c$$

ή

$$\log|x-1| = -\frac{1}{2}\log|y^2-1| + c$$

ή ακόμα

$$(x-1)^2(y^2-1) = \pm e^{2c},$$

δηλαδή

$$y = \pm\sqrt{1 + \frac{C}{(x-1)^2}},$$

όπου $C = \pm e^{2c} \neq 0$. Για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών θα έχουμε $-2 = -\sqrt{1+C}$, δηλαδή $C = 3$. Άρα, η ζητούμενη λύση είναι

$$y = -\sqrt{1 + \frac{3}{(x-1)^2}}.$$

2.2. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι είναι <u>ομογενής βαθμού</u> n αν και μόνο αν $f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n f(x,y)$. Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της μορφής

$$\text{(E)} \qquad y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)},$$

όπου οι συναρτήσεις g και h είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού, λέμε ότι είναι μια <u>ομογενής διαφορική εξίσωση</u>.

Αν θέσουμε $z = y/x$, τότε η ομογενής διαφορική εξίσωση (E) γίνεται

$$(xz)' = \frac{g(x,xz)}{h(x,xz)} \quad \text{ή} \quad xz' + z = \frac{x^n g(1,z)}{x^n h(1,z)}$$

ή ακόμα

$$xz' = \frac{g(1,z)}{h(1,z)} - z,$$

όπου n είναι ο βαθμός ομογένειας των g και h. Η τελευταία διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών. Έχουμε λοιπόν το συμπέρασμα:

<u>Η αντικατάσταση</u> $z = y/x$ <u>μετασχηματίζει την ομογενή διαφορική εξίσωση</u> (E) <u>σε μια διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών</u>.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}.$$

Λύση. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση. Θέτουμε λοιπόν $y=xz$, οπότε $y'=xz'+z$ και η εξίσωση γίνεται

$$xz'+z = \frac{1+z^3}{z^2}$$

ή

$$z^2z' = \frac{1}{x}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και δίνει

$$z^3 = 3\log|x|+c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$y = x(3\log|x|+c)^{1/3} \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2+y^2)dx+2xy\,dy = 0, \quad y(1) = -1.$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση γράφεται ως εξής

$$y' = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

και έτσι είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση. Η αντικατάσταση $y=xz$ τη μετασχηματίζει στην εξίσωση

$$xz' = -\frac{1+3z^2}{2z},$$

η οποία γράφεται

$$\frac{2z}{1+3z^2}dz+\frac{1}{x}dx = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών και οι λύσεις της δίνονται απ'τον τύπο

$$(1+3z^2)x^3 = c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά με $c\neq 0$. Έτσι, οι λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = \pm\sqrt{\frac{c-x^3}{3x}} \quad (c\neq 0 \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών προκύπτει απ'τον παραπάνω τύπο με το − και για την τιμή της σταθεράς c για την οποία $-1=-\sqrt{\frac{c-1}{3}}$, δηλαδή $c=4$. Άρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y=-\sqrt{\frac{4-x^3}{3x}} .$$

2.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $(x^2y+x^2)\,dx+(xy^2-y^2)\,dy=0$.

(ii) $xydx+(1+x^2)\,dy=0$.

(iii) $(y^2-1)x\,dx+(1-x)\,dy=0$.

(iv) $x\cos x\cos y+y'\sin y=0$.

(v) $e^{x+y}\sin x\,dx+(2y+1)e^{-y^2}dy=0$.

(vi) $y'=e^{x-y}$.

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $\cos y\,dx+(1-e^{-x})\sin y\,dy=0$, $y(0)=\pi/4$.

(ii) $(y+x^2y)y'=x$, $y(1)=0$.

(iii) $(xy^2+y^2+x+1)\,dx+(y-1)\,dy=0$, $y(2)=0$.

(iv) $y^4dx+3x^2e^ydy=0$, $y(1)=0$.

3. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $3y\,dx+(7x-y)\,dy=0$.

(ii) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

(iii) $(xe^{y/x}+y)\,dx-x\,dy=0$.

(iv) $(y+\sqrt{x^2-y^2})\,dx-x\,dy=0$.

4. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $x^2dx=(3xy+2y^2)\,dy$, $y(3)=-2$.

(ii) $x\sin(y/x)\,dy=[x+y\sin(y/x)]\,dx$, $y(1)=0$.

(iii) $y'=\sqrt{\frac{x+y}{2x}}$, $y(1)=2$.

(iv) $x\,dy=[1+\log(y/x)]\,y\,dx$, $y(e)=1$.

5. Ν'αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$y'=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1} ,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ είναι σταθερές με $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$, μετασχηματίζεται σε μια ομογενή διαφορική εξίσωση με την αντικατάσταση

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0,$$

όπου x_0, y_0 είναι τέτοια ώστε

$$\alpha x_0+\beta y_0+\gamma = 0,\ \alpha_1 x_0+\beta_1 y_0+\gamma_1 = 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $(x-y+3)dx+(x+2y-3)dy = 0$.

(ii) $(x+y)dx+(2x+2y+3)dy = 0$.

(iii) $2xdx+(x-y+1)dy = 0$.

Επίσης, να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i)′ $yy'+x+2y = 0,\ y(1) = 1$.

(ii)′ $(x-y+1)y' = 2x+y-4,\ y(2) = 2$.

3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΜΕΣΩΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Στο Εδάφιο αυτό θα εξετασθεί μια γενική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων που είναι γνωστές ως διαφορικές εξισώσεις αμέσως ολοκληρώσιμες. Επίσης, θα θεωρηθούν διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης που γίνονται διαφορικές εξισώσεις αμέσως ολοκληρώσιμες με πολλαπλασιασμό των δύο μελών τους με μια κατάλληλη συνάρτηση (ολοκληρωτικό παράγοντα). Θα παρατεθούν μερικά παραδείγματα και θα δοθούν ασκήσεις για λύση.

3.1. Διαφορικές εξισώσεις αμέσως ολοκληρώσιμες

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

(E) $$M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0,$$

όπου M και N είναι γνωστές συναρτήσεις. Θα λέμε ότι η (E) είναι μια <u>διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη</u> αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση $f(x,y)$ τέτοια ώστε

(*) $$df(x,y) = M(x,y)dx+N(x,y)dy.$$

Αν λοιπόν η διαφορική εξίσωση (E) είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη, τότε για κάποια συνάρτηση $f(x,y)$ θα ισχύει η (*) και άρα η (E) θα γράφεται ως εξής

$$df(x,y) = 0,$$

οπότε οι λύσεις αυτής θα δίνονται απ'τον τύπο

$$f(x,y) = c \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Είναι γνωστό (απ'τον Διαφορικό Λογισμό συναρτήσεων περισσοτέρων της μιας μεταβλητών) ότι υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $df = Mdx+Ndy$ αν και μόνο αν:

(C) Οι συναρτήσεις M και N είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παράγωγες σ'ένα απλώς συνεκτικό σύνολο και ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

'Ετσι, η (E) είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (C).

Ας σημειώσουμε ακόμα ότι η (*) ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(e^x+3y)\,dx+(3x+\cos y)\,dy = 0.$$

Λύση. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι της μορφής (E) με $M(x,y) = e^x+3y$, $N(x,y) = 3x+\cos y$. 'Εχουμε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

και άρα η εξίσωσή μας είναι αμέσως ολοκληρώσιμη. Υπάρχει επομένως μια συνάρτηση $f(x,y)$ έτσι ώστε η διαφορική εξίσωση να γίνεται $df = 0$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x+3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = 3x+\cos y.$$

Ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης f με την παραπάνω ιδιότητα μπορεί να γίνει με ένα απ'τους πιο κάτω τρόπους (ας σημειωθεί ότι, αν $df = 0$, τότε για κάθε συνάρτηση της μορφής $f+C$, όπου C είναι μια σταθερά, θα είναι $d(f+C) = 0$):

Τρόπος 1. Είναι

$$f(x,y) = \int (e^x+3y)\,dx+h(y) = e^x+3yx+h(y)$$

για κάποια συνάρτηση $h(y)$. Τότε όμως έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x+h'(y)$$

και άρα

$$3x+h'(y) = 3x+\cos y.$$

Επομένως, $h'(y) = \cos y$ και έτσι μπορούμε να εκλέξουμε $h(y) = \sin y$, οπότε

$$f(x,y) = e^x + 3yx + \sin y .$$

Τρόπος 2. Παίρνουμε

$$f(x,y) = \int (3x+\cos y)\,dy + g(x) = 3xy + \sin y + g(x)$$

για κάποια συνάρτηση $g(x)$, οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y + g'(x) = e^x + 3y,$$

δηλαδή $g'(x) = e^x$. Παίρνουμε $g(x) = e^x$ και βρίσκουμε τότε πάλι την ίδια συνάρτηση f.

Τρόπος 3. Έχουμε

$$f(x,y) = e^x + 3yx + h(y) \quad \text{και} \quad f(x,y) = 3xy + \sin y + g(x)$$

για κάποιες συναρτήσεις $h(y)$ και $g(x)$. Επομένως, $h(y) = \sin y$ και $g(x) = e^x$, γιατί είναι $h(y) - \sin y = g(x) - e^x$. Έτσι, βρίσκουμε πάλι τη συνάρτηση f.

Τέλος, όλες οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ' τον τύπο

$$e^x + 3yx + \sin y = c \quad (c \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(e^{-x} + 2ye^{2x} + 2x\cos y)\,dx + \left(2y - \frac{1}{y} + e^{2x} - x^2 \sin y\right) dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Λύση. Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη γιατί

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-x} + 2ye^{2x} + 2x\cos y) = 2e^{2x} - 2x\sin y = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - \frac{1}{y} + e^{2x} - x^2 \sin y\right).$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x,y)$ με

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x} + 2ye^{2x} + 2x\cos y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{1}{y} + e^{2x} - x^2 \sin y .$$

Τότε

$$f(x,y) = \int (e^{-x} + 2ye^{2x} + 2x\cos y)\,dx + h(y) = -e^{-x} + ye^{2x} + x^2\cos y + h(y)$$

για κάποια συνάρτηση $h(y)$. Έτσι,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} - x^2 \sin y + h'(y) = 2y - \frac{1}{y} + e^{2x} - x^2 \sin y,$$

οπότε

$$h'(y) = 2y - \frac{1}{y} .$$

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $h(y) = y^2 - \log|y|$ και άρα

$$f(x,y) = -e^{-x} + ye^{2x} + x^2\cos y + y^2 - \log|y|.$$

Οι λύσεις λοιπόν της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$-e^{-x} + ye^{2x} + x^2\cos y + y^2 - \log|y| = c,$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά. Για $x=0$ και $y=1$ έχουμε $c=1$ και άρα οι λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών δίνονται απ'τον τύπο

$$-e^{-x} + ye^{2x} + x^2\cos y + y^2 - \log|y| = 1.$$

3.2. Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\text{(E)} \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

όπου M και N είναι γνωστές συναρτήσεις. Είναι δυνατό η (E) να μην είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη, αλλά η διαφορική εξίσωση που προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό και των δύο μελών της με μια (μη μηδενική) συνάρτηση $\rho(x,y)$, δηλαδή η εξίσωση

$$\rho(x,y)M(x,y)\,dx + \rho(x,y)N(x,y)\,dy = 0,$$

να είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη. Μια τέτοια συνάρτηση $\rho(x,y)$ λέμε ότι είναι ένας <u>ολοκληρωτικός παράγοντας</u> της διαφορικής εξίσωσης (E).

Δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την εύρεση ενός ολοκληρωτικού παράγοντα για κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής (E). Σε δύο όμως ειδικές περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της (E). Συγκεκριμένα, ισχύει:

<u>Αν το πηλίκο $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)/N = P$ είναι μια συνάρτηση του x μόνο, τότε η συνάρτηση $\rho(x) = \exp[\int P(x)\,dx]$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της διαφορικής εξίσωσης (E). Ανάλογα, αν $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/M = Q$ είναι μια συνάρτηση του y μόνο, τότε $\rho(y) = \exp[\int Q(y)\,dy]$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (E).</u>

Πραγματικά: Ας υποθέσουμε ότι P είναι μια συνάρτηση μόνο του x και ας θέσουμε $\rho(x) = \exp[\int P(x)\,dx]$. Τότε για τη διαφορική εξίσωση

$$\rho M dx + \rho N dy = 0$$

έχουμε

$$\frac{\partial(\rho M)}{\partial y} = \rho\,\frac{\partial M}{\partial y}$$

και

$$\frac{\partial(\rho N)}{\partial x}=\frac{d\rho}{dx}N+\rho\frac{\partial N}{\partial x}=P\rho N+\rho\frac{\partial N}{\partial x}=\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\rho\frac{\partial N}{\partial x}=\rho\frac{\partial M}{\partial y},$$

δηλαδή

$$\frac{\partial(\rho M)}{\partial y}=\frac{\partial(\rho N)}{\partial x}.$$

Αυτό φανερώνει ότι η εξίσωση $\rho M dx+\rho N dy=0$ είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη και άρα ρ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (E). Ανάλογα, αποδεικνύεται και το δεύτερο μέρος του συμπεράσματός μας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)dx+(y+e^x)dy=0.$$

Λύση. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι της μορφής (E) με $M(x,y)=\frac{y^2}{2}+2ye^x$ και $N(x,y)=y+e^x$. Δεν είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη, αφού

$$\frac{\partial M}{\partial y}=y+2e^x\neq e^x=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=1$$

και επομένως $\rho(x)=e^x$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση

$$e^x\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)dx+e^x(y+e^x)dy=0$$

ή

$$\left(\frac{y^2}{2}e^x+2ye^{2x}\right)dx+(ye^x+e^{2x})dy=0$$

είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη. Για την εξίσωση αυτή υπάρχει μία συνάρτηση $f(x,y)$ έτσι ώστε αυτή να γράφεται $df=0$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2}{2}e^x+2ye^{2x} \quad\text{και}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=ye^x+e^{2x},$$

οπότε

$$f(x,y)=\int\left(\frac{y^2}{2}e^x+2y\,e^{2x}\right)dx+h(y)=\frac{y^2}{2}e^x+y\,e^{2x}+h(y)$$

για κάποια συνάρτηση $h(y)$. Επομένως

$$\frac{\partial f}{\partial y}=y\,e^x+e^{2x}+h'(y)=y\,e^x+e^{2x},$$

δηλαδή $h'(y)=0$. Εκλέγουμε $h(y)=0$ και έχουμε

$$f(x,y)=\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}.$$

Οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται λοιπόν απ'τον τύπο

$$\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}=c$$

ή

$$y(x)=-e^x\pm\sqrt{e^{2x}+2ce^{-x}},$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας ρ της διαφορικής εξίσωσης

$$(2xy+y^3)dx+(3x^2+xy^2)dy=0$$

της μορφής $\rho(x,y)=x^m y^n$ (όπου m,n είναι ακέραιοι).

Λύση. Η συνάρτηση $\rho(x,y)=x^m y^n$ θα είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της διαφορικής μας εξίσωσης αν και μόνο αν

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^m y^n(2xy+y^3)]=\frac{\partial}{\partial x}[x^m y^n(3x^2+xy^2)]$$

ή

$$2(n+1)x^{m+1}y^n+(n+3)x^m y^{n+2}=3(m+2)x^{m+1}y^n+(m+1)x^m y^{n+2},$$

δηλαδή αν και μόνο αν $2(n+1)=3(m+2)$ και $n+3=m+1$. Οι εξισώσεις αυτές αληθεύουν για $m=-8$ και $n=-10$. Ένας λοιπόν ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\rho(x,y)=x^{-8}y^{-10}.$$

3.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $(x+y\cos x)dx+\sin x\,dy=0$.

(ii) $(3y^2+y\sin 2xy)dx+(6xy+x\sin 2xy+3y^2)dy=0$.

(iii) $(ye^x+2x\cos y)dx+(e^x-x^2\sin y)dy=0$.

(iv) $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\log x-2)dy=0$.

(v) $(\cos 2y-3x^2y^2)dx+(y+e^y-2x\sin 2y-2x^3y)dy=0$.

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $[x(x^2+2y)^{-1/2}+\log(1+y)]dx+[(x^2+2y)^{-1/2}+x(1+y)^{-1}]dy=0,$
$y(-2)=0.$

(ii) $(ye^{xy}+2x)dx+(xe^{xy}-2y)dy=0$, $y(0)=2$.

(iii) $(1+y^2+xy^2)dx+(x^2y+y+2xy)dy=0$, $y(1)=1$.

3. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $xy\,dx+(x^2+y^2+y)dy=0$.

(ii) $(4x^4y^3+1)dx+(3x^5y^2-xy^{-1})dy=0$.

(iii) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$.

4. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$[y^{-3}\cos(x-y)+y]dx+[4x-y^{-3}\cos(x-y)]dy=0$, $y(1)=1$.

5. Ν'αποδειχθεί ότι $\rho(x,y)=1/[2xy(1-xy)]$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της διαφορικής εξίσωσης

$$(xy^2+y)dx+3x^2y\,dy=0.$$

6. Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας ρ της διαφορικής εξίσωσης

$$(4x^{-4}y^2-2x^{-2}y)dx+(3x^{-3}y+x^{-1})dy=0$$

της μορφής $\rho(x,y)=x^my^n$ (m,n ακέραιοι).

7. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x^2+2y^2+x)dx+(x^2+y^2+y)dy=0,$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι $\rho(x,y)=1/(x^2+y^2)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής.

8. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f ώστε η εξίσωση

$$y^2\sin x\,dx+yf(x)dy=0$$

να είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη. Να επιλυθεί η εξίσωση γι'αυτές τις f.

9. Η διαφορική εξίσωση

$$(x^2+y)dx+f(x)dy=0$$

έχει τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\rho(x)=x$. Να βρεθούν όλες οι πιθανές συναρτήσεις f.

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Θα εξετάσουμε εδώ τρείς κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης που ανάγονται με κατάλληλο μετασχηματισμό σε εξισώσεις πρώτης τάξης. Αυτές οι κατηγορίες είναι οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης που δεν περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση ή την ανεξάρτητη μεταβλητή καθώς και οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης για τις οποίες είναι γνωστή μια μη μηδενική λύση των αντίστοιχων ομογενών εξισώσεων. Θα δοθούν παραδείγματα και ασκήσεις για λύση.

4.1. Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μη περιέχουσες την άγνωστη συνάρτηση

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

(E) $$y'' = F(x,y'),$$

όπου F είναι μια γνωστή συνάρτηση, λέμε ότι είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μη περιέχουσα την άγνωστη συνάρτηση.

Ο μετασχηματισμός $y' = z$ μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση (E) στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$z' = F(x,z).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+(y')^2+y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Λύση. Η διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση μη περιέχουσα την άγνωστη συνάρτηση. Έτσι, θέτοντας $y' = z$, αναγόμαστε στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$z'+z^2+z = 0,$$

η οποία είναι μια εξίσωση Bernoulli. Η αντικατάσταση $u = 1/z$ μετασχηματίζει αυτή στη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$u' - u = 1,$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$u = c_1e^x - 1,$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τότε $y' = 1/u$ και άρα έχουμε

$$y = \int \frac{1}{c_1 e^x - 1}\, dx + c_2,$$

όπου c_2 είναι αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, βρίσκουμε ότι οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$y = \log|c_1 - e^{-x}| + c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών θα είναι $0 = \log|c_1 - 1| + c_2$ και $1 = 1/(c_1 - 1)$, δηλαδή $c_1 = 2$ και $c_2 = 0$, και άρα αυτή είναι

$$y = \log|2 - e^{-x}|.$$

4.2. Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μη περιέχουσες την ανεξάρτητη μεταβλητή

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\text{(E)} \qquad y'' = F(y, y'),$$

όπου F είναι μια γνωστή συνάρτηση, είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μη περιέχουσα την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Οι αντικαταστάσεις $y' = z$, $y'' = z\,\frac{dz}{dy}$ μετασχηματίζουν την (E) στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$z\frac{dz}{dy} = F(y, z).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2yy'' = 1 + (y')^2.$$

Λύση. Η εξίσωση αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μη περιέχουσα την ανεξάρτητη μεταβλητή. Έτσι, θέτουμε $y' = z$ και $y'' = z\,\frac{dz}{dy}$, οπότε παίρνουμε την εξίσωση πρώτης τάξης

$$2yz\,\frac{dz}{dy} = 1 + z^2,$$

η οποία γράφεται

$$\frac{2z}{1+z^2}\, dz = \frac{1}{y}\, dy$$

και άρα είναι χωριζομένων μεταβλητών. Οι λύσεις της δίνονται απ' τους τύπους

$$z = \pm\sqrt{c_1 y - 1},$$

όπου $c_1 \neq 0$ είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Για την αρχική εξίσωση έχουμε

$$y' = \pm\sqrt{c_1 y-1}$$

και τελικά βρίσκουμε ότι οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$y=\frac{1}{c_1}+\frac{c_1}{4}(x+c_2)^2 \quad (c_1\neq 0, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

4.3. Υποβιβασμός της τάξης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\text{(E)} \qquad y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q(x),$$

όπου p_1, p_2 και q είναι συνεχείς συναρτήσεις του x (σ'ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας), λέμε ότι είναι μια <u>γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης</u>. Αν $q\neq 0$, λέμε ότι η (E) είναι <u>μη ομογενής</u>. Για $q=0$ η (E) γίνεται

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

και τότε λέγεται <u>ομογενής</u>. Ακόμα, λέμε ότι η (E_0) είναι η <u>αντίστοιχη</u> ομογενής εξίσωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E).

<u>Αν $y_1\neq 0$ είναι μια (μερική) λύση της (E_0), τότε οι αντικαταστάσεις $z=y/y_1$ και $u=z'$ μετασχηματίζουν τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (E) σε μια γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης.</u>

Πραγματικά: Θέτουμε $y=y_1z$, οπότε $y'=y_1z'+y_1'z$ και $y''=y_1z''+2y_1'z'+y_1''z$ και η (E) γίνεται

$$y_1z''+2y_1'z'+y_1''z+p_1(x)(y_1z'+y_1'z)+p_2(x)y_1z=q(x)$$

ή

$$y_1\left\{z''+\left[\frac{2y_1'}{y_1}+p_1(x)\right]z'\right\}+[y_1''+p_1(x)y_1'+p_2(x)y_1]z=q(x).$$

Επειδή όμως y_1 είναι μια μη μηδενική λύση της (E_0), η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$z''+\left[\frac{2y_1'}{y_1}+p_1(x)\right]z'=q(x)/y_1$$

και για $u=z'$ γίνεται

$$u'+\left[\frac{2y_1'}{y_1}+p_1(x)\right]u=q(x)/y_1.$$

Αυτή η εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-3y'+2y=e^{2x};\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι $y_1=e^x$ είναι μια μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

Λύση. Η εξίσωσή μας είναι μια (μη ομογενής) γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Εύκολα διαπιστώνεται ότι $y_1=e^x$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Έτσι, θέτουμε $y=y_1z=$ $=e^xz$ και παίρνουμε $y'=e^x(z'+z)$ και $y''=e^x(z''+2z'+z)$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$z''-z'=e^x.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $z'=u$, καταλήγουμε στη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$u'-u=e^x,$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$u=e^x(c_1+x),$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τότε έχουμε

$$z=\int e^x(c_1+x)\,dx+C_2=(C_1+x)e^x+C_2,$$

όπου $C_1=c_1+1$ και C_2 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι, οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ' τον τύπο

$$y=e^{2x}(C_1+x)+C_2e^x\quad (C_1,C_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές}).$$

Για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών βρίσκουμε $C_1=-2$ και $C_2=$ $=3$ και επομένως αυτή είναι

$$y=e^{2x}(-2+x)+3e^x.$$

4.4. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $xy''=y'+x^2$. (iii) $xy''-\frac{1}{4}y'+x(y')^2=0$.

(ii) $(1+x^2)^2y''+(y')^2+1=0$. (iv) $xy''=y'\log\frac{y'}{x}$.

2. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $yy''-(y')^2=y^2y'$. (iii) $y(1-\log y)y''+(1+\log y)(y')^2=0$.

(ii) $yy''-yy'\log y=(y')^2$. (iv) $y''=2yy'$.

3. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $xy''+x(y')^2-y'=0;\ y(2)=2,\ y'(2)=1.$

(ii) $2y''=3y^2;\ y(-2)=1,\ y'(-2)=-1.$

(iii) $2(y')^3=y''(y+1);\ y(1)=2,\ y'(1)=-1.$

(iv) $xy'y''=(y')^2+x^3;\ y(2)=0,\ y'(2)=4.$

4. Να επιλυθεί καθεμιά απ'τις παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, αφού πρώτα αποδειχθεί ότι η σημειούμενη συνάρτηση y_1 είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:

(i) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\ x\in(-1,1);\ y_1=x.$

(ii) $y''+\frac{2}{x}y'+\frac{9}{x^4}y=x,\ x>0;\ y_1=\cos\frac{3}{x}.$

(iii) $x^4y''+2x^3y'-y=0,\ x>0;\ y_1=e^{1/x}.$

(iv) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0,\ x>0;\ y_1=x^{-1/2}\sin x.$

(v) $y''+3y'+2y=xe^x;\ y_1=e^{-x}.$

5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'+by=\sin(ax),$$

όπου a και b είναι μη μηδενικές σταθερές. Να επιλυθεί η εξίσωση αυτή. Αν $b>0$ και y είναι μια λύση της υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$;

2. Μπορεί να βρεθούν συναρτήσεις $f(x)$ και $g(y)$ έτσι ώστε η εξίσωση

$$g(y)\sin x\,dx+y^2f(x)\,dy=0$$

να είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη;

3. Να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις $g(y)$ για να είναι η εξίσωση

$$g(y)e^y dx+xy\,dy=0$$

μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη.

4. Για ποιές τιμές των a,b,c και d η διαφορική εξίσωση

$$(3x^a y^b - x^c y^d)\,dx + (2x^2 y^{-1} - x^{-3} y)\,dy = 0$$

έχει ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\rho(x,y) = x^m y^n$ (m,n ακέραιοι).

5. Με την αντικατάσταση $z = \log y$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy' - y \log y = x^2 y.$$

6. Να διαπιστωθεί ότι $y_1 = x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$-2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = 0$$

και, στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με $y(1) = 2$.

7. Για καθεμιά απ'τις παρακάτω εξισώσεις να βρεθεί η σταθερά A ώστε να είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη και να επιλυθεί η εξίσωση που προκύπτει:

(i) $(Ax^2y + 2y^2)\,dx + (x^3 + 4xy)\,dy = 0.$

(ii) $(x^2 + 3xy)\,dx + (Ax^2 + 4y)\,dy = 0.$

(iii) $(Ayx^{-3} + yx^{-2})\,dx + (x^{-2} - x^{-1})\,dy = 0.$

8. Για τη διαφορική εξίσωση

$$[y + x(x^2+y^2)^2]\,dx + [y(x^2+y^2)^2 - x]\,dy = 0$$

να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x,y) = (x^2+y^2)^m$ όπου m είναι ακέραιος.

9. Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$ay' + by = ke^{-\lambda x},$$

όπου a, b και k είναι θετικές σταθερές και λ είναι μια μη αρνητική σταθερά. Ας είναι y μια λύση αυτής. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Αν $\lambda = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = k/b$. (ii) Αν $\lambda > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$.

10. Να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών με τις σημειούμενες αντικαταστάσεις:

(i) $\cos y \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\sin y = 1$, $y(1) = 0$; $\sin y = z$.

(ii) $(y+1)\dfrac{dy}{dx} + x(y^2+2y) = x$, $y(0) = 1$; $y^2 + 2y = z$.

11. Να βρεθεί η λύση y του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = ay - by^2, \quad y(0) = c,$$

όπου a, b και c είναι σταθερές με $a > 0$, $b > 0$ και $c \geq 0$. Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = a/b$ για $c > 0$, ενώ $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$ για $c = 0$.

12. Με τον μετασχηματισμό $x^2 + y^2 = z$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2yy' = e^{(x^2+y^2)/x} + (x^2+y^2)/x - 2x.$$

13. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$1 + x^2y^2 + y + xy' = 0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\rho(x,y) = 1/(1+x^ny^n)$, όπου n ακέραιος.

14. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2(y')^2 = (y-1)y''; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$$

15. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$yy' + x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 x^{-2} + (x^2+y^2)x^{-1}, \quad y(1) = 1.$$

16. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$q(x)y' = yq'(x) - y^2, \quad y(0) = 1,$$

όπου q είναι μια θετική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $q(0) = 1$.

17. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $\dfrac{3-y}{x^2}\,dx + \dfrac{y^2-2x}{xy^2}\,dy = 0; \quad y(-1) = 2.$

(ii) $[x(1+y) - x^2]y' = (1+y)^2; \quad y(1) = 1.$

18. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x,y) = x\varphi(y)$.

19. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2xyy'+(1+x)y^2=e^x.$$

20. Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση f(x), $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x)+1=\int_0^x f(t)[tf(t)-1]dt.$$

21. Με την αλλαγή $y=ue^{mx}$ (όπου m κατάλληλη σταθερά), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1+y^2e^{2x})y'+y=0.$$

22. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $xe^y y'-e^y=3x^2$. (iii) $y'-\frac{1}{x+1}y\log y=(x+1)y$.

(ii) $\frac{1}{y^2+1}y'+\frac{2}{x}\operatorname{Artg} y=\frac{2}{x}$. (iv) $xy'+y+x^2y^2e^x=0$.

23. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $(y'-x)y''=y'$. (ii) $y^3y''=2(y')^2$.

24. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$(3y+4xy^2)dx+(4x+5x^2y)dy=0,$$

$$(6y+x^2y^2)dx+(8x+x^3y)dy=0$$

με το δεδομένο ότι έχουν ένα κοινό ολοκληρωτικό παράγοντα.

25. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$3(x^2+xy^2+2y^3)y'+5x^2+2xy+3y^3=0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\rho(x,y)=(x+y)^m$ (m ακέραιος).

26. Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$x^2y'+2xy=1,\quad x>0.$$

Ν'αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο μηδέν για $x\to\infty$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με $y(2)=2y(1)$.

27. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'+2y=q(x),$$

όπου

$$q(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

28. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y'+3y = e^{ix}$. (ii) $y'+iy = x$.

29. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε λύση y της διαφορικής εξίσωσης

$$y'+y\cos x = e^{-\sin x}$$

είναι

$$y(k\pi)-y(0) = \pi k \quad (k \text{ ακέραιος}).$$

30. Ν'αποδειχθεί ότι, για τυχούσες σταθερές c_1, c_2 και c_3, η συνάρτηση

$$y(x) = \begin{cases} c_1(x^2-1)^2, & \text{για } x < -1 \\ c_2(x^2-1)^2, & \text{για } -1 \leq x \leq 1 \\ c_3(x^2-1)^2, & \text{για } x > 1 \end{cases}$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(x^2-1)y'-4xy = 0.$$

31. Ν'αποδειχθεί ότι, αν $\rho(x,y)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της διαφορικής εξίσωσης

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy = 0,$$

τότε ισχύει

$$M\frac{\partial\rho}{\partial y} - N\frac{\partial\rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\rho = 0.$$

32. Ν'αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τιμές της σταθεράς c για τις οποίες η συνάρτηση $y = c-x^2$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = (x^2+y+1)\left(x^2+y-\frac{3}{2}\right)+1-2x.$$

Να βρεθούν οι τιμές αυτές και να επιλυθεί η εξίσωση με χρησιμοποίηση καθεμιάς των μερικών λύσεων που ορίζονται γι'αυτές τις τιμές. Είναι οι δύο γενικές λύσεις ισοδύναμες;

33. Να βρεθούν οι τιμές του n ώστε η

$$(x^2+y^2)^n(xy^2dx-x^2y\ dy)=0$$

να είναι μια διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη.

34. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y+\alpha)\ \frac{dx}{dy}-4x=(y+\alpha)^6x^3 \quad (\alpha \text{ σταθερά}).$$

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Το Κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στη μελέτη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (αυθαίρετης τάξης). Στο Εδάφιο 0 δίνεται η έννοια της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, διατυπώνεται το θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου των λύσεων και δίνονται μερικά συμπεράσματα απ'τη Γραμμική 'Αλγεβρα που χρειάζονται στα επόμενα Εδάφια. Οι ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μελετώνται στο Εδάφιο 1, ενώ το Εδάφιο 2 αφορά τις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Η ειδική περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές εξετάζεται στο Εδάφιο 3. Στο Εδάφιο 4 μελετώνται η συζυγής διαφορική εξίσωση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης και οι αυτοσυζυγείς ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Το Εδάφιο 5 αποτελεί μια εισαγωγή στη Θεωρία του Sturm και στα προβλήματα ιδιοτιμών για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Σε καθένα απ'τα Εδάφια 1-5 δίνονται παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση. Τέλος, το Εδάφιο 6 είναι μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Στο προκαταρκτικό αυτό Εδάφιο θα δώσουμε την έννοια της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, θα διατυπώσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και θα παραθέσουμε μερικά συμπεράσματα απ'τη Γραμμική 'Αλγεβρα (σχετικά με τις ορίζουσες, τα γραμμικά συστήματα και τα πολυώνυμα) που τα χρειαζόμαστε στη μελέτη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

0.1. Η έννοια της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Ύπαρξη και μονοσήμαντο των λύσεων

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$(E) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b,$$

όπου a_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ και b είναι συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σ'ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και $a_n(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Οι συναρτήσεις a_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ καλούνται συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (E) και το I καλείται διάστημα ορισμού της (E). Αν $b=0$ (για μια συνάρτηση f ορισμένη στο I γράφουμε $f=0$ αν και μόνο αν $f(x)=0$ για όλα τα $x \in I$, και $f \neq 0$ διαφορετικά, δηλαδή όταν $f(x) \neq 0$ για κάποιο $x \in I$), τότε η (E) γίνεται

$$(E_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Η διαφορική εξίσωση (E_0) λέμε ότι είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση. Για $b \neq 0$ λέμε ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση (E) είναι μη ομογενής· στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμα ότι η (E_0) είναι η αντίστοιχη ομογενής της (E). Όταν οι συντελεστές a_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ είναι σταθερές (συναρτήσεις), η (E) καλείται γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Θέτοντας $A_i = a_i/a_n$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ και $B=b/a_n$, παίρνουμε την παρακάτω μορφή για τη διαφορική εξίσωση (E)

$$y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B.$$

Ο τύπος

$$L(\varphi) = a_n \varphi^{(n)} + a_{n-1} \varphi^{(n-1)} + \dots + a_1 \varphi' + a_0 \varphi$$

ορίζει ένα τελεστή L, ο οποίος απεικονίζει κάθε συνάρτηση φ που είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο I σε μια συνάρτηση $L(\varphi)$ ορισμένη στο I. Ο τελεστής L είναι γραμμικός, γιατί για τυχούσες συναρτήσεις φ_1, φ_2 στο πεδίο ορισμού του L και για οποιουσδήποτε αριθμούς c_1, c_2 είναι

$$L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \sum_{i=0}^{n} a_i (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i (c_1\varphi_1^{(i)} + c_2\varphi_2^{(i)})$$

$$=c_1 \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_1^{(i)} + c_2 \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_2^{(i)} = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2).$$

Με τη χρησιμοποίηση του τελεστή L, η διαφορική εξίσωση (Ε) γράφεται $L(y) = b$. Ο χαρακτηρισμός "γραμμική" για την (Ε) προέρχεται απ' το γεγονός ότι ο (n-τάξης διαφορικός) τελεστής L είναι γραμμικός.

Ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $k \in \{1,\dots,n-1,n\}$, η συνάρτηση a_k έχει συνεχή παράγωγο k-τάξης στο διάστημα I. Τότε ορίζεται ένας τελεστής L^* με τον τύπο

$$L^*(\varphi) = (-1)^n(\bar{a}_n\varphi)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\bar{a}_{n-1}\varphi)^{(n-1)} + \dots - (\bar{a}_1\varphi)' + \bar{a}_0\varphi,$$

ο οποίος απεικονίζει κάθε συνάρτηση φ που έχει n-τάξης παράγωγο στο I στη συνάρτηση $L^*(\varphi)$ ορισμένη στο I. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο L^* είναι επίσης γραμμικός. Ο τελεστής L^* λέμε ότι είναι ο <u>συζυγής</u> τελεστής του L. Λέμε ακόμα ότι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης

$$(E_0^*) \qquad (-1)^n(\bar{a}_n y)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\bar{a}_{n-1}y)^{(n-1)} + \dots - (\bar{a}_1 y)' + \bar{a}_0 y = 0$$

είναι η <u>συζυγής</u> διαφορική εξίσωση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Τέλος, λέμε ότι η (E_0) είναι μια <u>αυτοσυζυγής</u> ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση αν και μόνο αν συμπίπτει με τη συζυγή της διαφορική εξίσωση.

Το παρακάτω Θεώρημα αναφέρεται στην ύπαρξη και στο μονοσήμαντο των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Η απόδειξη αυτού δίνεται στο Κεφάλαιο I.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του I και $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ είναι σταθερές, τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Ε), η οποία είναι ορισμένη σ'ολόκληρο το διάστημα I και πληροί τις αρχικές συνθήκες</u>

$$y(x_0) = c_0,\ y'(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}.$$

Ας τονίσουμε ότι στο παραπάνω θεώρημα δεν μπαίνει καμμιά υπόθεση πέρα απ'αυτή της συνέχειας των συναρτήσεων a_i $(i = 0,1,\dots$ $\dots,n-1,n)$ και b. Ας τονίσουμε ακόμα ότι το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει ότι όλες οι λύσεις της (Ε) είναι ορισμένες σ'ολόκληρο το διάστημα I. Επίσης, για την ομογενή γραμμική εξίσωση (E_0) το Θεώρημα 1 εγγυάται ότι, αν μια λύση y πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ (για κάποιο $x_0 \in I$), αυτή θα είναι αναγκαστικά η <u>μηδενική λύση</u>: $y(x) = 0,\ x \in I$.

0.2. Ορίζουσες. Γραμμικά συστήματα. Πολυώνυμα

Θεωρούμε γνωστή τη στοιχειώδη θεωρία των οριζουσών. Θ'αναφέρουμε μόνο ένα συμπέρασμα που αφορά την παραγώγιση μιας ορίζουσας--συνάρτησης. Ας είναι φ_{kj} $(k,j=1,\dots,n)$ συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα I. Αν οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο I, τότε και η ορίζουσα-συνάρτηση

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12}\cdots\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\cdots\varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2}\cdots\varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

είναι επίσης παραγωγίσιμη στο I και μάλιστα $D' = D_1+D_2+\dots+D_n$, όπου, για κάθε $k \in \{1,2,\dots,n\}$, D_k είναι η ορίζουσα-συνάρτηση που προκύπτει απ'την D με αντικατάσταση της k-γραμμής της με τη γραμμή $(\varphi'_{k1},\varphi'_{k2},\dots,\varphi'_{kn})$.

Για τα γραμμικά συστήματα ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους έχει ακριβώς μια λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών αυτού Δ είναι διάφορη του μηδενός· σ'αυτή την περίπτωση που η ορίζουσα των συντελεστών Δ είναι διάφορη απ'το μηδέν, η λύση είναι (Κανόνας του Cramer) $\Delta_1/\Delta, \Delta_2/\Delta,\dots,\Delta_n/\Delta$, όπου, για κάθε $k \in \{1,2,\dots,n\}$, Δ_k είναι η ορίζουσα που προκύπτει απ'την Δ αν αντικατασταθεί η k-στήλη της με τη στήλη του δεύτερου μέλους του συστήματος.

(ii) Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών του είναι ίση με μηδέν.

(iii) Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, όπου $m < n$, έχει μη μηδενικές λύσεις.

Απ'το Βασικό Θεώρημα της Άλγεβρας προκύπτει ότι ένα πολυώνυμο με βαθμό $n \geq 1$ έχει ακριβώς n ρίζες, όπου κάθε ρίζα απαριθμείται τόσες φορές όση είναι η πολλαπλότητά της. Αν ένα πολυώνυμο <u>με πραγματικούς συντελεστές</u> έχει μια ρίζα $\sigma+i\tau$ $(\sigma,\tau \in \mathbb{R},\ \tau \neq 0)$ με πολλαπλότητα m, τότε αυτό θα έχει ως ρίζα και τον συζυγή $\sigma-i\tau$ με την ίδια πολλαπλότητα m. Αν λ είναι μια ρίζα ενός πολυώνυμου p με πολλαπλότητα m, τότε η λ θα είναι επίσης ρίζα και των παραγώγων $p',\dots,p^{(m-1)}$ ενώ δεν θα είναι ρίζα του $p^{(m)}$.

1. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στο Εδάφιο αυτό θ'αναπτύξουμε τη βασική θεωρία για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Θα ξεκινήσουμε απ'την πιο απλή περίπτωση, την περίπτωση των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Γι'αυτές τις διαφορικές εξισώσεις θα βρούμε (Θεώρημα 2) ένα τύπο που δίνει όλες τις λύσεις. Στη συνέχεια, θ'ασχοληθούμε με τη γενική περίπτωση μελετώντας την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (E_0) για αυθαίρετο n. Θα εισάγουμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας m συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα I και, όταν αυτές οι συναρτήσεις έχουν (m-1)-τάξης παραγώγους στο I, θα ορίσουμε την έννοια της ορίζουσας Wronski αυτών. Θ'αποδείξουμε (Θεώρημα 4) ότι n λύσεις της (E_0) είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν η ορίζουσα Wronski αυτών δεν μηδενίζεται πουθενά στο I. Για την ορίζουσα Wronski n λύσεων της (E_0) θ'αποδείξουμε και τον τύπο του Liouville (Θεώρημα 5). Έπειτα, κάθε σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της (E_0) θα το ονομάσουμε βασικό σύνολο λύσεων αυτής και θα εξασφαλίσουμε (Θεώρημα 6) ότι υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων καθώς επίσης θ'αποδείξουμε (Θεωρήματα 3 και 7) ότι οι λύσεις της (E_0) είναι ακριβώς οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων ενός βασικού συνόλου λύσεων αυτής. Ακόμα, θα βρούμε (Θεώρημα 8) μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης που να έχει ως ένα βασικό σύνολο λύσεων το $\{y_1,\ldots,y_n\}$, όταν y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι n δεδομένες συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους n-τάξης στο I και ορίζουσα Wronski διάφορη του μηδενός σ'ολόκληρο το διάστημα I. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστή μια λύση της (E_0) που δεν μηδενίζεται πουθενά στο I, θα δώσουμε ένα μετασχηματισμό που ανάγει αυτή σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (n-1)-τάξης. Από ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης που προκύπτει μπορεί να κατασκευασθεί (Θεώρημα 9) ένα βασικό σύνολο λύσεων για την (E_0). Ιδιαίτερα, στην περίπτωση των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης προκύπτει (Θεώρημα 10) ένα βασικό σύνολο λύσεων από μια λύση που δεν μηδενίζεται πουθενά στο I. Τέλος, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα καθώς επίσης και ασκήσεις για λύση.

1.1. Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Για $n=1$ η διαφορική εξίσωση (E_0) γίνεται

$$(E_0)_1 \qquad a_1y'+a_0y=0.$$

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα που έχουν οι ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης είναι ότι μια λύση ή δεν θα μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα I ή θα είναι μηδέν σ'ολόκληρο το I. Αυτό προκύπτει αμέσως απ'το Θεώρημα 1, δεδομένου ότι η $(E_0)_1$ έχει ως λύση τη μηδενική συνάρτηση στο I (μηδενική λύση). Το παρακάτω Θεώρημα δίνει τη λύση στο πρόβλημα της επίλυσης (της εύρεσης όλων των λύσεων) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $(E_0)_1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I. Τότε y είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης $(E_0)_1$ αν και μόνο αν

$$y(x)=y(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt\right],\quad x\in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι y μια συνάρτηση ορισμένη στο I. Αν $y(x_0)=0$ και y είναι μια λύση της $(E_0)_1$, τότε $y(x)=0$ για όλα τα $x\in I$ και ο τύπος πληρούται. Επίσης, αν $y(x_0)=0$ και η y πληροί τον τύπο, τότε πάλι y είναι η μηδενική συνάρτηση στο I και άρα y είναι μια λύση της $(E_0)_1$. Υποθέτουμε, στη συνέχεια, ότι $y(x_0)\neq 0$. Σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις όπου η y είναι μια λύση της $(E_0)_1$ ή η y είναι μια συνάρτηση που πληροί τον παραπάνω τύπο έχουμε $y(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Έτσι, η y είναι μια λύση της $(E_0)_1$ αν και μόνο αν για κάθε $x\in I$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y'(t)}{y(t)}\,dt=-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt$$

ή

$$\log\frac{y(x)}{y(x_0)}=-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt$$

που ισοδυναμεί με τον υπόψη τύπο.

Απ'το Θεώρημα 2 προκύπτει ότι, αν A είναι μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο I και $A' = a_0/a_1$, τότε οι λύσεις της $(E_0)_1$ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $c\exp(-A)$ για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c.

1.2. Γραμμική ανεξαρτησία. Ορίζουσα Wronski

Απ'τη γραμμικότητα του τελεστή L προκύπτει αμέσως το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Αν c_k $(k=1,\ldots,m)$ είναι σταθερές και y_k $(k=1,\ldots,m)$ είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), τότε $c_1y_1+\ldots+c_my_m$ είναι επίσης μια λύση της (E_0).

Ας είναι f_k $(k=1,\ldots,m)$ m συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα I. Λέμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν υπάρχουν αριθμοί c_k $(k=1,\ldots,m)$, όχι όλοι μηδέν, έτσι ώστε

$$c_1f_1+\ldots+c_mf_m = 0.$$

Διαφορετικά, δηλαδή όταν η παραπάνω ισότητα ισχύει μόνο για $c_1=\ldots=c_m=0$, λέμε ότι οι συναρτήσεις f_k $(k=1,\ldots,m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν οι συναρτήσεις f_k $(k=1,\ldots,m)$ έχουν $(m-1)$-τάξης παραγώγους, τότε η ορίζουσα-συνάρτηση

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots f_m \\ f_1' & f_2' & \ldots f_m' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \ldots f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

καλείται ορίζουσα Wronski αυτών και συμβολίζεται με $W(f_1,\ldots,f_m)$. Το Θεώρημα 4 δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη γραμμική ανεξαρτησία n λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (E_0) με τη χρησιμοποίηση της ορίζουσας Wronski αυτών. Πιο συγκεκριμένα, n λύσεις της (E_0) είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν η ορίζουσα Wronski αυτών δεν μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,n)$ n λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$W(y_1,\ldots,y_n)(x) \neq 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι $W(y_1,\ldots,y_n)(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$ και θεωρούμε n σταθερές c_k $(k=1,\ldots,n)$ τέτοιες ώστε $c_1y_1+\ldots$ $\ldots+c_ny_n=0$. Τότε για κάθε $x \in I$ παίρνουμε

$$\begin{cases} c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)=0 \\ c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)+\ldots+c_ny_n'(x)=0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x)+c_2y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x)=0. \end{cases}$$

Για ένα σταθερό $x \in I$ οι παραπάνω ισότητες αποτελούν ένα ομογενές γραμμικό (αλγεβρικό) σύστημα ως προς $c_1,\ldots,c_n$. Η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι διάφορη του μηδενός και επομένως αυτό έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή $c_1=\ldots=c_n=0$. Έτσι, οι y_k $(k=1,\ldots$ $\ldots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Τώρα, ας είναι y_k $(k=1,\ldots,n)$ n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)=$ $=0$. Τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=0 \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\ldots+c_ny_n'(x_0)=0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

έχει ορίζουσα μηδέν και άρα έχει μια μη μηδενική λύση $c_1,\ldots,c_n$. Η συνάρτηση $y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$ είναι (Θεώρημα 3) μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E_0). Η λύση αυτή πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Έτσι (Θεώρημα 1) η λύση y είναι η μηδενική λύση της (E_0). Άρα, $c_1y_1+\ldots+c_ny_n=0$ όπου οι σταθερές c_k $(k=1,\ldots,n)$ δεν είναι όλες μηδέν, το οποίο έρχεται σ'αντίθεση με την υπόθεση ότι οι λύσεις y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Η αντίθεση αυτή προέκυψε απ'το γεγονός ότι υποθέσαμε ότι $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)=0$ για κάποιο $x_0 \in I$. Έχουμε έτσι αναγκαστικά ότι $W(y_1,\ldots,y_n)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

Μια σπουδαία ιδιότητα της ορίζουσας Wronski n λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) είναι ότι αυτή ή δεν μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα I ή είναι μηδέν σ'ολόκληρο το I. Αυτό προκύπτει απ'το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I και y_k $(k=1,\dots,n)$ n λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Τότε ισχύει (Τύπος του Liouville)

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=W(y_1,\dots,y_n)(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\,dt\right] \text{ για κάθε } x\in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θ'αποδείξουμε το συμπέρασμα στην απλή περίπτωση $n=2$ και έπειτα στη γενική περίπτωση οποιουδήποτε n. Η απόδειξη στη γενική περίπτωση απαιτεί τη γνώση του τρόπου παραγώγισης μιας ορίζουσας- συνάρτησης.

Η περίπτωση $n=2$. Έχουμε

$$W\equiv W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2$$

και επομένως

$$\begin{aligned} W' &= y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1'y_2'-y_1''y_2 = y_1y_2''-y_1''y_2 \\ &= y_1\,\frac{-a_1y_2'-a_0y_2}{a_2}-\frac{-a_1y_1'-a_0y_1}{a_2}\,y_2 = -\frac{a_1}{a_2}\,(y_1y_2'-y_1'y_2) \\ &= -\frac{a_1}{a_2}\,W. \end{aligned}$$

Έτσι, W είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης

$$a_2W'+a_1W=0$$

και άρα (Θεώρημα 2) έχουμε

$$W(x)=W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right],\ x\in I.$$

Η γενική περίπτωση. Θέτουμε $W=W(y_1,\dots,y_n)$ και παίρνουμε

$$W' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ -\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} y_1^{(i)} & -\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} y_2^{(i)} & \dots -\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} y_n^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(i)} & y_2^{(i)} & \dots y_n^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_n \\ y_1' & y_2' & \dots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} .$$

'Ετσι, έχουμε $a_n W' + a_{n-1} W = 0$ απ'όπου προκύπτει (Θεώρημα 2) το ζητούμενο.

1.3. Βασικά σύνολα λύσεων

'Ενα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) καλείται ένα <u>βασικό σύνολο λύσεων</u> αυτής. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4, αν y_k $(k=1,\dots,n)$ είναι n λύσεις της (E_0), τότε $\{y_1,\dots,y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων αυτής αν και μόνο αν η ορίζουσα Wronski των y_k $(k=1,\dots,n)$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο I (ή, ισοδύναμα, δεν μηδενίζεται σ'ένα τουλάχιστο σημείο του I). Το παρακάτω Θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη βασικών συνόλων λύσεων της (E_0).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6</u>. <u>Υπάρχουν βασικά σύνολα λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E_0).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα $x_0 \in I$. Για κάθε $k \in \{1,\dots,n\}$, υπάρχει (Θεώρημα 1) λύση y_k της διαφορικής εξίσωσης (E_0) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_k^{(k-1)}(x_0) = 1 \quad \text{και} \quad y_k^{(i)}(x_0) = 0 \quad (i=0,1,\dots,n-1;\ i \neq k-1).$$

Οι λύσεις $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πραγματικά: Θεωρούμε n σταθερές c_k $(k=1,\dots,n)$ και υποθέτουμε ότι

$$c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n=0.$$

Με παραγωγίσεις παίρνουμε

$$\begin{cases} c_1y_1'+c_2y_2'+\ldots+c_ny_n'=0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}+c_2y_2^{(n-1)}+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}=0. \end{cases}$$

Θέτοντας στις παραπάνω ισότητες $x=x_0$ και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε αμέσως ότι $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$. Η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων y_k $(k=1,\ldots,n)$ μπορεί επίσης να εξασφαλισθεί απ'το γεγονός ότι $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)=1\neq 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 7</u>. <u>Ας είναι</u> $\{y_1,\ldots,y_n\}$ <u>ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E_0). <u>Για κάθε λύση</u> y <u>της</u> (E_0) <u>υπάρχουν</u> n <u>μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές</u> c_k $(k=1,\ldots,n)$ <u>έτσι ώστε</u>

$$y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το μονοσήμαντο των σταθερών c_k $(k=1,\ldots,n)$ προκύπτει αμέσως απ'τη γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων y_k $(k=1,\ldots,n)$. Ας είναι y μια λύση της (E_0) και ας θέσουμε

$$y(x_0)=\alpha_0,\ y'(x_0)=\alpha_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1},$$

όπου x_0 είναι ένα σημείο του I. Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=\alpha_0 \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\ldots+c_ny_n'(x_0)=\alpha_1 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1} \end{cases}$$

έχει ορίζουσα την $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)$ που δεν είναι μηδέν (Θεώρημα 4). Έτσι, το σύστημα αυτό έχει μια λύση $c_1,\ldots,c_n$. Τότε η συνάρτηση $u=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$ είναι (Θεώρημα 3) μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E_0). Η λύση u πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$u(x_0)=\alpha_0,\ u'(x_0)=\alpha_1,\ldots,u^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1}.$$

Άρα είναι (Θεώρημα 1) $u=y$ και επομένως $y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$.

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 3 και 7, συμπεραίνουμε ότι, αν $\{y_1,\ldots,y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), τότε y είναι μια λύση αυτής αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές c_k $(k=1,\ldots,n)$ τέτοιες ώστε $y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$.

Το Θεώρημα 6 εξασφαλίζει την ύπαρξη βασικών συνόλων λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Τώρα, δημιουργείται το ερώτημα κατά πόσο υπάρχει (και είναι μοναδική) και πως μπορεί να κατασκευασθεί μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης η οποία να έχει ως ένα βασικό σύνολο λύσεων το $\{y_1,\ldots$ $\ldots,y_n\}$, όπου y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι δεδομένες συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους n-τάξης στο I και ορίζουσα Wronski που δεν μηδενίζεται πουθενά στο I. Το επόμενο Θεώρημα δίνει απάντηση στο ερώτημα αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,n)$ n συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους n-τάξης στο I και ας υποθέσουμε ότι

$$W(y_1,\ldots,y_n)(x)\neq 0 \text{ για όλα τα } x\in I.$$

Τότε υπάρχει μια μοναδική ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης της μορφής (E_0) με $a_n=1$ που έχει το $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ως ένα βασικό σύνολο λύσεων. Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι η

$$(*)\qquad \frac{W(y_1,\ldots,y_n,y)}{W(y_1,\ldots,y_n)}=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η (*) γράφεται

$$\frac{1}{W(y_1,\ldots,y_n)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

και είναι της μορφής (E_0) με

$$a_n = \frac{1}{W(y_1,\ldots,y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{n-1} = -\frac{1}{W(y_1,\ldots,y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, a_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{W(y_1,\ldots,y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1'' & y_2'' & \ldots y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

$$a_0 = \frac{1}{W(y_n,\ldots,y_n)} \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Οι συντελεστές a_i $(i=0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I. Είναι τώρα φανερό ότι οι συναρτήσεις y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (*). Επειδή $W(y_1,\ldots,y_n)(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4, $\{y_1,\ldots,y_n\}$ θα είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (*).

Θ'αποδείξουμε, τώρα, ότι η (*) είναι η μόνη διαφορική εξίσωση της μορφής (E_0) με $a_n = 1$ που έχει το $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ως ένα βασικό σύνολο λύσεων. 'Ετσι, υποθέτουμε ότι $\{y_1,\dots,y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων καθεμιάς των παρακάτω δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$y^{(n)}+q_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+q_1y'+q_0y=0,$$

$$y^{(n)}+r_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+r_1y'+r_0y=0$$

(όπου q_i και r_i $(i=0,1,\dots,n-1)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I), οπότε αρκεί ν'αποδείξουμε ότι $q_i=r_i$ $(i=0,1,\dots,n-1)$. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $q_i=r_i$ $(i=1,\dots,n-1)$. Τότε $(q_0-r_0)y_k=0$ $(k=1,\dots$ $\dots,n)$. Αν για κάποιο σημείο $x_0\in I$ είναι $q_0(x_0)\neq r_0(x_0)$, τότε υπάρχει ένα υποδιάστημα J του I τέτοιο ώστε $q_0(x)\neq r_0(x)$ για όλα τα $x\in J$. 'Ετσι, θα έχουμε $y_k(x)=0$ για τα $x\in J$ και για $k=1,\dots,n$, οπότε $W(y_1,\dots,y_n)(x)=0$ όταν $x\in J$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει και άρα $q_0=r_0$. Τώρα, ας κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχουν δείκτες $i\in\{1,\dots,n-1\}$ τέτοιοι ώστε $q_i\neq r_i$ και ας ονομάσουμε μ τον μεγαλύτερο τέτοιο δείκτη, δηλαδή ας είναι $\mu\in\{1,\dots,n-1\}$ έτσι ώστε $q_\mu\neq r_\mu$ και, όταν $\mu<n-1$, $q_j=r_j$ για $j=\mu+1,\dots,n-1$. Θεωρούμε ένα σημείο $x_0\in I$ τέτοιο ώστε $q_\mu(x_0)\neq r_\mu(x_0)$. Τότε για ένα διάστημα J, υποδιάστημα του I, θα είναι $q_\mu(x)\neq r_\mu(x)$ για όλα τα $x\in J$. Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί των συναρτήσεων y_k $(k=1,\dots,n)$ στο J είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης μ-τάξης

$$(q_\mu-r_\mu)y^{(\mu)}+(q_{\mu-1}-r_{\mu-1})y^{(\mu-1)}+\dots+(q_1-r_1)y'+(q_0-r_0)y=0,$$

η οποία θεωρείται με διάστημα ορισμού το J. Θεωρούμε ένα σημείο $\tilde{x}$ στο διάστημα J και το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} c_1y_1(\tilde{x})+c_2y_2(\tilde{x})+\dots+c_ny_n(\tilde{x})=0 \\ c_1y_1'(\tilde{x})+c_2y_2'(\tilde{x})+\dots+c_ny_n'(\tilde{x})=0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(\mu-1)}(\tilde{x})+c_2y_2^{(\mu-1)}(\tilde{x})+\dots+c_ny_n^{(\mu-1)}(\tilde{x})=0. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει μ εξισώσεις και n αγνώστους. Επειδή $\mu<n$, θα έχει μια μη μηδενική λύση $c_1,\dots,c_n$. Η συνάρτηση $\tilde{y}=c_1y_1+\dots+c_ny_n$ ορισμένη στο J είναι (Θεώρημα 3) μια λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. Η λύση αυτή πληροί, όπως προκύπτει απ'την εκλογή των $c_1,\dots,c_n$, τις αρχικές συνθήκες

$$\tilde{y}(\tilde{x})=0,\ \tilde{y}'(\tilde{x})=0,\dots,\tilde{y}^{(\mu-1)}(\tilde{x})=0.$$

Έτσι, θα έχουμε (Θεώρημα 1) $\tilde{y}=0$, δηλαδή

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)=0$$

για όλα τα $x\in J$, όπου οι σταθερές $c_1,\ldots,c_n$ δεν είναι όλες μηδέν. Αυτό έρχεται σ'αντίθεση με τη γραμμική ανεξαρτησία των y_k $(k=1,\ldots$ $\ldots,n)$.

1.4. Υποβιβασμός της τάξης

Αν γνωρίζουμε μια λύση y_1, με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$, της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), τότε οι αντικαταστάσεις $y=uy_1$ και $v=u'$ μετασχηματίζουν την (E_0) σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση $(n-1)$-τάξης· από ένα βασικό σύνολο λύσεων της εξίσωσης που προκύπτει μπορούμε να πάρουμε ένα βασικό σύνολο λύσεων για την (E_0). Έτσι, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. Ας είναι y_1 μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Για $y=uy_1$, $v=u'$ η (E_0) μετασχηματίζεται σε μια $(n-1)$-τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση $(E_0)^*$. Αν $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της $(E_0)^*$ και

$$y_i(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}v_{i-1}(t)dt,\quad x\in I\quad (i=2,\ldots,n),$$

όπου x_0 είναι ένα σημείο του I, τότε $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι $y=uy_1$. Τότε (με τον τύπο του Leibnitz) έχουμε

$$\begin{cases} y'=y_1u'+y_1'u \\ \vdots \\ y^{(n-1)}=y_1u^{(n-1)}+(n-1)y_1'u^{(n-2)}+\ldots+y_1^{(n-1)}u \\ y^{(n)}=y_1u^{(n)}+ny_1'u^{(n-1)}+\dfrac{n(n-1)}{2!}y_1''u^{(n-2)}+\ldots+y_1^{(n)}u \end{cases}$$

και έτσι η (E_0) μετασχηματίζεται στη διαφορική εξίσωση

$$a_n[y_1u^{(n)}+ny_1'u^{(n-1)}+\ldots+y_1^{(n)}u]+a_{n-1}[y_1u^{(n-1)}+(n-1)y_1'u^{(n-2)}+\ldots$$

$$\ldots+y_1^{(n-1)}u]+\ldots+a_1(y_1u'+y_1'u)+a_0y_1u=0$$

ή

$$a_ny_1u^{(n)}+(na_ny_1'+a_{n-1}y_1)u^{(n-1)}+\ldots+[na_ny_1^{(n-1)}+\ldots+a_1y_1]u'+$$
$$+[a_ny_1^{(n)}+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+\ldots+a_1y_1'+a_0y_1]u=0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η y_1 είναι μια λύση της (E_0) και θέτοντας $u'=v$, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E_0)^* \qquad A_{n-1}v^{(n-1)}+A_{n-2}v^{(n-2)}+\ldots+A_0v=0,$$

όπου

$$A_{n-1}=a_ny_1,$$
$$A_{n-2}=na_ny_1'+a_{n-1}y_1,$$
$$\vdots$$
$$A_0=na_ny_1^{(n-1)}+\ldots+a_1y_1.$$

Οι συναρτήσεις A_i $(i=0,\ldots,n-2,n-1)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I και ο συντελεστής A_{n-1} δεν μηδενίζεται πουθενά στο I. Έτσι, η $(E_0)^*$ είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $(n-1)$-τάξης.

Ας είναι τώρα $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της $(E_0)^*$. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο $x_0\in I$ και ας θέσουμε

$$y_i(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}v_{i-1}(t)dt, \quad x\in I \quad (i=2,\ldots,n).$$

Είναι τότε φανερό ότι οι συναρτήσεις y_i $(i=2,\ldots,n)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (E_0). Θα δείξουμε ότι οι λύσεις y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ας είναι λοιπόν c_k $(k=1,\ldots,n)$ n σταθερές τέτοιες ώστε

$$c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n=0.$$

Τότε απ'τον τρόπο ορισμού των y_i $(i=2,\ldots,n)$ και απ'το γενονός ότι $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$ προκύπτει ότι

$$c_1+c_2\int_{x_0}^{x}v_1(t)dt+\ldots+c_n\int_{x_0}^{x}v_{n-1}(t)dt=0 \text{ για } x\in I.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$c_2v_1(x)+\ldots+c_nv_{n-1}(x)=0 \text{ για κάθε } x\in I$$

απ'όπου, επειδή οι v_i $(i=1,\dots,n-1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, συμπεραίνεται ο μηδενισμός όλων των σταθερών $c_2,\dots,c_n$. Τότε είναι και η σταθερά c_1 ίση με μηδέν.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μέθοδος του υποβιβασμού της τάξης στην ειδική περίπτωση των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, επειδή σ'αυτή την περίπτωση η εξίσωση που προκύπτει είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και άρα μπορεί να επιλυθεί (Θεώρημα 2). Έτσι, για τη διαφορική εξίσωση

$$(E_0)_2 \qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 10. Αν y_1 είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης $(E_0)_2$ με $y_1(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$ και</u>

$$y_2(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{y_1^2(t)}\exp\left[-\int_{x_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_2(s)}\,ds\right]dt, \quad x\in I,$$

<u>όπου x_0 είναι ένα σημείο του I, τότε $\{y_1,y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της $(E_0)_2$.</u>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $y=uy_1$ και $u'=v$. Τότε

$$\begin{aligned} a_2y''+a_1y'+a_0y &= a_2(uy_1)''+a_1(uy_1)'+a_0uy_1 \\ &= a_2(u''y_1+2u'y_1'+uy_1'')+a_1(u'y_1+uy_1')+a_0uy_1 \\ &= a_2y_1u''+(2a_2y_1'+a_1y_1)u'+(a_2y_1''+a_1y_1'+a_0y_1) \\ &= a_2y_1u''+(2a_2y_1'+a_1y_1)u' \\ &= a_2y_1v'+(2a_2y_1'+a_1y_1)v. \end{aligned}$$

Έτσι, η διαφορική μας εξίσωση μετασχηματίζεται στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$a_2y_1v'+(2a_2y_1'+a_1y_1)v=0.$$

Αυτή έχει (Θεώρημα 2) τη λύση v_1 με

$$v_1(x) = \frac{1}{y_1^2(x_0)} \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{2a_2(t)y_1'(t)+a_1(t)y_1(t)}{a_2(t)y_1(t)}\,dt\right], \quad x\in I.$$

Για κάθε $x \in I$ έχουμε

$v_1(x)=$

$$=\frac{1}{y_1^2(x_0)} \exp\left[-2\int_{x_0}^{x} \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\,dt-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{y_1^2(x_0)} \exp\left[-\log \frac{y_1^2(x)}{y_1^2(x_0)} - \int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right] = \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt\right].$$

Απ' τους μετασχηματισμούς που χρησιμοποιήσαμε προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση y με $(y/y_1)' = v_1$ είναι μια λύση της $(E_0)_2$. Μια τέτοια λύση είναι η συνάρτηση y_2 με $y_2(x)/y_1(x) = \int_{x_0}^{x} v_1(t)dt$, $x \in I$.

Θ'αποδείξουμε τώρα ότι οι λύσεις y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αυτό προκύπτει αμέσως, επειδή για όλα τα $x \in I$ είναι

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{A(t)}{y_1^2(t)}\,dt \\ y_1'(x) & y_1'(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{A(t)}{y_1^2(t)}\,dt + \frac{A(x)}{y_1(x)} \end{vmatrix}$$

$$= A(x) \neq 0,$$

όπου $A(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} [a_1(t)/a_2(t)]dt\right)$.

1.5. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$xy' - \frac{1}{2\log x}\,y = 0, \quad x > 1.$$

Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y_1 αυτής που πληροί την αρχική συνθήκη $y_1(e) = 1$.

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, y είναι μια λύση της διαφορικής μας εξίσωσης αν και μόνο αν

$$y(x)=y(e)\exp\left[-\int_e^x \frac{-\frac{1}{2\log t}}{t}\,dt\right]=y(e)\exp\left[\frac{1}{2}\int_e^x \frac{dt}{t\log t}\right]$$

$$=y(e)\exp\left[\frac{1}{2}\log(\log t)\Big|_e^x\right]=y(e)(\log x)^{1/2}$$

για κάθε $x>1$. Έτσι, όλες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο $y(x)=c(\log x)^{1/2}$, $x>1$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Ειδικά, η λύση y_1 με $y_1(e)=1$ είναι $y_1(x)=(\log x)^{1/2}$, $x>1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Οι συναρτήσεις $f_1(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$; $f_2(x)=3\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f_3(x)=-\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

(ii) Οι συναρτήσεις $g_1(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$; $g_2(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$ και $g_3(x)=\cos 2x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

<u>Λύση</u>. (i) Είναι $1\cdot f_1+1\cdot f_2+4f_3=0$, που αποδεικνύει τη γραμμική εξάρτηση των συναρτήσεων f_1, f_2 και f_3.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $c_1g_1+c_2g_2+c_3g_3=0$, όπου c_1, c_2 και c_3 είναι σταθερές. Τότε θα έχουμε $c_1+c_2\cos x+c_3\cos 2x=0$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\pi$, παίρνουμε αντίστοιχα $c_1+c_2+c_3=0$, $c_1-c_3=0$ και $c_1-c_2+c_3=0$, απ'όπου προκύπτει $c_1=c_2=c_3=0$, και άρα οι g_1, g_2 και g_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=0,\quad x>0,$$

αφού βρεθούν οι λύσεις αυτής της μορφής $y(x)=x^\nu, x>0$ (ν ακέραιος). Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(1)=0,\quad y_0'(1)=1,\quad y_0''(1)=2.$$

<u>Λύση</u>. $y(x)=x^\nu, x>0$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης αν και μόνο αν για όλα τα $x>0$ είναι

$$x^3(x^\nu)'''-4x^2(x^\nu)''+8x(x^\nu)'-8y=0$$

ή

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)x^\nu-4\nu(\nu-1)x^\nu+8\nu x^\nu-8x^\nu=0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)-4\nu(\nu-1)+8\nu-8=0.$$

Αυτό ισχύει τότε και μόνο τότε αν $\nu=1$ ή $\nu=2$ ή $\nu=4$. Έτσι, οι λύσεις της μορφής $y(x)=x^{\nu}$, $x>0$ (ν ακέραιος) είναι ακριβώς οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=x,\ x>0;\quad y_2(x)=x^2,\ x>0 \text{ και } y_3(x)=x^4,\ x>0.$$

Έχουμε για κάθε $x>0$

$$W(y_1,y_2,y_3)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2x & 4x^3 \\ 0 & 2 & 12x^2 \end{vmatrix} = 2x^4 \neq 0.$$

Άρα (Θεώρημα 4) οι λύσεις y_1,y_2,y_3 αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων. Επομένως (Θεωρήματα 3 και 7) οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης δίνονται απ' τον τύπο $y(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4$, όπου c_1,c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για τη λύση y_0 θα έχουμε για $x>0$

$$y_0(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4,$$
$$y_0'(x)=c_1+2c_2x+4c_3x^3,$$
$$y_0''(x)=2c_2+12c_3x^2$$

και έτσι για $x=1$ παίρνουμε

$$0=c_1+c_2+c_3,\quad 1=c_1+2c_2+4c_3,\quad 2=2c_2+12c_3$$

απ' όπου προκύπτει $c_1=-1$, $c_2=1$, $c_3=0$. Άρα, $y_0(x)=-x+x^2$, $x>0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων

$$y_1(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R};\quad y_2(x)=e^x(x-1),\ x\in\mathbb{R} \text{ και } y_3(x)=2e^x-e^{2x},\ x\in\mathbb{R},$$

αφού διαπιστωθεί ότι αυτές είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'''-4y''+5y'-2y=0$.

<u>Λύση</u>. Εύκολα διαπιστώνεται ότι καθεμιά απ' τις συναρτήσεις y_1, y_2 και y_3 είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'''-4y''+5y'-2y=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$W(y_1,y_2,y_3)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^x(x-1) & 2e^x-e^{2x} \\ e^x & e^x x & 2e^x-2e^{2x} \\ e^x & e^x(x+1) & 2e^x-4e^{2x} \end{vmatrix}$$

και έτσι

$$W(y_1,y_2,y_3)(0)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-1.$$

Με τη βοήθεια του τύπου του Liouville (Θεώρημα 5), για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

$$W(y_1,y_2,y_3)(x)=W(y_1,y_2,y_3)(0)\exp\left(-\int_0^x \frac{-4}{1}\,dt\right)=-e^{4x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$y_1(x)=x,\ x>0 \text{ και } y_2(x)=x\log x,\ x>0.$$

Να βρεθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με συντελεστή του y'' τη μονάδα και με ένα βασικό σύνολο λύσεων το $\{y_1,y_2\}$.

Λύση. Για όλα τα $x>0$ έχουμε

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x+1 \end{vmatrix}=x\neq 0$$

και έτσι (Θεώρημα 8) η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$\frac{W(y_1,y_2,y)}{W(y_1,y_2)}=0.$$

Αυτή γράφεται

$$\frac{1}{x}\begin{vmatrix} x & x\log x & y \\ 1 & \log x+1 & y' \\ 0 & \frac{1}{x} & y'' \end{vmatrix}=0$$

ή (μετά από πράξεις)

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Ν'αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $v_1(x)=x,\ x>0$ και $v_2(x)=x\log x,\ x>0$ αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$(*)\qquad x^2v''-xv'+v=0,\quad x>0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης

$$(**) \qquad x^3y''' - 4x^2y'' + 9xy' - 9y = 0, \quad x > 0,$$

αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x) = x$, $x > 0$ είναι μια λύση της.

Λύση. Εύκολα διαπιστώνεται ότι οι συναρτήσεις v_1, v_2 είναι δύο λύσεις της (*) και η y_1 είναι μια λύση της (**). Οι λύσεις v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες (Θεώρημα 4), γιατί

$$W(v_1, v_2)(x) = x \neq 0 \text{ για } x > 0.$$

Τώρα, για $y = y_1u = xu$ η διαφορική εξίσωση (**) γίνεται

$$x^3(xu''' + 3u'') - 4x^2(xu'' + 2u') + 9x(xu' + u) - 9xu = 0$$

ή (μετά από πράξεις)

$$x^2u''' - xu'' + u' = 0.$$

Θέτοντας $u' = v$ καταλήγουμε στην εξίσωση (*). Θεωρούμε τις συναρτήσεις y_2 και y_3, όπου για κάθε $x > 0$ είναι

$$y_2(x) = y_1(x)\int_1^x v_1(t)\,dt = x\int_1^x t\,dt = \frac{1}{2}(x^3 - x)$$

και

$$y_3(x) = y_1(x)\int_1^x v_2(t)\,dt = x\int_1^x t\log t\,dt = \frac{1}{2}x^3\log x - \frac{1}{4}(x^3 - x).$$

Τότε (Θεώρημα 9) $\{y_1, y_2, y_3\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (**). Έτσι (Θεωρήματα 3 και 7) οι λύσεις της (**) δίνονται απ' τον τύπο $y(x) = c_1x + c_2\frac{1}{2}(x^3 - x) + c_3\left[\frac{1}{2}x^3\log x - \frac{1}{4}(x^3 - x)\right]$, $x > 0$ για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων c_1, c_2 και c_3. Άρα οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (**) είναι

$$y(x) = C_1x + C_2x^3 + C_3x^3\log x, \quad x > 0,$$

όπου C_1, C_2 και C_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad x > -\frac{1}{2},$$

αφού βρεθεί μια λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1 = e^{cx}$, $x > \frac{1}{2}$ (c σταθερά).

Λύση. Η συνάρτηση $y_1(x) = e^{cx}$, $x > -\frac{1}{2}$ (c σταθερά) είναι μια λύση αν και μόνο αν για όλα τα $x > -\frac{1}{2}$

$$(2x+1)c^2e^{cx} - 4(x+1)ce^{cx} + 4e^{cx} = 0$$

ή

$$(2c^2-4c)x+c^2-4c+4=0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$2c^2-4c=0 \text{ και } c^2-4c+4=0,$$

δηλαδή $c=2$. Έτσι, μια λύση είναι η $y_1(x)=e^{2x}$, $x>-\frac{1}{2}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y_2(x)=y_1(x)\int_0^x \frac{1}{y_1^2(t)}\exp\left[-\int_0^t \frac{-4(s+1)}{2s+1}ds\right]dt = e^{2x}\int_0^x \frac{1}{e^{4t}}\exp[2t+\log(2t+1)]dt$$

$$=e^{2x}\int_0^x e^{-2t}(2t+1)dt = e^{2x}-x-1 \text{ για } x>-\frac{1}{2}.$$

Τότε (Θεώρημα 10) $\{y_1,y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της διαφορικής μας εξίσωσης. Όλες οι λύσεις δίνονται (Θεωρήματα 3 και 7) απ'τον τύπο $y(x)=c_1e^{2x}+c_2(e^{2x}-x-1)$, $x>-\frac{1}{2}$ ή ακόμα

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2(x+1), \quad x>-\frac{1}{2},$$

όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

1.6. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

(i) $y'+\frac{x}{1+x^2}y=0$. (iii) $y'+\frac{1}{\sin x}y=0$.

(ii) $(1-x)y'+xy=0$. (iv) $(x+2)y'+y=0$.

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $(1+x)^2y'+2xy=0$, $y(0)=-1$.

(ii) $(x\log x)y'-y=0$, $y(e)=-1$.

(iii) $(1+x^2)^2y'-xy=0$, $y(0)=1$.

3. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις που δίνονται είναι γραμμικά εξαρτημένες ή γραμμικά ανεξάρτητες:

(i) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=|x|$ για $x\in(-1,1)$.

(ii) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=\cos 2x$ για $x\in(-2\pi,2\pi)$.

(iii) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \log x$, $f_3(x) = \log x^2$ για $x \in (0,\infty)$.

(iv) $f_1(x) = x^2-x+3$, $f_2(x) = 2x^2+x$, $f_3(x) = 2x-4$ για $x \in \mathbb{R}$.

(v) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ για $x \in \mathbb{R}$.

(vi) $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$, $f_3(x) = x^2e^x$ για $x \in \mathbb{R}$.

4. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = 0,$$

αφού βρεθούν οι λύσεις αυτής της μορφής e^{cx}, $x \in \mathbb{R}$ (c σταθερά).

5. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad x > -\frac{1}{2},$$

αν είναι γνωστό ότι δέχεται λύσεις των μορφών $y(x) = e^{cx}$, $x > -\frac{1}{2}$ και $y(x) = \alpha x + \beta$, $x > -\frac{1}{2}$ (όπου c, α, β σταθερές). Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = -1.$$

6. Σε καθεμιά απ' τις περιπτώσεις (i) και (ii) να βρεθεί μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με ένα βασικό σύνολο λύσεων τις συναρτήσεις που δίνονται:

(i) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$ για $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$ και $y_3(x) = e^x$ για $x \in \mathbb{R}$.

7. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy''' - y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0,$$

αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x) = x$, $x > 0$ και $y_2(x) = e^x$, $x > 0$ είναι δύο λύσεις της.

8. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^3y''' - (x+3)x^2y'' + 2x(x+3)y' - 2(x+3)y = 0, \quad x > 0$$

με το δεδομένο ότι δέχεται δύο λύσεις της μορφής x^n, $x > 0$ (n ακέραιος).

9. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(x^3-2x^2)y'' - (x^3+2x^2-6x)y' + (3x^2-6)y = 0, \quad x > 2,$$

αν είναι γνωστό ότι δέχεται μια λύση της μορφής x^c, $x > 2$ (c σταθερά).

2. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σ'αυτό το Εδάφιο μελετούμε τη διαφορική εξίσωση (E) όταν αυτή είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ($b \neq 0$). Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση των μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης και δίνουμε (Θεώρημα 11) τον τύπο απ'τον οποίο προκύπτουν όλες οι λύσεις. Στη συνέχεια, μελετούμε την (E) στη γενική περίπτωση αυθαίρετου n. Αποδεικνύουμε (Θεώρημα 12) ότι, αν είναι γνωστή μια λύση (μερική λύση) της (E), τότε οι λύσεις της (E) είναι ακριβώς τα αθροίσματα της μερικής λύσης με τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Αποδεικνύουμε (Θεώρημα 13) ακόμα ότι για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (E) όπου το δεύτερο μέλος είναι άθροισμα m συναρτήσεων, είναι αρκετό να βρούμε μερική λύση για καθεμιά απ'τις m διαφορικές εξισώσεις με δεύτερα μέλη τους προσθετέους του αθροίσματος. Έπειτα, αναπτύσσουμε (Θεωρήματα 14 και 15) τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (E), αν είναι γνωστό ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Στην ειδική περίπτωση των μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης η μέθοδος αυτή δίνει (Θεωρήματα 16 και 17) την έκφραση μιας μερικής λύσης, αν είναι γνωστές δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης ή ακόμα αν είναι γνωστή μια μόνο λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης που δεν μηδενίζεται πουθενά στο I. Τέλος παραθέτουμε μερικά παραδείγματα και προτείνουμε ορισμένες ασκήσεις για λύση.

2.1. Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Για $n=1$ η διαφορική εξίσωση (E) γίνεται

$$(E)_1 \qquad a_1y'+a_0y=b.$$

Το θέμα της επίλυσης της εξίσωσης αυτής εξαντλείται με το παρακάτω Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 11</u>. <u>Ας είναι x_0 ένα σημείο του I και ας θέσουμε</u>

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0(t)}{a_1(t)}\,dt, \quad x\in I.$$

<u>Τότε y είναι μια λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης</u> $(E)_1$ <u>αν και μόνο αν</u>

$$y(x) = \exp[-A(x)]\left(y(x_0)+\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a_1(t)} \exp A(t)\,dt\right), \quad x \in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $y = u\exp(-A)$. Τότε παίρνουμε

$$y' = u'\exp(-A) - uA'\exp(-A) = \left(u' - u\,\frac{a_0}{a_1}\right)\exp(-A)$$

και έτσι η διαφορική εξίσωση $(E)_1$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$a_1 u' = b\exp A.$$

Για τις λύσεις u αυτής έχουμε

$$u(x) = u(x_0)+\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a_1(t)} \exp A(t)\,dt, \quad x \in I$$

απ'όπου προκύπτει ο τύπος του Θεωρήματός μας, δεδομένου ότι $y(x_0) = u(x_0)$.

Απ'το Θεώρημα 11 προκύπτει ότι, αν A και B είναι συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο I και τέτοιες ώστε $A' = a_0/a_1$ και $B' = (b/a_1)\exp A$, τότε όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $(E)_1$ προκύπτουν απ'τον τύπο $(c+B)\exp(-A)$ για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c.

<u>2.2.</u> <u>Μερικές λύσεις</u>. <u>Το σύνολο των λύσεων</u>

Μια δεδομένη λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) τη λέμε και μια <u>μερική λύση</u> αυτής. Θα δούμε ότι η επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης αυτής, αν είναι γνωστές οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής εξίσωσης.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 12</u>. <u>Ας είναι</u> y_μ <u>μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E). <u>Τότε y είναι μια λύση της</u> (E) <u>αν και μόνο αν υπάρχει μια λύση</u> $\tilde{y}$ <u>της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E_0) <u>έτσι ώστε</u>

$$y = \tilde{y}+y_\mu.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι y μια λύση της (E). Τότε η συνάρτηση $\tilde{y} = y-y_\mu$ είναι μια λύση της (E_0), γιατί $L(\tilde{y})=L(y-y_\mu)=L(y)-L(y_\mu) = b-b=0$. Αντίστροφα, αν $\tilde{y}$ είναι μια λύση της (E_0), τότε $L(\tilde{y}+y_\mu) = L(\tilde{y})+L(y_\mu)=0+b=b$ και άρα η συνάρτηση $y=\tilde{y}+y_\mu$ είναι μια λύση της (E).

ΘΕΩΡΗΜΑ 13. Ας υποθέσουμε ότι $b=b_1+\ldots+b_m$, όπου b_k $(k=1,\ldots,m)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I. Αν, για κάθε $k\in\{1,\ldots,m\}$, y_μ^k είναι μια μερική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'+a_0y=b_k,$$

τότε $y_\mu^1+\ldots+y_\mu^m$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι $L(y_\mu^k)=b_k$ για $k=1,\ldots,m$ και έτσι παίρνουμε

$$L(y_\mu^1+\ldots+y_\mu^m)=L(y_\mu^1)+\ldots+L(y_\mu^m)=b_1+\ldots+b_m=b.$$

Το παραπάνω θεώρημα είναι χρήσιμο για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (E) με τη μέθοδο των αγνώστων σταθερών, όταν η (E) είναι με σταθερούς συντελεστές. Τη μέθοδο αυτή θα την εξετάσουμε στο επόμενο Εδάφιο.

2.3. Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών χρησιμοποιείται για την εύρεση μιας μερικής λύσης της (E) και προϋποθέτει ότι είναι γνωστό ένα βασικό σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (E_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 14. Ας είναι $\{y_1,\ldots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) και ας είναι v_k $(k=1,\ldots,n)$ n συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} v_1'y_1+v_2'y_2+\ldots+v_n'y_n=0 \\ v_1'y_1'+v_2'y_2'+\ldots+v_n'y_n'=0 \\ \vdots \\ v_1'y_1^{(n-2)}+v_2'y_2^{(n-2)}+\ldots+v_n'y_n^{(n-2)}=0 \\ v_1'y_1^{(n-1)}+v_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+v_n'y_n^{(n-1)}=\dfrac{b}{a_n}\,. \end{cases}$$

<u>Τότε $y_\mu = v_1y_1+\ldots+v_ny_n$ είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (Ε).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας σημειώσουμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$, οι παραπάνω ισότητες στο x αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους $v_1'(x),\ldots,v_n'(x)$ και ορίζουσα την $W(y_1,\ldots,y_n)(x)$ που είναι (Θεώρημα 4) διάφορη απ'το μηδέν. Για οποιοδήποτε x το γραμμικό αυτό σύστημα έχει ακριβώς μια λύση, και έτσι οι συναρτήσεις v_k' $(k=1,\ldots$ $\ldots,n)$ ορίζονται μονοσήμαντα ενώ με ολοκλήρωση βρίσκονται συναρτήσεις v_k $(k=1,\ldots,n)$ που πληρούν τις υπόψη ισότητες.

Θ'αποδείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση $y_\mu = v_1y_1+\ldots+v_ny_n$ είναι μια (μερική) λύση της διαφορικής εξίσωσης (Ε). Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}
y_\mu' &= (v_1'y_1+v_2'y_2+\ldots+v_n'y_n)+(v_1y_1'+v_2y_2'+\ldots+v_ny_n')\\
&= v_1y_1'+v_2y_2'+\ldots+v_ny_n',\\
y_\mu'' &= (v_1'y_1'+v_2'y_2'+\ldots+v_n'y_n')+(v_1y_1''+v_2y_2''+\ldots+v_ny_n'')\\
&= v_1y_1''+v_2y_2''+\ldots+v_ny_n'',\ldots\\
\ldots,y_\mu^{(n-1)} &= [v_1'y_1^{(n-2)}+v_2'y_2^{(n-2)}+\ldots+v_n'y_n^{(n-2)}]+[v_1y_1^{(n-1)}+v_2y_2^{(n-1)}+\ldots\\
&\qquad \ldots+v_ny_n^{(n-1)}]\\
&= v_1y_1^{(n-1)}+v_2y_2^{(n-1)}+\ldots+v_ny_n^{(n-1)},\\
y_\mu^{(n)} &= [v_1'y_1^{(n-1)}+v_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+v_n'y_n^{(n-1)}]+[v_1y_1^{(n)}+v_2y_2^{(n)}+\ldots\\
&\qquad \ldots+v_ny_n^{(n)}]\\
&= \frac{b}{a_n}+v_1y_1^{(n)}+v_2y_2^{(n)}+\ldots+v_ny_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

'Ετσι έχουμε

$$\begin{aligned}
L(y_\mu) &= a_ny_\mu^{(n)}+a_{n-1}y_\mu^{(n-1)}+\ldots+a_1y_\mu'+a_0y_\mu\\
&= a_n\left[\frac{b}{a_n}+v_1y_1^{(n)}+v_2y_2^{(n)}+\ldots+v_ny_n^{(n)}\right]\\
&\quad +a_{n-1}[v_1y_1^{(n-1)}+v_2y_2^{(n-1)}+\ldots+v_ny_n^{(n-1)}]\\
&\quad \vdots\\
&\quad +a_1(v_1y_1'+v_2y_2'+\ldots+v_ny_n')\\
&\quad +a_0(v_1y_1+v_2y_2+\ldots+v_ny_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b+[a_n y_1^{(n)}+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+\dots+a_1y_1'+a_0y_1]v_1\\
&\quad +[a_n y_2^{(n)}+a_{n-1}y_2^{(n-1)}+\dots+a_1y_2'+a_0y_2]v_2\\
&\quad \vdots\\
&\quad +[a_n y_n^{(n)}+a_{n-1}y_n^{(n-1)}+\dots+a_1y_n'+a_0y_n]v_n\\
&= b+L(y_1)v_1+L(y_2)v_2+\dots+L(y_n)v_n\\
&= b,
\end{aligned}$$

επειδή $L(y_k)=0$ $(k=1,\dots,n)$ δεδομένου ότι οι y_k $(k=1,\dots,n)$ είναι λύσεις της (E_0).

Με τον κανόνα του Cramer βρίσκουμε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος που εμφανίζεται στη διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος είναι

$$v_1'=\frac{W_1(y_1,\dots,y_n)}{W(y_1,\dots,y_n)}\cdot\frac{b}{a_n},\dots,v_n'=\frac{W_n(y_1,\dots,y_n)}{W(y_1,\dots,y_n)}\cdot\frac{b}{a_n},$$

όπου, για κάθε $k\in\{1,\dots,n\}$, $W_k(y_1,\dots,y_n)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει απ' την ορίζουσα $W(y_1,\dots,y_n)$ αν αντικατασταθεί η k-στήλη της με τη στήλη $(0,0,\dots,0,1)$. Έτσι, αν x_0 είναι ένα σημείο του διαστήματος I, τότε το θεώρημα 14 μπορεί να εφαρμοσθεί για

$$v_k(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(y_1,\dots,y_n)(t)}{W(y_1,\dots,y_n)(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_n(t)}\,dt,\quad x\in I\ (k=1,\dots,n),$$

όπου στην περίπτωση αυτή είναι

$$v_k(x_0)=0\quad (k=1,\dots,n).$$

Θα πάρουμε μ' αυτό τον τρόπο μια μερική λύση $y_\mu=v_1y_1+\dots+v_ny_n$ της (E) για την οποία θα έχουμε (όπως φαίνεται στην απόδειξη του θεωρήματος 14)

$$y_\mu^{(i)}=v_1y_1^{(i)}+\dots+v_ny_n^{(i)}\quad (i=0,1,\dots,n-1).$$

Έτσι, η μερική αυτή λύση θα πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_\mu(x_0)=0,\ y_\mu'(x_0)=0,\dots,y_\mu^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Φθάσαμε λοιπόν στο παρακάτω συμπέρασμα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 15</u>. <u>Ας είναι x_0 ένα σημείο του I και $\{y_1,\dots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u>

(E_0). Για κάθε $k \in \{1,\dots,n\}$, ας είναι $W_k(y_1,\dots,y_n)$ η ορίζουσα που προκύπτει απ'την $W(y_1,\dots,y_n)$ αν αντικατασταθεί η k-στήλη της με τη στήλη $(0,0,\dots,0,1)$. Τότε η συνάρτηση y_μ με

$$y_\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x)\int_{x_0}^{x} \frac{W_k(y_1,\dots,y_n)(t)}{W(y_1,\dots,y_n)(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_n(t)}\,dt, \quad x\in I$$

είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E). Επιπλέον, η λύση αυτή πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_\mu(x_0)=0,\ y_\mu'(x_0)=0,\dots,y_\mu^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$(E)_2 \qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=b.$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$(E_0)_2 \qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=0.$$

Για την εύρεση μιας μερικής λύσης της $(E)_2$ έχουμε τα παρακάτω δύο Θεωρήματα. Το Θεώρημα 16 δεν είναι τίποτε άλλο παρά η έκφραση του Θεωρήματος 15 για $n=2$, ενώ το Θεώρημα 17 προκύπτει από ένα συνδυασμό των Θεωρημάτων 10 και 16.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16. Ας είναι x_0 ένα σημείο του διαστήματος I και $\{y_1,y_2\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης $(E_0)_2$. Τότε η συνάρτηση y_μ με

$$y_\mu(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt, \quad x\in I$$

είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης $(E)_2$. Επιπλέον, η λύση αυτή πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_\mu(x_0)=0,\ y_\mu'(x_0)=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 15 για $n=2$. Τότε

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2,\quad W_1(y_1,y_2)=-y_2 \text{ και } W_2(y_1,y_2)=y_1.$$

Έτσι, για $x\in I$ παίρνουμε

$$y_\mu(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_1(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}dt+y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_2(y_1,y_2)(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}dt$$

$$=y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{-y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt+$$

$$+y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 17</u>. <u>Ας είναι</u> x_0 <u>ένα σημείο του</u> I <u>και</u>

$$A(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,dt,\quad x\in I.$$

<u>Επιπλέον, ας είναι</u> y_1 <u>μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης</u> $(E_0)_2$ <u>με</u> $y_1(x)\neq 0$ <u>για όλα τα</u> $x\in I$. <u>Τότε η συνάρτηση</u> y_μ <u>με</u>

$$y_\mu(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}y_1(t)\left(\int_{t}^{x}\frac{\exp[-A(s)]}{y_1^2(s)}\,ds\right)\frac{b(t)}{a_2(t)}\exp[A(t)]dt,\quad x\in I$$

<u>είναι μια μερική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης</u> $(E)_2$ <u>με</u>

$$y_\mu(x_0)=0,\quad y_\mu'(x_0)=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$y_2(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[-A(t)]}{y_1^2(t)}\,dt,\quad x\in I.$$

Τότε (Θεώρημα 10) $\{y_1,y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $(E_0)_2$. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 16 στην περίπτωση αυτή. Έχουμε για $x\in I$

$$y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)=y_1(x)\left(y_1'(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[-A(t)]}{y_1^2(t)}\,dt+\frac{\exp[-A(x)]}{y_1(x)}\right)-$$

$$-y_1'(x)y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[-A(t)]}{y_1^2(t)}\,dt$$

$$=\exp[-A(x)]$$

και έτσι για όλα τα $x\in I$ παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_1(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[-A(s)]}{y_1^2(s)}\,ds-y_1(x)y_1(t)\int_{x_0}^{t}\frac{\exp[-A(s)]}{y_1^2(s)}\,ds}{\exp[-A(t)]}\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\,dt$$

$$=y_1(x)\int_{x_0}^{x}y_1(t)\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\exp[-A(s)]}{y_1^2(s)}\,ds-\int_{x_0}^{t}\frac{\exp[-A(s)]}{y_1^2(s)}\,ds\right)\cdot\frac{b(t)}{a_2(t)}\exp[A(t)]dt$$

$$=y_1(x)\int_{x_0}^{x}y_1(t)\left(\int_{t}^{x}\frac{\exp[-A(s)]}{y_1^2(s)}\,ds\right)\frac{b(t)}{a_2(t)}\exp[A(t)]dt.$$

2.4. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y'+(\mathrm{tg}\,x)y=\sin x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

και, ειδικά, να βρεθεί η λύση y_1 αυτής που πληροί την αρχική συνθήκη $y_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, y θα είναι μια λύση της διαφορικής μας εξίσωσης αν και μόνο αν για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$y(x)=\exp\left[-\int_{\pi/4}^{x}\mathrm{tg}t\,dt\right]\left(y\left(\frac{\pi}{4}\right)+\int_{\pi/4}^{x}(\sin t)\exp\left[\int_{\pi/4}^{t}\mathrm{tg}s\,ds\right]dt\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos x\left[y\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{x}\frac{\sin t}{\cos t}\,dt\right]=\cos x\left[\sqrt{2}\,y\left(\frac{\pi}{4}\right)-\log\sqrt{2}-\log\cos x\right].$$

'Ετσι, όλες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο $y(x)=\cos x\,(c-\log\cos x)$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Ειδικά, έχουμε $y_1=\cos x\,(\sqrt{2}-\log\sqrt{2}-\log\cos x)$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=2x^4\log x,\quad x>0,$$

αφού βρεθούν τρείς γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης της μορφής x^ν, $x>0$ (ν ακέραιος).

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση έχει (Παράδειγμα 3, Εδάφιο 1) το βασικό σύνολο λύσεων $\{y_1,y_2,y_3\}$, όπου

$$y_1(x)=x,\quad y_2(x)=x^2 \text{ και } y_3(x)=x^4 \text{ για } x>0,$$

και όλες οι λύσεις της δίνονται απ'τον τύπο $\tilde{y}(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4, x>0$, όπου c_1,c_2,c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Θα βρούμε τώρα μια μερική λύση y_μ της διαφορικής μας εξίσωσης. Για κάθε $x>0$, θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1(x)+v_2'(x)y_2(x)+v_3'(x)y_3(x)=0\\ v_1'(x)y_1'(x)+v_2'(x)y_2'(x)+v_3'(x)y_3'(x)=0\\ v_1'(x)y_1''(x)+v_2'(x)y_2''(x)+v_3'(x)y_3''(x)=\dfrac{2x^4\log x}{x^3}, \end{cases}$$

το οποίο γράφεται

$$\begin{cases} v_1'(x)+xv_2'(x)+x^3v_3'(x)=0\\ v_1'(x)+2xv_2'(x)+4x^3v_3'(x)=0\\ \qquad v_2'(x)+6x^2v_3'(x)=x\log x. \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκουμε

$$v_1'(x)=\frac{2}{3}x^2\log x,\quad v_2'(x)=-x\log x \text{ και } v_3'(x)=\frac{1}{3}\frac{\log x}{x} \text{ για } x>0,$$

οπότε, με ολοκλήρωση, βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε

$v_1(x)=\frac{2}{9}x^3\left(\log x-\frac{1}{3}\right)$, $v_2(x)=-\frac{1}{2}x^2\left(\log x-\frac{1}{2}\right)$ και $v_3(x)=\frac{1}{6}\log^2 x$ για όλα τα $x>0$. Τότε (Θεώρημα 14) η συνάρτηση y_μ με

$$y_\mu(x)=v_1(x)y_1(x)+v_2(x)y_2(x)+v_3(x)y_3(x)=x^4\left(\frac{1}{6}\log^2x-\frac{5}{18}\log x+\frac{19}{108}\right), x>0$$

είναι μια μερική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης. 'Ολες οι λύσεις θα δίνονται (Θεώρημα 12) απ'τον τύπο

$$y(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^4+x^4\left(\frac{1}{6}\log^2x-\frac{5}{18}\log x+\frac{19}{108}\right),\quad x>0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί η μερική λύση y_μ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''' - y'' + y' - y = 1$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_\mu(0) = y'_\mu(0) = y''_\mu(0) = 0$, αν είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = \cos x \;\; \text{και} \;\; y_3(x) = \sin x \;\; \text{για} \; x \in \mathbb{R}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

<u>Λύση</u>. Η ζητούμενη μερική λύση δίνεται (Θεώρημα 15) απ'τον τύπο

$$y_\mu(x) = \sum_{k=1}^{3} y_k(x) \int_0^x \frac{W_k(y_1,y_2,y_3)(t)}{W(y_1,y_2,y_3)(t)}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου, για κάθε $k \in \{1,2,3\}$, $W_k(y_1,y_2,y_3)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει απ'την $W(y_1,y_2,y_3)$ αν αντικατασταθεί η k-στήλη της με τη στήλη $(0,0,1)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$W(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & y'_3(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & y''_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & \sin x \\ e^x & -\sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 2e^x,$$

$$W_1(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & y'_2(x) & y'_3(x) \\ 1 & y''_2(x) & y''_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1,$$

$$W_2(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & y_3(x) \\ y'_1(x) & 0 & y'_3(x) \\ y''_1(x) & 1 & y''_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 0 & \sin x \\ e^x & 0 & \cos x \\ e^x & 1 & -\sin x \end{vmatrix} = e^x(\sin x - \cos x),$$

$$W_3(y_1,y_2,y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 \\ y'_1(x) & y'_2(x) & 0 \\ y''_1(x) & y''_2(x) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & \cos x & 0 \\ e^x & -\sin x & 0 \\ e^x & -\cos x & 1 \end{vmatrix} = -e^x(\sin x + \cos x).$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$y_\mu(x) = e^x \int_0^x \frac{1}{2e^t}\,dt + \cos x \int_0^x \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)\,dt + \sin x \int_0^x \left(-\frac{1}{2}\right)(\sin t + \cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - 1) + \frac{1}{2}\cos x(-\cos x - \sin x + 1) - \frac{1}{2}\sin x(-\cos x + \sin x + 1).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί η μερική λύση y_μ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$x^2 y'' - xy' + y = x \log x, \quad x > 0$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_\mu(1) = y'_\mu(1) = 0$, με το δεδομένο ότι $y_1(x) = x$, $x > 0$ και $y_2(x) = x \log x$, $x > 0$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Λύση. Η ζητούμενη λύση είναι (Θεώρημα 16)

$$y_\mu(x) = \int_1^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)} \cdot \frac{t \log t}{t^2}\,dt = \int_1^x (x \log x - x \log t)\frac{\log t}{t}\,dt$$

$$= x \log x \int_1^x \frac{\log t}{t}\,dt - x \int_1^x \frac{\log^2 t}{t}\,dt = \frac{1}{6}\, x \log^3 x, \quad x > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να βρεθεί η μερική λύση y_μ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$y'' - 2y' + y = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_\mu(0) = y'_\mu(0) = 0$, αν είναι γνωστό ότι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει τη λύση $y_1(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Η ζητούμενη λύση είναι (Θεώρημα 17)

$$y_\mu(x) = y_1(x) \int_0^x y_1(t) \left(\int_t^x \frac{\exp\left[-\int_0^s (-2)\,dr\right]}{y_1^2(s)}\,ds \right) e^t \exp\left[\int_0^t (-2)\,dr\right] dt$$

$$= e^x \int_0^x (x - t)\,dt = \frac{1}{2}\, x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.5. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

(i) $y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = \frac{x}{1+x^2}$.

(ii) $y' - \frac{3}{x-1}\, y = (x-1)^4$.

(iii) $y' - y = b$ με $b(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y' - xy = (1-x^2)e^{x^2/2}$, $y(0) = 0$.

(ii) $(1+x)^2 y' + 2xy = -2x$, $y(0) = -1$.

(iii) $(1-x)y' + xy = x(x-1)^2$, $y(5) = 24$.

3. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x}, \quad x > 0$$

με το δεδομένο ότι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει μια λύση της μορφής e^{mx}, $x > 0$ (m σταθερά).

4. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

αν είναι γνωστό ότι $y_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.

5. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''' - 3y'' + 2y' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

αφού βρεθούν τρείς γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής e^{cx}, $x \in \mathbb{R}$ (c σταθερά) για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση.

6. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}/(1+e^x); \quad y(0) = y'(0) = 0$$

με το δεδομένο ότι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει τις λύσεις $y_1(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $y_2(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(2x+1)(x+1)y''+2xy'-2y=(2x+1)^2,\quad x>-\frac{1}{2},$$

αφού βρεθεί μια λύση y_1 της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης της μορφής $y_1(x)=(\gamma x+\delta)/(x+1)$, $x>-\frac{1}{2}$ (γ,δ σταθερές).

3. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Στο Εδάφιο αυτό μελετούμε την ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Έτσι, σ'ολόκληρο το Εδάφιο θα υποθέσουμε ότι οι συντελεστές a_i ($i=0,1,\ldots,n-1,n$) είναι σταθερές. Δίνουμε (Θεώρημα 18) πρώτα το τύπο για την εύρεση των λύσεων των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (ομογενών και μη ομογενών) με σταθερούς συντελεστές. Θεωρούμε έπειτα τη γενική περίπτωση για οποιοδήποτε n. Για την ομογενή γραμμική εξίσωση (E_0) βρίσκουμε (Θεωρήματα 19 και 20) ένα βασικό σύνολο λύσεων με τη βοήθεια των ριζών του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου $p(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$. Επίσης, αναπτύσουμε τη μέθοδο των αγνώστων σταθερών για την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) όταν το δεύτερο μέλος της έχει μια κατάλληλη μορφή. Μελετούμε ακόμα τη διαφορική εξίσωση Euler και βλέπουμε ότι αυτή ανάγεται, μ'ένα κατάλληλο μετασχηματισμό, σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Παραθέτουμε τέλος ορισμένα παραδείγματα και δίνουμε ασκήσεις για λύση.

3.1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 2 και 11, παίρνουμε αμέσως το επόμενο συμπέρασμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18. (i) Ας είναι $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε y είναι μια λύση της

$(E_0)_1$ $$a_1y'+a_0y=0$$

αν και μόνο αν

$$y(x)=y(x_0)\exp\left[-\frac{a_0}{a_1}(x-x_0)\right],\quad x\in\mathbb{R}.$$

(ii) Ας είναι $x_0\in I$. Τότε y είναι μια λύση της

$$(E)_1 \qquad a_1y'+a_0y=b$$

<u>αν και μόνο αν</u>

$$y(x)=\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right)\left[y(x_0)\exp\left(\frac{a_0}{a_1}x_0\right)+\int_{x_0}^{x}\frac{b(t)}{a_1}\exp\left(\frac{a_0}{a_1}t\right)dt\right], \quad x\in I.$$

Απ'το Θεώρημα 18 φαίνεται ότι οι λύσεις της $(E_0)_1$ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής $c\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right)$, $x\in\mathbb{R}$ για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c, ενώ οι λύσεις της $(E)_1$ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις $[c+B(x)]\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}x\right)$, $x\in I$ για τις διάφορες τιμές του c, όπου B είναι μια συνάρτηση με $B'(x)=\frac{b(x)}{a_1}\exp\left(\frac{a_0}{a_1}x\right)$, $x\in I$. Επίσης, θα πρέπει να τονίσουμε ότι ως διάστημα ορισμού της εξίσωσης $(E_0)_1$ θεωρείται ολόκληρη η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$.

3.2. <u>Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Ένα βασικό σύνολο λύσεων</u>

Θα μελετήσουμε εδώ την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (E_0). Ως διάστημα ορισμού αυτής θα θεωρείται το $\mathbb{R}$ και έτσι όλες οι λύσεις της θα είναι ορισμένες σ'ολόκληρη την πραγματική ευθεία.

Το πολυώνυμο

$$p(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$$

καλείται <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο</u> της (E_0) και η εξίσωση $p(\lambda)=0$ λέγεται <u>χαρακτηριστική εξίσωση</u> αυτής. Το πολυώνυμο αυτό παίζει σπουδαίο ρόλο στην επίλυση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) (με σταθερούς συντελεστές), γιατί από τις ρίζες του μπορεί να κατασκευασθεί ένα βασικό σύνολο λύσεων. Βέβαια δεν είναι πάντοτε δυνατό να μπορούν να βρεθούν οι ρίζες του πολυώνυμου $p(\lambda)$ ιδιαίτερα στην περίπτωση $n\geq 5$. Ας σημειώσουμε ότι το $p(\lambda)$ έχει ακριβώς n ρίζες, όπου κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές όσες δείχνει η πολλαπλότητά της. Το παρακάτω Θεώρημα δίνει ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0) με τη βοήθεια των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 19</u>. <u>Ας είναι $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ οι διακεκριμμένες ρίζες του χα-</u>

<u>ρακτηριστικού πολυώνυμου της</u> (E_0) <u>με πολλαπλότητες</u> $m_1,\dots,m_s$ <u>αντί-στοιχα (οπότε</u> $m_1+\dots+m_s=n$<u>). Τότε οι</u> n <u>συναρτήσεις</u>

$$y_{ij}(x)=x^j e^{\lambda_i x},\ x\in\mathbb{R}\quad (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,s)$$

<u>αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E_0).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι λ_0 μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (E_0) με πολλαπλότητα m. Θ'αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $x^j e^{\lambda_0 x}$, $x\in\mathbb{R}$ $(j=0,1,\dots,m-1)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Τότε θα έχει αποδειχθεί το πρώτο μέρος του Θεωρήματος, δηλαδή το ότι οι συναρτήσεις y_{ij} $(j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,s)$ είναι λύσεις της (E_0). Έχουμε, με τη βοήθεια του τύπου του Leibnitz,

$$L(x^j e^{\lambda x})=L\left(\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}e^{\lambda x}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}e^{\lambda x}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k}e^{\lambda x}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}(\lambda^k e^{\lambda x})=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\left(\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\lambda^k\right)\left(\frac{\partial^{j-r}}{\partial\lambda^{j-r}}e^{\lambda x}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}\left(\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\lambda^k\right)x^{j-r}e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}x^{j-r}\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\lambda^k$$

$$=e^{\lambda x}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}x^{j-r}\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k\right)=e^{\lambda x}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}x^{j-r}p^{(r)}(\lambda)$$

και έτσι, αν $j\in\{0,1,\dots,m-1\}$, για $\lambda=\lambda_0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ παίρνουμε

$$L\left(x^j e^{\lambda_0 x}\right)=e^{\lambda_0 x}\sum_{r=0}^{j}\binom{j}{r}x^{j-r}p^{(r)}(\lambda_0)=0,$$

επειδή

$$p(\lambda_0)=p'(\lambda_0)=\dots=p^{(m-1)}(\lambda_0)=0.$$

Άρα, οι συναρτήσεις $x^j e^{\lambda_0 x}$, $x\in\mathbb{R}$ $(j=0,1,\dots,m-1)$ είναι λύσεις της (E_0).

Θ'αποδείξουμε, τώρα, ότι οι λύσεις y_{ij} $(j=0,1,\dots,m_i-1;$ $i=1,\dots,s)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, οπότε υπάρχουν σταθερές c_{ij} $(j=0,1,\dots,m_i-1;i=1,\dots,s)$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}x^j e^{\lambda_i x} = 0.$$

Θέτουμε

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}x^j,\ x\in\mathbb{R}\quad (i=1,\dots,s),$$

οπότε για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ θα είναι

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x}+\dots+P_s(x)e^{\lambda_s x} = 0.$$

Ένα τουλάχιστο απ' τα πολυώνυμα P_i $(i=1,\dots,s)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα δείκτη $\mu\in\{1,\dots,s\}$ τέτοιον ώστε $P_\mu\neq 0$ και (γιά $\mu<s$) $P_{\mu+1}=\dots=P_s=0$. Αν $\mu=1$, τότε

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

το οποίο οδηγεί στο άτοπο $P_1=0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mu>1$. Τότε για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x}+\dots+P_\mu(x)e^{\lambda_\mu x} = 0$$

και επομένως

$$P_1(x)+P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\dots+P_\mu(x)e^{(\lambda_\mu-\lambda_1)x} = 0.$$

Παραγωγίζοντας τόσες φορές την παραπάνω ισότητα ώστε να μηδενισθεί ο πρώτος όρος του αθροίσματος, παίρνουμε μια σχέση της μορφής

$$Q_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\dots+Q_\mu(x)e^{(\lambda_\mu-\lambda_1)x} = 0$$

ή

$$Q_2(x)e^{\lambda_2 x}+\dots+Q_\mu(x)e^{\lambda_\mu x} = 0$$

για $x\in\mathbb{R}$, όπου $Q_2,\dots,Q_\mu$ είναι πολυώνυμα με τους ίδιους βαθμούς με τα $P_2,\dots,P_\mu$ αντίστοιχα και το Q_μ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αν $\mu=2$, τότε οδηγούμαστε στο άτοπο $Q_\mu=0$. Αν $\mu>2$, τότε, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία (όσες φορές χρειάζεται), φθάνουμε τελικά σε μια σχέση

$$R_\mu(x)e^{\lambda_\mu x} = 0$$

για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, όπου R_μ είναι ένα πολυώνυμο του ίδιου βαθμού με το P_μ και όχι το μηδενικό πολυώνυμο. Αυτό όμως είναι ένα άτοπο, που οφείλεται στην υπόθεση ότι οι συναρτήσεις y_{ij} $(j=0,1,\ldots,m_i-1;$ $i=1,\ldots,s)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Απ'το Θεώρημα 19 προκύπτει ότι, αν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ είναι διακεκριμμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), τότε ένα βασικό σύνολο λύσεων αυτής αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (i=1,\ldots,n).$$

Θ'ασχοληθούμε τώρα με την περίπτωση όπου οι σταθερές a_i $(i=0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι πραγματικές. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές και έτσι, αν $\sigma+i\tau$ ($\sigma,\tau \in \mathbb{R}$ και $\tau \neq 0$) είναι μια ρίζα του με πολλαπλότητα m, τότε ο συζυγής $\sigma-i\tau$ είναι επίσης μια ρίζα αυτού με την ίδια πολλαπλότητα m. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε ένα βασικό σύνολο λύσεων που ν'αποτελείται από πραγματικές συναρτήσεις (πραγματικές λύσεις). Έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 20. Ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές a_i $(i=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί. Τότε για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (E_0) ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν y είναι μια λύση, τότε $\mathrm{Re}\,y$ και $\mathrm{Im}\,y$ είναι επίσης λύσεις.

(ii) Κάθε λύση με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική.

(iii) Αν $\{y_1,\ldots,y_n\}$ είναι ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων, τότε y είναι μια πραγματική λύση αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικές σταθερές c_k $(k=1,\ldots,n)$ έτσι ώστε $y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$.

(iv) Ας είναι $\lambda_1=\sigma_1+i\tau_1,\ldots,\lambda_r=\sigma_r+i\tau_r$ με σ_i, $\tau_i \in \mathbb{R}$ και $\tau_i \neq 0$ $(i=1,\ldots,r)$ διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με πολλαπλότητες $m_1,\ldots,m_r$ αντίστοιχα, και $\lambda_{2r+1},\ldots,\lambda_s$ διακεκριμμένες πραγματικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με πολλαπλότητες $m_{2r+1},\ldots,m_s$ αντίστοιχα (οπότε $2(m_1+\ldots+m_r)+m_{2r+1}+\ldots$ $\ldots+m_s=n$). Τότε οι παρακάτω n συναρτήσεις αποτελούν ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων:

$$x^j e^{\sigma_i x}\cos\tau_i x,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } x^j e^{\sigma_i x}\sin\tau_i x,\ x\in\mathbb{R} \quad (j=0,1,\ldots,m_i-1;$$
$$i=1,\ldots,r);$$

$$x^j e^{\lambda_i x},\ x\in\mathbb{R}\ \ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=2r+1,\dots,s).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Ας είναι y μια λύση της (E_0). Τότε

$$0=L(y)=L(\mathrm{Re}\,y+i\,\mathrm{Im}\,y)=L(\mathrm{Re}\,y)+i\,L(\mathrm{Im}\,y)$$

και επομένως

$$\mathrm{Re}\,y=0 \ \text{ και } \ \mathrm{Im}\,y=0.$$

(ii) Θεωρούμε μια λύση y με

$$y(x_0)=\alpha_0,\ y'(x_0)=\alpha_1,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1},$$

όπου $x_0\in\mathbb{R}$ και $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε $z=\mathrm{Im}\,y$ είναι μια λύση που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$z(x_0)=0,\ z'(x_0)=0,\dots,z^{(n-1)}(x_0)=0.$$

'Ετσι, z είναι η μηδενική λύση (Θεώρημα 1) και επομένως η y είναι πραγματική.

(iii) Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων και y μια πραγματική λύση. Τότε $y=c_1y_1+\dots+c_ny_n$, όπου $c_1,\dots$ $\dots,c_n$ είναι σταθερές. 'Εχομε $0=\mathrm{Im}\,y=(\mathrm{Im}\,c_1)y_1+\dots+(\mathrm{Im}\,c_n)y_n$ και επομένως $\mathrm{Im}\,c_1=\dots=\mathrm{Im}\,c_n=0$, δηλαδή οι σταθερές $c_1,\dots,c_n$ είναι πραγματικές.

(iv) Οι αριθμοί $\lambda_{r+1}=\sigma_1-i\tau_1,\dots,\lambda_{r+r}=\sigma_r-i\tau_r$ είναι επίσης ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου με πολλαπλότητες $m_1,\dots,m_r$ αντίστοιχα. Σύμφωνα, με το Θεώρημα 19, οι συναρτήσεις

$$x^j e^{\lambda_i x},\ x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ x^j e^{\lambda_{r+i} x},\ x\in\mathbb{R}\ \ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,r);$$

$$x^j e^{\lambda_i x},\ x\in\mathbb{R}\ \ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=2r+1,\dots,s)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (E_0). Για οποιοδήποτε $i\in\{1,\dots,r\}$ και για τυχόν $j\in\{0,1,\dots,m_i-1\}$ έχουμε

$$x^j e^{\sigma_i x}\cos\tau_i x=\frac{1}{2}(x^j e^{\lambda_i x}+x^j e^{\lambda_{r+i} x}),\quad x\in\mathbb{R},$$

$$x^j e^{\sigma_i x}\sin\tau_i x=\frac{1}{2i}(x^j e^{\lambda_i x}-x^j e^{\lambda_{r+i} x}),\ x\in\mathbb{R}$$

και επομένως οι συναρτήσεις $x^j e^{\sigma_i x}\cos\tau_i x$, $x\in\mathbb{R}$ και $x^j e^{\sigma_i x}\sin\tau_i x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι (Θεώρημα 3) επίσης λύσεις της (E_0) και μάλιστα πραγματικές. Τώρα, θ'αποδείξουμε ότι οι λύσεις

$$x^j e^{\sigma_i x}\cos\tau_i x,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } x^j e^{\sigma_i x}\sin\tau_i x,\ x\in\mathbb{R}\ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,r);$$

$$x^j e^{\lambda_i x},\ x\in\mathbb{R}\ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=2r+1,\dots,s)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Θεωρούμε τις σταθερές c_{ij} $(j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,r)$, d_{ij} $(j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,r)$ και h_{ij} $(j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=2r+1,\dots,s)$ και υποθέτουμε ότι για $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij}x^j e^{\sigma_i x}\cos\tau_i x+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{m_i-1} d_{ij}x^j e^{\sigma_i x}\sin\tau_i x+\sum_{i=2r+1}^{s}\sum_{j=0}^{m_i-1} h_{ij}x^j e^{\lambda_i x}=0$$

Τότε για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{m_i-1}\left(\frac{c_{ij}-id_{ij}}{2}x^j e^{\lambda_i x}+\frac{c_{ij}+id_{ij}}{2}x^j e^{\lambda_{r+i} x}\right)+\sum_{i=2r+1}^{s}\sum_{j=0}^{m_i-1} h_{ij}x^j e^{\lambda_i x}=0$$

απ'όπου προκύπτει

$$\frac{c_{ij}-id_{ij}}{2}=0 \text{ και } \frac{c_{ij}+id_{ij}}{2}=0\ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,r);$$

$$h_{ij}=0\ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=2r+1,\dots,s).$$

'Ετσι, έχουμε

$$c_{ij}=d_{ij}=0\ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=1,\dots,r);$$
$$h_{ij}=0\ (j=0,1,\dots,m_i-1;\ i=2r+1,\dots,s).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 20, αν οι συντελεστές a_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί και αν $\lambda_1=\sigma_1+i\tau_1,\dots,\lambda_r=\sigma_r+i\tau_r$ με $\sigma_i,\tau_i\in\mathbb{R}$ και $\tau_i\neq 0$ $(i=1,\dots,r)$ είναι διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και $\lambda_{2r+1},\dots,\lambda_n$ είναι διακεκριμένες πραγματικές ρίζες αυτού, τότε οι n συναρτήσεις

$$e^{\sigma_i x}\cos\tau_i x,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } e^{\sigma_i x}\sin\tau_i x,\ x\in\mathbb{R}\ (i=1,\dots,r);\ e^{\lambda_j x},\ x\in\mathbb{R}\ (j=2r+1,\dots,n)$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (E_0).

Τέλος, ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$(E_0)_2 \qquad\qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=0,$

όπου a_2,a_1 και a_0 είναι πραγματικές σταθερές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $p(\lambda)=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$. Διακρίνουμε τις εξής τρείς περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τις άνισες πραγματικές ρίζες $(a_1^2-4a_2a_0>0)$

$$\lambda_1=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}, \quad \lambda_2=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Τότε οι συναρτήσεις $e^{\lambda_1 x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $e^{\lambda_2 x}$, $x\in\mathbb{R}$ αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων.

Περίπτωση 2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει την διπλή πραγματική ρίζα $(a_1^2-4a_2a_0=0)$

$$\lambda_0=-\frac{a_1}{2a_2}.$$

Στην περίπτωση αυτή ένα βασικό σύνολο λύσεων αποτελούν οι συναρτήσεις $e^{\lambda_0 x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $xe^{\lambda_0 x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Περίπτωση 3. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τις δύο συζυγείς ρίζες $(a_1^2-4a_2a_0<0)$

$$\lambda_1=\frac{-a_1+i\sqrt{4a_2a_0-a_1^2}}{2a_2}\equiv\sigma+i\tau, \quad \lambda_2=\frac{-a_1-i\sqrt{4a_2a_0-a_1^2}}{2a_2}\equiv\sigma-i\tau.$$

Τότε οι συναρτήσεις $e^{\sigma x}\cos\tau x$, $x\in\mathbb{R}$ και $e^{\sigma x}\sin\tau x$, $x\in\mathbb{R}$ συνιστούν ένα βασικό σύνολο λύσεων.

3.3. Η μέθοδος των αγνώστων σταθερών

Στο προηγούμενο Εδάφιο (Παράγραφος 2.3) αναπτύξαμε τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών για την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Ε). Η μέθοδος αυτή δεν προϋποθέτει ότι οι συντελεστές a_i $(i=0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι σταθερές, απαιτεί όμως να είναι γνωστό ένα βασικό σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0). Επίσης, στην υπόψη μέθοδο δεν μπαίνει κανένας περιορισμός για τη μορφή του δεύτερου μέλους b, η εφαρμογή της όμως οδηγεί στην επίλυση ενός γραμμικού (αλγεβρικού) συστήματος n εξισώσεων με n αγνώστους (εργασία ιδιαίτερα επίπονη για τα μεγάλα n) καθώς επίσης στον υπολογισμό n ολοκληρωμάτων. 'Ετσι, η μέθοδος μεταβολής των σταθερών είναι αρκετά γενική, πολύπλοκη και δύσκολη όμως σε αρκετές περιπτώσεις.

Εδώ, θ'αναπτύξουμε μια άλλη μέθοδο για την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) που εφαρμόζεται όταν η (E) έχει σταθερούς συντελεστές και το δεύτερο μέλος b έχει κάποια κατάλληλη μορφή. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως <u>μέθοδος των αγνώστων σταθερών</u> και στις περισσότερες περιπτώσεις (απ' αυτές που εφαρμόζεται) είναι πιο απλή απ' τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών. Θα παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία της μεθόδου αυτής χωρίς ιδιαίτερη ανάπτυξη. Μερικά παραδείγματα εφαρμογής της θα παραθέσουμε στην Παράγραφο 3.5.

<u>Περίπτωση I</u>: $b=P$, <u>όπου</u> $P\neq 0$ <u>είναι ένα πολυώνυμο</u>. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $k\in\{0,1,\dots,n-1,n\}$ είναι

$$a_k\neq 0 \quad \text{και} \quad (\text{όταν } k>0) \quad a_0=\dots=a_{k-1}=0.$$

Τότε αναζητούμε μια μερική λύση y_μ της διαφορικής εξίσωσης (E) τέτοια ώστε η k-τάξης παράγωγός της να είναι ένα πολυώνυμο του ίδιου βαθμού με το P, δηλαδή

$$y_\mu^{(k)}=d_mx^m+d_{m-1}x^{m-1}+\dots+d_1x+d_0, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου m είναι ο βαθμός του P και d_i $(i=0,1,\dots,m-1,m)$ είναι <u>άγνωστες σταθερές</u> που θα πρέπει να προσδιορισθούν. Παίρνοντας τις παραγώγους $y_\mu^{(j)}$ $(j=k,\dots,n)$ και θέτοντας αυτές στην (E), προκύπτει μια ισότητα δυο πολυωνύμων βαθμού m που οδηγεί σ'ένα σύστημα (αλγεβρικό) m+1 εξισώσεων με αγνώστους τα d_i $(i=0,1,\dots,m-1,m)$. Απ'το σύστημα αυτό προκύπτουν οι τιμές των d_i $(i=0,1,\dots,m-1,m)$. Τέλος, με k ολοκληρώσεις βρίσκεται μια μερική λύση y_μ.

<u>Περίπτωση II</u>: $b(x)=P(x)e^{\lambda x}$, $x\in\mathbb{R}$, <u>όπου</u> $P\neq 0$ <u>είναι ένα πολυώνυμο και</u> $\lambda\neq 0$ <u>είναι μια σταθερά</u>. Τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η αντικατάσταση

$$y(x)=z(x)e^{\lambda x}, \quad x\in\mathbb{R}$$

μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση (E) σε μια εξίσωση της μορφής

$$A_nz^{(n)}+A_{n-1}z^{(n-1)}+\dots+A_1z+A_0z=P,$$

όπου A_i $(i=0,1,\dots,n-1,n)$ είναι σταθερές και $A_n\neq 0$. 'Ετσι, αναγόμαστε στην Περίπτωση I. Αν z_μ είναι μια μερική λύση της τελευταίας εξίσωσης, η συνάρτηση $y_\mu(x) = z_\mu(x)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$ θα είναι μια μερική λύση της (E).

Περίπτωση III: $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\cos \tau x$, $x \in \mathbb{R}$ ή $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\sin\tau x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $P \neq 0$ είναι ένα πολυώνυμο και σ, τ είναι πραγματικές σταθερές με $\tau \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι $b = b_1 + b_2$, όπου αντίστοιχα

$$b_1(x) = \frac{1}{2} P(x)e^{(\sigma+i\tau)x}, \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad b_2(x) = \frac{1}{2} P(x)e^{(\sigma-i\tau)x}, \ x \in \mathbb{R}$$

ή

$$b_1(x) = \frac{1}{2i} P(x)e^{(\sigma+i\tau)x}, \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad b_2(x) = \frac{-1}{2i} P(x)e^{(\sigma-i\tau)x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, αρκεί (Θεώρημα 13) να βρεθούν μερικές λύσεις για καθεμιά απ'τις εξισώσεις $L(y) = b_1$ και $L(y) = b_2$ που είναι της Περίπτωσης II.

Περίπτωση IV. Οι συντελεστές a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι πραγματικοί και $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\cos \tau x$, $x \in \mathbb{R}$ ή $b(x) = P(x)e^{\sigma x}\sin \tau x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $P \neq 0$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και σ, τ είναι πραγματικές σταθερές με $\tau \neq 0$. Βρίσκουμε (Περίπτωση II) μια μερική λύση y_μ της διαφορικής εξίσωσης $L(y) = q$ με

$$q(x) = P(x)e^{(\sigma+i\tau)x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

οπότε (όπως εύκολα διαπιστώνεται) η συνάρτηση $\operatorname{Re} y_\mu$ ή η συνάρτηση $\operatorname{Im} y_\mu$ θα είναι αντίστοιχα μια μερική λύση της (E).

Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι, αν η b είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων όπου καθεμιά απ'αυτές έχει κάποια απ'τις μορφές των παραπάνω περιπτώσεων, τότε μπορεί να βρεθεί μια μερική λύση της (E), σύμφωνα με το Θεώρημα 13.

3.4. Διαφορικές εξισώσεις Euler

Μια διαφορική εξίσωση Euler είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \alpha_1 x \frac{dy}{dx} + \alpha_0 y = 0,$$

όπου α_i $(i = 0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι σταθερές και $\alpha_n \neq 0$. Θα θεωρήσουμε ως διάστημα ορισμού της διαφορικής αυτής εξίσωσης το διάστημα $(0,\infty)$ (αν διάστημα ορισμού είναι το $(-\infty,0)$, τότε για $w = -x$ η εξίσωση μετασχηματίζεται σε μια άλλη της ίδιας μορφής με διάστημα ορισμού το $(0,\infty)$). Η αντικατάσταση $t = \log x$, $x > 0$ μετασχηματίζει την παραπάνω διαφορική εξίσωση σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης με σταθερούς συντελεστές. Πραγματικά: Για όλα τα x>0 έχουμε

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = x\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt},$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dt} + x^2\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{dy}{dt} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$$

και γενικά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν σταθερές c_{ij} $(j=1,\ldots,i;\ i=1,\ldots,n-1,n)$ με $c_{ii}=1$ $(i=1,\ldots,n-1,n)$ και τέτοιες ώστε

$$x^i\frac{d^iy}{dx^i} = c_{i1}\frac{dy}{dt} + c_{i2}\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots + c_{ii}\frac{d^iy}{dt^i} \quad (i=1,\ldots,n-1,n).$$

Θέτοντας τις εκφράσεις αυτές στη διαφορική μας εξίσωση, παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = 0,$$

όπου a_i $(i=0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι σταθερές και $a_n = \alpha_n c_{nn} = \alpha_n \neq 0$.

Ας ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τη διαφορική εξίσωση Euler δεύτερης τάξης

$$\alpha_2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha_1x\frac{dy}{dx} + \alpha_0y = 0.$$

Η αντικατάσταση $t=\log x$, $x>0$ τη μετασχηματίζει στην εξίσωση

$$\alpha_2\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \alpha_1\frac{dy}{dt} + \alpha_0y = 0,$$

δηλαδή στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$\alpha_2\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha_1-\alpha_2)\frac{dy}{dt} + \alpha_0y = 0.$$

3.5. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθούν οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

(i) $y'+2y=0$. (ii) $y'+2y=x$.

Λύση. (i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 18, y είναι μια λύση αν και μόνο αν για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y(0)e^{-2x}.$$

'Ετσι, όλες οι λύσεις είναι $y(x)=ce^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c αυθαίρετη σταθερά.

(ii) Σύμφωνα πάλι με το Θεώρημα 18, y είναι μια λύση αν και μόνο αν

$$y(x) = e^{-2x}\left[y(0)+\int_0^x te^{2t}dt\right] = e^{-2x}\left[y(0) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ (2x+1)e^{2x}\right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. 'Αρα οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο $y(x)=ce^{-2x} + \frac{1}{4}(2x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθούν οι παρακάτω ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y''' -4y''+y'+6y = 0$. (iii) $y''' -3y''+4y'-2y = 0$.

(ii) $y''' -y''-y'+y = 0$. (iv) $y^{(4)}+2y''+y = 0$.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ το Θεώρημα 20.

(i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $p(\lambda) = \lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ με τις απλές ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3$. 'Ετσι, οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

(ii) Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$ και βλέπουμε ότι αυτό έχει τη διπλή ρίζα $\lambda_1 = 1$ και την απλή ρίζα $\lambda_2 = -1$, γιατί γράφεται $p(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$. 'Αρα, οι λύσεις είναι

$$y(x) = c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x} = (c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

(iii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2 = (\lambda-1)\cdot(\lambda^2-2\lambda+2)$ έχει τις απλές ρίζες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$ και $\lambda_3 = 1-i$. Επομένως, οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1e^x+c_2e^x\cos x+c_3e^x\sin x = e^x(c_1+c_2\cos x+c_3\sin x), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

(iv) Εδώ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $p(\lambda) = \lambda^4+2\lambda^2+1 = (\lambda^2+1)^2$ το οποίο έχει τις διπλές ρίζες $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$. 'Ετσι, οι λύσεις είναι

$$y=c_1\cos x+c_2x\cos x+c_3\sin x+c_4x\sin x=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x\,,\quad x\in\mathbb{R}\,,$$

όπου c_1, c_2, c_3 και c_4 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί μια μερική λύση για καθεμιά απ'τις παρακάτω μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y^{(4)}+y''=x^3+1$. (iv) $y''-2y'+y=xe^{-x}\cos 2x$.

(ii) $y'''+2y'+y=2x^2-x$. (v) $y''-2y'+y=xe^{-x}\sin 2x$.

(iii) $y'''+y''+2y=x^2e^{-2x}$. (vi) $y''-4y'+4y=e^x+\sin x$.

<u>Λύση</u>. (i) Αναζητούμε μια μερική λύση y_μ τέτοια ώστε

$$y''_\mu(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\quad x\in\mathbb{R}\,,$$

όπου οι συντελεστές α,β,γ και δ θα προσδιορισθούν. Θα είναι για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$(6\alpha x+2\beta)+(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)=x^3+1$$

ή

$$\alpha x^3+\beta x^2+(6\alpha+\gamma)x+(2\beta+\delta)=x^3+1,$$

οπότε

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ 6\alpha+\gamma=0 \text{ και } 2\beta+\delta=1,$$

δηλαδή $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-6$ και $\delta=1$. Έχουμε λοιπόν

$$y''_\mu(x)=x^3-6x+1,\quad x\in\mathbb{R}$$

και άρα μια μερική λύση είναι

$$y_\mu(x)=\frac{1}{20}x^5-x^3+\frac{1}{2}x^2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

(ii) $y_\mu(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $x\in\mathbb{R}$, όπου α,β και γ είναι σταθερές, θα είναι μια μερική λύση αν και μόνο αν

$$2(2\alpha x+\beta)+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^2-x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha=2,\ 4\alpha+\beta=-1 \text{ και } 2\beta+\gamma=0,$$

το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=2$, $\beta=-9$ και $\gamma=18$. Έτσι, μια μερική λύση είναι η

$$y_\mu(x)=2x^2-9x+18,\quad x\in\mathbb{R}$$

(iii) Εκτελούμε το μετασχηματισμό $y=ze^{-2x}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$(z''' -6z''+12z'-8z)e^{-2x}+(z''-4z'+4z)e^{-2x}+2ze^{-2x} = x^2e^{-2x}$$

ή

$$z''' -5z''+8z'-2z = x^2.$$

Για την τελευταία εξίσωση αναζητούμε μια μερική λύση z_μ της μορφής $z_\mu(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α,β,γ είναι σταθερές. Τότε βρίσκουμε εύκολα ότι $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -4$ και $\gamma = -\frac{27}{2}$ και έτσι έχουμε

$$z_\mu(x) = -\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{27}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μια μερική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η

$$y_\mu(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{27}{2}\right)e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(iv) και (v). Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

(*) $$y''-2y'+y = xe^{(-1+2i)x}.$$

Ο μετασχηματισμός $y = ze^{(-1+2i)x}$ μετασχηματίζει αυτή στην εξίσωση

$$[z''+2(-1+2i)z'+(-1+2i)^2z]e^{(-1+2i)x}-2[z'+(-1+2i)z]e^{(-1+2i)x}+$$
$$+ze^{(-1+2i)x} = xe^{(-1+2i)x}$$

ή (μετά από πράξεις)

$$z''+4(-1+i)z'-8iz = x.$$

Αναζητούμε μια μερική λύση z_μ αυτής της μορφής $z_\mu(x) = \alpha x+\beta$, $x \in \mathbb{R}$ (α,β σταθερές), οπότε βρίσκουμε

$$z_\mu(x) = \frac{1}{8}ix+\frac{1}{16}(-1+i), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μια μερική λύση y_μ της (*) είναι

$$y_\mu(x) = \left[\frac{1}{8}ix+\frac{1}{16}(-1+i)\right]e^{(-1+2i)x} = \left[-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)i\right]e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$$= e^{-x}\left[-\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin 2x\right]+ie^{-x}\left[-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right]$$

για $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, η συνάρτηση

$$u_\mu(x) = e^{-x}\left[-\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin 2x\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι μια μερική λύση της (iv), ενώ η

$$v_\mu(x) = e^{-x}\left[-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι μια μερική λύση της (v).

(vi) Βρίσκουμε τη μερική λύση $y_\mu^1(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ της διαφορικής εξίσωσης

$$y''-4y'+4y = e^x$$

και τη μερική λύση $y_\mu^2(x) = \frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$ της εξίσωσης

$$y''-4y'+4y = \sin x\ .$$

Τότε (Θεώρημα 13) μια μερική λύση της εξίσωσής μας είναι η

$$y_\mu(x) = y_\mu^1(x)+y_\mu^2(x) = e^x + \frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x)\ ,\quad x \in \mathbb{R}\ .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''' +y' = 2+\sin x\ .$$

Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0) = 0,\ y_0'(0) = 1 \text{ και } y_0''(0) = -1.$$

<u>Λύση</u>. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι $p(\lambda) = \lambda^3+\lambda = \lambda(\lambda^2+1)$ που έχει τις απλές ρίζες $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ και $\lambda_3 = -i$. Έτσι, οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι

$$\tilde{y}(x) = c_1+c_2\cos x+c_3\sin x,\quad x \in \mathbb{R}\ ,$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Θα βρούμε τώρα μια μερική λύση y_μ της μη ομογενούς διαφορικής μας εξίσωσης. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$(*) \qquad y''' +y' = 2$$

και

$$(**) \qquad y''' +y' = \sin x\ .$$

Αναζητώντας μια μερική λύση y_1 της (*) τέτοια ώστε $y_1'(x) = \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ (α σταθερά), βρίσκουμε ότι $\alpha = 2$ και άρα μια μερική λύση της (*) είναι η $\bar{y}_1(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, θα βρούμε μια μερική λύση της εξίσωσης (**). Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$(***) \qquad y''' +y' = e^{ix}.$$

Ο μετασχηματισμός $y = ze^{ix}$ την μετασχηματίζει στην εξίσωση

$$z''' +3iz''-2z' = 1$$

που έχει, όπως εύκολα προκύπτει, τη μερική λύση $z_\mu(x) = -\frac{1}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$. Μια μερική λύση της εξίσωσης (***) είναι η

$$-\frac{1}{2}xe^{ix} = -\frac{1}{2}x(\cos x + i\sin x),\quad x \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, η διαφορική εξίσωση (**) έχει τη μερική λύση $y_2(x) = -\frac{1}{2}x\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, μια μερική λύση y_μ της διαφορικής μας εξίσωσης είναι η

$$y_\mu(x) = y_1(x) + y_2(x) = 2x - \frac{1}{2}x\sin x,\quad x \in \mathbb{R}.$$

'Ολες οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + 2x - \frac{1}{2}x\sin x,\quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2, c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Ειδικά, για τη λύση y_0 παίρνουμε

$$c_1 + c_2 = 0,\quad c_3 + 2 = 1 \text{ και } -c_2 - 1 = -1,$$

δηλαδή $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ και $c_3 = -1$. 'Ετσι, είναι

$$y_0(x) = -\sin x + 2x - \frac{1}{2}x\sin x,\quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{x}e^x,\quad x > 0.$$

<u>Λύση</u>. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x) = e^x$, $x > 0$ και $y_2(x) = xe^x$, $x > 0$. Για να βρούμε μια μερική λύση y_μ της μη ομογενούς εξίσωσής μας θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών (η μέθοδος των αγνώστων σταθερών δεν μπορεί να εφαρμοσθεί εδώ). Το σύστημα (για $x > 0$)

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1(x) + v_2'(x)y_2(x) = 0 \\ v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = \frac{1}{x}e^x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} v_1'(x)e^x + v_2'(x)xe^x = 0 \\ v_1'(x)e^x + v_2'(x)(x+1)e^x = \frac{1}{x}e^x \end{cases}$$

έχει τη λύση

$$v_1'(x) = -1 \text{ και } v_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

'Ετσι, παίρνουμε

$$v_1(x) = -x \text{ και } v_2(x) = \log x \text{ για } x > 0.$$

Μια μερική λύση y_μ της διαφορικής εξίσωσής μας είναι

$$y_\mu(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) = xe^x(\log x - 1),\quad x > 0.$$

'Ολες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + xe^x(\log x - 1) = e^x[C_1 + x(C_2 + \log x)], \quad x > 0,$$

όπου $C_1 = c_1$, $C_2 = c_2 - 1$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση Euler

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = 0, \quad x > 0.$$

<u>Λύση</u>. Θέτουμε $t = \log x$, $x > 0$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\right] = -\frac{2}{x^3}\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(2\frac{dy}{dt} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3}\right)$$

και έτσι η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\left(2\frac{dy}{dt} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3}\right) - \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2\frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

ή

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

που έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις e^{4t}, $t \in \mathbb{R}$; $\cos t$, $t \in \mathbb{R}$ και $\sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Η αρχική εξίσωση έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$y_1(x) = x^4$, $x > 0$; $y_2(x) = \cos(\log x)$, $x > 0$ και $y_3(x) = \sin(\log x)$, $x > 0$

και άρα όλες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1x^4 + c_2\cos(\log x) + c_3\sin(\log x), \quad x > 0,$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

3.6. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $2y''+3y'+y=0$.
(ii) $y''+6y=0$.
(iii) $y^{(4)}+y'''-3y''-y'+2y=0$.
(iv) $y''-9y=0$.
(v) $y'''-7y''+5y'+y=0$.
(vi) $y'''-6y''+12y'=0$.
(vii) $y''-iy'+12y=0$.
(viii) $y'''-13y'-12y=0$.

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''-2y'+y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
(ii) $y'''-y''=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$, $y''(0)=2$.
(iii) $y''+4y=0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.
(iv) $y'''-y''-y'+y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=5$, $y''(0)=2$.
(v) $y''+y'+y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=\sqrt{3}$.

3. Να επιλυθούν οι μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y''-5y'+6y=x^2+3$.
(ii) $y''+4y'+4y=e^x+e^{-x}$.
(iii) $y^{(4)}-y=x^2$.
(iv) $y''-y=x\sin x$.
(v) $y'''-3y''+3y'-y=x^2+5e^x$.
(vi) $y''-3y'+2y=e^{-x}\cos x$.
(vii) $y^{(6)}-3y^{(4)}=1$.
(viii) $y'''-4y''+5y'-2y=3x^2e^x+\cos x$.
(ix) $y^{(4)}+y=x^2\sin 2x+x^4e^{2x}$.
(x) $y^{(4)}+2y''+y=x^2\cos 3x$.

4. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''+y=x+2e^{-x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.
(ii) $y'''+y'=x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$.
(iii) $y''-4y'+4y=e^{2x}$; $y(0)=y'(0)=0$.
(iv) $y''+y=3x^2-4\sin x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

5. Να επιλυθούν οι μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y'''-y=3\log x$, $x>0$.
(ii) $y''+10y'+25y=\dfrac{e^{-5x}\log x}{x^2}$, $x>0$.

(iii) $y''-2y'+y=e^{2x}/(e^x+1)^2$.

(iv) $y''+2y'+y=x^{-2}e^{-x}\log x, \quad x>0$.

6. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις Euler:

(i) $x^2y''-xy'+y=0, \quad x>0$.

(ii) $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0, \quad x<0$.

(iii) $(x-2)^2y''-(x-2)y'+y=0, \quad x>2$.

(iv) $(x+3)^3y'''+3(x+3)^2y''-2(x+3)y'+2y=0, \quad x<-3$.

(v) $x^5y^{(5)}-2x^3y'''+4x^2y''=0, \quad x>0$.

7. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $x^2y''-xy'+y=0$; $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

(ii) $x^3y'''+4x^2y''-8xy'+8y=0$; $y(-1)=0$, $y'(-1)=1$, $y''(-1)=0$.

8. Να επιλυθούν οι μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $5x^2y''-3xy'+3y=x^{1/2}, \quad x>0$.

(ii) $x^2y''+5xy'+4y=(x^{-3}+x^{-5})\log x, \quad x>0$.

(iii) $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=x^2\log x, \quad x>0$.

9. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z=\frac{x}{\sin x}y$, να βρεθεί η λύση y της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$xy''+2y'+xy=0, \quad x\in(0,\tfrac{\pi}{2})$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{και} \quad y'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=1.$$

10. Με το μετασχηματισμό $t=\sin x$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\sin^2x)y''+(\operatorname{tg}x)y'+k^2(\cos^2x)y=0, \quad x\in(0,\tfrac{\pi}{2}) \quad (k>0).$$

11. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+4xy'+(2+x^2)y=x^2, \quad x>0,$$

με τη βοήθεια της αντικατάστασης $z=x^2y$.

12. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y=ze^{x^2}$, να επιλυθεί η

μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''-4xy'+(4x^2-1)y=e^{x^2}.$$

4. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ. ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Εδάφιο αυτό θα υποτίθεται ότι, <u>για κάθε</u> $k \in \{1,\dots,n-1,n\}$, <u>η συνάρτηση</u> a_k <u>έχει συνεχή παράγωγο</u> k-<u>τάξης στο διάστημα</u> I. Θα δώσουμε μερικές ιδιότητες που έχει ο τελεστής L^* σε συνδυασμό με τον τελεστή L. Έτσι, θ'αποδείξουμε την ταυτότητα του Lagrange (Θεώρημα 21) και τον τύπο του Green (Θεώρημα 22). Επίσης, θ'αποδείξουμε (Θεώρημα 23) ότι, αν είναι γνωστή μια λύση της συζυγούς διαφορικής εξίσωσης (E_0^*) που δεν μηδενίζεται πουθενά στο I, τότε οι λύσεις της (E_0) προκύπτουν απ'την επίλυση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (n-1)-τάξης. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τις αυτοσυζυγείς ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με πραγματικούς συντελεστές και θα δώσουμε (Θεωρήματα 24 και 25) τη μορφή αυτών. Στο τέλος, θα παραθέσουμε μερικά παραδείγματα και θα δώσουμε ορισμένες ασκήσεις για λύση.

4.1. Η ταυτότητα του Lagrange και ο τύπος του Green

Για δύο συναρτήσεις u και v που έχουν παραγώγους n-τάξης στο I, εισάγουμε το συμβολισμό

$$[uv]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}u^{(k-j)}(a_k\bar{v})^{(j-1)}.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 21</u> (<u>Ταυτότητα του Lagrange</u>). <u>Αν</u> u <u>και</u> v <u>είναι δύο συναρτήσεις που έχουν παραγώγους</u> n-<u>τάξης στο</u> I, <u>τότε</u>

$$\bar{v}L(u)-u\overline{L^*(v)}=[uv]'.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι k ένας δείκτης με $1\le k\le n$ και U,V δύο συναρτήσεις που έχουν παραγώγους k-τάξης στο I. Τότε ισχύει

$$VU^{(k)} = (-1)^k UV^{(k)} + \left[\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} U^{(k-j)} V^{(j-1)}\right]'.$$

Πραγματικά, για $k=1$ αυτό είναι φανερό ενώ για $k>1$ παίρνουμε

$$\left[\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} U^{(k-j)} V^{(j-1)}\right]' = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} [U^{(k-j)} V^{(j-1)}]'$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} [U^{(k-j+1)} V^{(j-1)} + U^{(k-j)} V^{(j)}] = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} U^{(k-j+1)} V^{(j-1)} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} U^{(k-j)} V^{(j)}$$

$$= \left[U^{(k)} V + \sum_{j=2}^{k} (-1)^{j-1} U^{(k-j+1)} V^{(j-1)}\right] + \left[\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} U^{(k-j)} V^{(j)} + (-1)^k UV^{(k)}\right]$$

$$= [U^{(k)} V + (-1)^k UV^{(k)}] + \left[\sum_{j=2}^{k} (-1)^{j-1} U^{(k-j+1)} V^{(j-1)} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} U^{(k-j)} V^{(j)}\right]$$

$$= U^{(k)} V + (-1)^k UV^{(k)}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον παραπάνω τύπο για $U=u$, $V=a_k\overline{v}$ και για $k = 1,\dots,n$, έχουμε

$$\overline{v}L(u) = \overline{v}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k u^{(k)} + a_0 u\right] = \sum_{k=1}^{n} (a_k\overline{v}) u^{(k)} + (a_0\overline{v}) u$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{(-1)^k u (a_k\overline{v})^{(k)} + \left[\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} u^{(k-j)} (a_k\overline{v})^{(j-1)}\right]'\right\} + (a_0\overline{v}) u$$

$$= u\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (a_k\overline{v})^{(k)} + a_0\overline{v}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} u^{(k-j)} (a_k\overline{v})^{(j-1)}\right]'$$

$$= u\overline{\left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k (\overline{a}_k v)^{(k)} + \overline{a}_0 v\right]} + [uv]' = u\overline{L^*(v)} + [uv]'.$$

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 21 είναι το ακόλουθο συμπέρασμα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 22</u> (<u>Τύπος του Green</u>). <u>Αν</u> u <u>και</u> v <u>είναι δύο συναρτήσεις που έχουν συνεχείς παραγώγους</u> n-<u>τάξης στο</u> I, <u>τότε για κάθε</u> $x_1, x_2 \in I$ <u>ισχύει</u>

$$\int_{x_1}^{x_2} [\overline{v}L(u) - u\overline{L^*(v)}](x)\,dx = [uv](x_2) - [uv](x_1).$$

Το παρακάτω Θεώρημα δίνει μια μέθοδο για τον υποβιβασμό της τάξης της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), αν είναι γνωστή μια λύση της συζυγούς διαφορικής εξίσωσης (E_0^*) που δεν μηδενίζεται πουθενά στο I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 23. Ας είναι g μια λύση της συζυγούς διαφορικής εξίσωσης (E_0^*) με $g(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Τότε y είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) αν και μόνο αν η y έχει παράγωγο n τάξης στο I και είναι λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (n-1)-τάξης

$$[yg] = c$$

για κάποια σταθερά c.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η g είναι μια λύση της (E_0^*), θα είναι $L^*(g) = 0$. Έτσι, αν y είναι μια συνάρτηση με παράγωγο n-τάξης στο I, τότε θα είναι (Θεώρημα 21)

$$[yg]' = \overline{g}L(y) - y\overline{L^*(g)} = \overline{g}L(y).$$

Αν λοιπόν y είναι μια λύση της (E_0), τότε $L(y) = 0$ και άρα $[yg]'=0$ που σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $[yg] = c$. Αντίστροφα, όταν y είναι μια λύση της γραμμικής εξίσωσης $[yg] = c$, c σταθερά, και έχει παράγωγο n-τάξης στο I, θα είναι $[yg]' = 0$ και επομένως $L(y) = 0$, δεδομένου ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

4.2. Αυτοσυζυγείς ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Θα περιορισθούμε εδώ στην περίπτωση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$(E_0)_2 \qquad a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

όπου θα υποτίθεται ότι οι συντελεστές a_0, a_1 και a_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις (και βέβαια ότι, στο διάστημα I, η a_1 έχει συνεχή παράγωγο πρώτης τάξης και η a_2 έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης) Στην περίπτωση αυτή, αν φ είναι μια συνάρτηση με παράγωγο δεύτερης τάξης στο I, θα έχουμε

$$\begin{aligned} L^*(\varphi) &= (a_2\varphi)'' - (a_1\varphi)' + a_0\varphi = (a_2\varphi'' + 2a_2'\varphi' + a_2''\varphi) - (a_1\varphi' + a_1'\varphi) + a_0\varphi \\ &= a_2\varphi'' + (2a_2' - a_1)\varphi' + (a_2'' - a_1' + a_0)\varphi. \end{aligned}$$

Έτσι, η συζυγής διαφορική εξίσωση της $(E_0)_2$ είναι η

$$(E_0^*)_2 \qquad a_2y''+(2a_2'-a_1)y'+(a_2''-a_1'+a_0)y=0.$$

Το παρακάτω Θεώρημα δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $(E_0)_2$ να είναι αυτοσυζυγής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24. Η $(E_0)_2$ είναι μια αυτοσυζυγής ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση αν και μόνο αν $a_2'=a_1$, δηλαδή αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί ως εξής

$$(a_2y')'+a_0y=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι διαφορικές εξισώσεις $(E_0)_2$ και $(E_0^*)_2$ ταυτίζονται αν και μόνο αν $2a_2'-a_1=a_1$ και $a_2''-a_1'+a_0=a_0$, ή ισοδύναμα $a_2'=a_1$ και $a_2''=a_1'$. Οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες με την ισότητα $a_2'=a_1$. Τώρα, αν $a_2'=a_1$, τότε η $(E_0)_2$ γράφεται $a_2y''+a_2'y'+a_0y=0$ ή $(a_2y')'+$ $+a_0y=0$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $(E_0)_2$ μπορεί να πάρει τη μορφή $(a_2y')'+a_0y=0$. Τότε αυτή γράφεται $a_2y''+a_2'y+a_0y=0$ και άρα $a_2'=a_1$.

Το παρακάτω Θεώρημα εξασφαλίζει ότι οποιαδήποτε ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μπορεί να μετασχηματισθεί σε μια ισοδύναμη διαφορική εξίσωση της μορφής $(Py')'+Qy=0$, όπου P είναι μια θετική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο I και Q είναι μια συνεχής συνάρτηση στο I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 25. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$A_2y''+A_1y'+A_0y=0,$$

όπου A_0, A_1, A_2 είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα I και $A_2(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I και

$$P(x)=\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{A_1(t)}{A_2(t)}\,dt\right],\ x\in I;\quad Q(x)=\frac{A_0(x)}{A_2(x)}\exp\left[\int_{x_0}^{x}\frac{A_1(t)}{A_2(t)}\,dt\right],\quad x\in I.$$

Τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(Py')'+Qy=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση P είναι θετική και έχει παράγωγο συνεχή στο I και $P' = (A_1/A_2)P$. Επίσης, η Q είναι συνεχής στο I και $Q = (A_0/A_2)P$. Η διαφορική μας εξίσωση γράφεται

$$Py''+P(A_1/A_2)y'+P(A_0/A_2)y = 0$$

ή

$$Py''+P'y'+Qy = 0,$$

οπότε

$$(Py')'+Qy = 0.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό μας, η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $(E_0)_2$ είναι αυτοσυζυγής όταν ταυτίζεται με την συζυγή της διαφορική εξίσωση. Για να έχει νόημα αυτός ο ορισμός υποθέσαμε ότι η συνάρτηση a_1 έχει συνεχή παράγωγο στο I και η a_2 έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο I. Αποδείξαμε δε ότι η $(E_0)_2$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $a_2' = a_1$, δηλαδή αν και μόνο αν αυτή γράφεται στη μορφή $(a_2y)'+a_0y = 0$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια των αυτοσυζυγών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης ορίζοντας ότι η $(E_0)_2$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν η a_2 έχει συνεχή παράγωγο στο I και $a_2' = a_1$, ή ισοδύναμα αν και μόνο αν αυτή γράφεται $(a_2y)'+a_0y = 0$ όπου η a_2 έχει συνεχή παράγωγο στο I. Σύμφωνα με το Θεώρημα 25, κάθε ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μπορεί να μετασχηματισθεί σε μια ισοδύναμη αυτοσυζυγή (με τη γενικότερη έννοια) διαφορική εξίσωση.

4.3. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί η συζυγής διαφορική εξίσωση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y''+7xy'+8y = 0, \quad x > 0$$

και να επαληθευθεί η ταυτότητα του Lagrange.

Λύση. Η συζυγής διαφορική εξίσωση είναι

$$(x^2y)''-(7xy)'+8y = 0$$

ή

$$(x^2y''+4xy'+2y)-(7xy'+7y)+8y = 0,$$

δηλαδή

$$x^2y''-3xy'+3y = 0.$$

Αν u και v είναι δύο συναρτήσεις που έχουν παραγώγους δεύτερης τάξης στο διάστημα $(0,\infty)$, τότε για όλα τα $x>0$ παίρνουμε

$$[\overline{v}L(u)-u\overline{L^*(v)}](x)=\overline{v(x)}[x^2u''(x)+7xu'(x)+8u(x)]-$$
$$-u(x)\overline{[x^2v''(x)-3xv'(x)+3v(x)]}$$
$$=x^2[u''(x)\overline{v(x)}-u(x)\overline{v''(x)}]+x[7u'(x)\overline{v(x)}+3u(x)\overline{v'(x)}]$$
$$+5u(x)\overline{v(x)}$$

και

$$[uv]'(x)=\{u(x)[7x\overline{v(x)}]+u'(x)[x^2\overline{v(x)}]-u(x)[x^2\overline{v(x)}]'\}'$$
$$=\{x^2[u'(x)\overline{v(x)}-u(x)\overline{v'(x)}]+5xu(x)\overline{v(x)}\}'$$
$$=x^2[u''(x)\overline{v(x)}-u(x)\overline{v''(x)}]+2x[u'(x)\overline{v(x)}-u(x)\overline{v'(x)}]$$
$$+5x[u'(x)\overline{v(x)}+u(x)\overline{v'(x)}]+5u(x)\overline{v(x)}$$
$$=x^2[u''(x)\overline{v(x)}-u(x)\overline{v''(x)}]+x[7u'(x)\overline{v(x)}+3u(x)\overline{v'(x)}]+5u(x)\overline{v(x)}$$

και έτσι επαληθεύεται η ταυτότητα του Lagrange.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+7xy'+8y=0,\quad x>0,$$

αφού διαπιστωθεί ότι $g(x)=x$, $x>0$ είναι μια λύση της συζυγούς διαφορικής εξίσωσης.

Λύση. Η συζυγής διαφορική εξίσωση είναι (Παράδειγμα 1) $x^2y''-3xy'+3y=0$, η οποία έχει τη λύση $g(x)=x$, $x>0$. Αν u είναι μια συνάρτηση με παράγωγο δεύτερης τάξης στο $(0,\infty)$, τότε για κάθε $x>0$ έχουμε

$$[ug](x)=u(x)[7x\overline{g(x)}]+u'(x)[x^2\overline{g(x)}]-u(x)[x^2\overline{g(x)}]'=x^3u'(x)+4x^2u(x).$$

Ας είναι c μια αυθαίρετη σταθερά και ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $[yg]=c$, δηλαδή την εξίσωση

$$x^3y'+4x^2y=c.$$

Αυτή γράφεται $(x^4y)'=c$ και άρα όλες οι λύσεις της δίνονται απ'τον τύπο $x^4y=cx+C$, όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 23, συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y(x)=cx^{-3}+Cx^{-4},\quad x>0$$

για τις διάφορες τιμές των αυθαιρέτων σταθερών c και C.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ν'αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση του Legendre

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \quad x\in(-1,1) \quad (n \text{ σταθερά})$$

είναι αυτοσυζυγής.

Λύση. Έχουμε $(1-x^2)'=-2x$ για $x\in(-1,1)$ και άρα η διαφορική εξίσωση είναι αυτοσυζυγής (Θεώρημα 24). Αυτή γράφεται

$$[(1-x^2)y']'+n(n+1)y=0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''-2xy'+2y=0, \quad x>0$$

να γραφεί στη μορφή $(Py')'+Qy=0$, όπου P να είναι μια θετική και με συνεχή παράγωγο συνάρτηση στο διάστημα $(0,\infty)$ και Q να είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $(0,\infty)$.

Λύση. Παίρνουμε

$$P(x)=\exp\left(\int_1^x \frac{-2x}{x^2}\,dx\right)=\exp(-2\log x)=\frac{1}{x^2}, \quad x>0$$

και

$$Q(x)=\frac{2}{x^2}\exp\left(\int_1^x \frac{-2x}{x^2}\,dx\right)=\frac{2}{x^4}, \quad x>0.$$

Οι συναρτήσεις P και Q ικανοποιούν τις παραπάνω απαιτήσεις και η διαφορική μας εξίσωση γράφεται (Θεώρημα 25) στη μορφή $(Py')'+Qy=0$, δηλαδή

$$\left(\frac{y'}{x^2}\right)'+\frac{2}{x^4}y=0.$$

4.4. Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η συζυγής διαφορική εξίσωση για καθεμιά απ'τις παρακάτω ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $x^2y''+3xy'+3y=0$.

(ii) $(2x+1)y''+x^3y'+y=0$.

(iii) $x^3y'''+x^2y''+xy'+y=0$.

(iv) $y^{(4)}+xy'''+x^2y''+x^3y'+x^3y=0$.

Για καθεμιά απ'τις εξισώσεις (iii), (iv) να επαληθευθεί η ταυτότητα του Lagrange.

2. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(2x^3+7x)y'+(8x^2+8)y=0,$$

αφού βρεθεί με δοκιμή μια απλή λύση της συζυγούς διαφορικής εξίσωσης.

3. Ν'αποδειχθεί ότι καθεμιά απ'τις παρακάτω ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είναι αυτοσυζυγής:

(i) $x^3y''+3x^2y'+y=0.$

(ii) $(\sin x)y''+(\cos x)y'+2y=0.$

(iii) $\frac{x+1}{x}y''-\frac{1}{x^2}y'+\frac{1}{x^3}y=0.$

Επιπλέον, να γραφούν αυτές στη μορφή $(Py')'+Qy=0.$

4. Να μετασχηματισθεί καθεμιά απ'τις παρακάτω ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις σε ισοδύναμη εξίσωση της μορφής $(Py')'+$ $+Qy=0$:

(i) $(x^4+x^2)y''+2x^3y'+3y=0.$

(ii) $y''-(\mathrm{tg}\, x)y'+y=0.$

(iii) $xy''+(\log x)y'+xy=0.$

5. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ: ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΤΟΥ STURM. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Στο Εδάφιο αυτό θ'ασχοληθούμε με ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Θα δώσουμε μερικά συμπεράσματα (Θεωρήματα 26,27 και 28), τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να οδηγηθούμε στο Θεώρημα διαχωρισμού του Sturm (Θεώρημα 29) και στο Θεώρημα σύγκρισης του Sturm (Θεώρημα 30). Στη συνέχεια, θα δώσουμε την έννοια του προβλήματος συνοριακών τιμών και θ'ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τα προβλήματα ιδιοτιμών. Θ'αποδείξουμε ότι (Θεώρημα 31) οι ιδιοσυναρτήσεις πού αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή ενός προβλήματος ιδιοτιμών είναι μονοσήμαντα ορισμένες κατά προσέγγιση σταθερού μη μηδενικού παράγοντα και ότι δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες (ως προς κάποια συνάρτηση βάρους). Τέλος, θα παραθέσουμε μερικά παραδείγματα και θα προτείνουμε για λύση ορισμένες ασκήσεις.

5.1. Ρίζες των λύσεων. Το Θεώρημα διαχωρισμού του Sturm. Το Θεώρημα σύγκρισης του Sturm

Θα θεωρήσουμε εδώ την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(\Delta) \qquad (Py')'+Qy=0,$$

όπου θα υποτίθεται ότι P είναι μια θετική συνάρτηση που έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και Q είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο I (Ας υπενθυμίσουμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 25, κάθε ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, που οι συντελεστές της είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο I και ο συντελεστής του y'' δεν μηδενίζεται πουθενά στο I, μπορεί να μετασχηματισθεί σε μια ισοδύναμη διαφορική εξίσωση της μορφής (Δ) με P και Q που ικανοποιούν τις παραπάνω απαιτήσεις).

Θα δώσουμε πρώτα μερικά βασικά συμπεράσματα. Για ν'αποδείξουμε το πρώτο συμπέρασμά μας θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass σύμφωνα με το οποίο κάθε φραγμένο και μη πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει ένα τουλάχιστο σημείο συσσώρευσης (αν E είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι ένα σημείο συσσώρευσης του E αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ σημείων του $E-\{x_0\}$ με $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$).

ΘΕΩΡΗΜΑ 26. Ας είναι y μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ) και J ένα συμπαγές υποδιάστημα του I. Αν η y μηδενίζεται σ'άπειρα σημεία του J, τότε αυτή μηδενίζεται σ'ολόκληρο το I.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι η λύση y μηδενίζεται σ'άπειρα σημεία του J. Τότε το σύνολο των ριζών αυτής στο J είναι ένα μη πεπερασμένο και φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας και επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, αυτό έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0 \in J$ και μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ ριζών της y έτσι ώστε $x_\nu \neq x_0$ για όλα τα $\nu=1,2,\ldots$ και $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$. Επειδή η y είναι συνεχής στο σημείο x_0, θα έχουμε

$$y(x_0) = \lim_{x\to x_0} y(x) = \lim_{\nu\to\infty} y(x_\nu) = 0.$$

Τώρα, η λύση y είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και έτσι παίρνουμε

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{y(x_\nu)-y(x_0)}{x_\nu-x_0} = 0.$$

Έχουμε λοιπόν ότι η λύση y πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ και άρα (Θεώρημα 1) $y(x) = 0$ για όλα τα $x \in I$.

Το Θεώρημα 26 εξασφαλίζει ότι κάθε λύση y με $y \neq 0$ της εξίσωσης (Δ) μπορεί να έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό ριζών σ'ένα συμπαγές υποδιάστημα του I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 27 (Τύπος του Abel). Αν y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ), τότε

$$P(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)] = k \text{ για κάθε } x \in I,$$

όπου k είναι μια σταθερά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή οι συναρτήσεις y_1, y_2 είναι λύσεις της (Δ), είναι

$$(Py_1')'+Qy_1 = 0 \text{ και } (Py_2')'+Qy_2 = 0$$

και έτσι παίρνουμε

$$y_1(Py_2')'-y_2(Py_1')' = y_1(-Qy_2)-y_2(-Qy_1) = 0.$$

Θεωρούμε ένα $x_0 \in I$ και ολοκληρώνουμε από x_0 μέχρι x, για τυχόν $x \in I$, οπότε έχουμε

$$\int_{x_0}^{x} y_1(t)[P(t)y_2'(t)]'dt - \int_{x_0}^{x} y_2(t)[P(t)y_1'(t)]'dt = 0$$

ή

$$y_1(t)[P(t)y_2'(t)]\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} P(t)y_1'(t)y_2'(t)dt - y_2(t)[P(t)y_1'(t)]\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} P(t)y_1'(t)y_2'(t)dt = 0.$$

Έτσι, προκύπτει ότι για όλα τα $x \in I$

$$P(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)] = P(x_0)[y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2'(x_0)].$$

Τό δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι μια σταθερά, το οποίο δηλώνει ότι η συνάρτηση $P(y_1y_2'-y_1'y_2)$ είναι σταθερή.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 28</u>. <u>Ας είναι y_1, y_2 δύο λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (Δ). <u>Τότε</u>:

(i) <u>Αν οι y_1, y_2 έχουν μια κοινή ρίζα, τότε αυτές είναι γραμμικά εξαρτημένες</u>.

(ii) <u>Αν $y_1 \neq 0$ και $y_2 \neq 0$ και οι y_1, y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε κάθε ρίζα της y_1 είναι επίσης ρίζα της y_2</u>.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις y_1, y_2 έχουν μια κοινή ρίζα $x_0 \in I$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 27, υπάρχει μια σταθερά c έτσι ώστε για όλα τα $x \in I$

$$P(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)] = c.$$

Για $x = x_0$ ο τύπος αυτός δίνει $c = 0$ και άρα έχουμε

$$P(x)[y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)] = 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Επειδή έχει υποτεθεί ότι $P(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, θα είναι

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in I,$$

το οποίο σημαίνει (Θεώρημα 4) ότι οι λύσεις y_1, y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις y_1, y_2 δεν είναι τετριμμένες (δηλαδή $y_1 \neq 0$ και $y_2 \neq 0$) και ότι είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x) = 0 \text{ για όλα τα } x \in I,$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθερές όχι και οι δύο μηδέν. Αν $c_2 = 0$, τότε $c_1y_1(x) = 0$ για όλα τα $x \in I$, που σημαίνει ότι $c_1 = 0$ δεδομένου ότι $y_1 \neq 0$. 'Ετσι, αναγκαστικά πρέπει $c_2 \neq 0$. Αν λοιπόν $x_0 \in I$ είναι μια ρίζα της y_1, τότε $c_2y_2(x_0) = 0$ και άρα $y_2(x_0) = 0$, δηλαδή το x_0 είναι επίσης μια ρίζα της y_2.

Το παρακάτω Θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ρίζες της μιας από δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις της (Δ) διαχωρίζουν τις ρίζες της άλλης λύσης.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 29</u> (<u>Θεώρημα διαχωρισμού του Sturm</u>). <u>Ας είναι y_1, y_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (Δ). <u>Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών ρι-</u>

<u>ζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της</u> y_2.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι $x_1, x_2 \in I$ δύο διαδοχικές ρίζες της λύσης y_1, δηλαδή $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ και $y_1(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, όπου υποτίθεται ότι $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι η λύση y_2 έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Ας υποθέσουμε ότι η λύση y_2 δεν έχει καμμιά ρίζα στο (x_1, x_2). Το Θεώρημα 28 εξασφαλίζει ότι $y_2(x_1) \neq 0$ και $y_2(x_2) \neq 0$. Έτσι, μπορεί να ορισθεί η συνάρτηση y_1/y_2 στο κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και μηδενίζεται στα άκρα x_1, x_2. Επομένως (Θεώρημα Rolle) πάρχει ένα σημείο $\xi \in (x_1, x_2)$ με

$$(y_1/y_2)'(\xi) = 0.$$

Η τελευταία ισότητα γράφεται

$$W(y_1, y_2)(\xi)/y_2^2(\xi) = 0$$

και έτσι $W(y_1, y_2) = 0$, το οποίο είναι (Θεώρημα 4) ένα άτοπο. Έτσι, η λύση y_2 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι η y_2 έχει περισσότερες από μια ρίζες στο (x_1, x_2). Ας είναι x_3, x_4 δύο διαδοχικές ρίζες της y_2 με $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, η λύση y_1 θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_5 στο διάστημα (x_3, x_4). Έτσι, η y_1 έχει τις ρίζες x_1, x_2, x_5 με $x_1 < x_5 < x_2$ που έρχεται σ'αντίθεση με το γεγονός ότι οι ρίζες x_1, x_2 είναι διαδοχικές.

Πριν προχωρήσουμε στο Θεώρημα σύγκρισης του Sturm, θα δώσουμε, χωρίς αποδείξεις, δύο συμπεράσματα που αναφέρονται στον αριθμό των ριζών των (μη μηδενικών) λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ).

<u>Α. Αν η συνάρτηση Q είναι μη θετική στο διάστημα I, τότε κάθε μη μηδενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ) έχει το πολύ μια ρίζα.</u>

<u>Β. Ας είναι $I = (0, \infty)$ και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση Q είναι μη αρνητική στο I. Αν</u>

$$\int_1^{\infty} [1/P(x)]dx = \int_1^{\infty} Q(x)dx = \infty,$$

<u>τότε κάθε μη μηδενική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Δ) έχει άπειρες ρίζες.</u>

Ας θεωρήσουμε και μια άλλη διαφορική εξίσωση, την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$(\tilde{\Delta})$ $$(Py')' + \tilde{Q}y = 0,$$

όπου η πραγματική συνάρτηση $\tilde{Q}$ είναι συνεχής στο διάστημα I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 30. (Θεώρημα σύγκρισης του Sturm). Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{Q} > Q$ και ας είναι y και $\tilde{y}$ πραγματικές λύσεις των (Δ) και $(\tilde{\Delta})$ αντίστοιχα. Αν $x_1 < x_2$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της y, τότε η $\tilde{y}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι $x_1 < x_2$ δύο διαδοχικές ρίζες της λύσης y. Τότε $y(x_1) = y(x_2) = 0$ και $y(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y(x) > 0$ για όλα τα $x \in (x_1, x_2)$. Ας υποθέσουμε ότι η $\tilde{y}$ δεν έχει ρίζες στο διάστημα (x_1, x_2). Ας θεωρήσουμε, χωρίς πάλι μείωση της γενικότητας, την περίπτωση όπου $\tilde{y}(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Έχουμε τώρα

$$\tilde{y}(Py')' - y(P\tilde{y}')' = (\tilde{Q} - Q)y\tilde{y}.$$

Αλλά

$$\tilde{y}(Py')' - y(P\tilde{y}')' = [P(y'\tilde{y} - y\tilde{y}')]',$$

και άρα

$$[P(y'\tilde{y} - y\tilde{y}')]' = (\tilde{Q} - Q)y\tilde{y}.$$

Με ολοκλήρωση από x_1 μέχρι x_2 παίρνουμε

$$P(x)[y'(x)\tilde{y}(x) - y(x)\tilde{y}'(x)]\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [\tilde{Q}(x) - Q(x)]y(x)\tilde{y}(x)\,dx$$

ή

$$P(x_2)y'(x_2)\tilde{y}(x_2) - P(x_1)y'(x_1)\tilde{y}(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [\tilde{Q}(x) - Q(x)]y(x)\tilde{y}(x)\,dx.$$

Είναι $P(x_2) > 0$. Επειδή $y(x_2) = 0$ και $y(x) > 0$ για $x \in (x_1, x_2)$, θα έχουμε $y'(x_2) < 0$. Επειδή $\tilde{y}(x) > 0$ για $x \in (x_1, x_2)$, θα είναι $\tilde{y}(x_2) \geq 0$. Έτσι, $P(x_2)y'(x_2)\tilde{y}(x_2) \leq 0$. Μ'ένα ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε ότι $P(x_1)y'(x_1)\tilde{y}(x_1) \geq 0$. Άρα, το πρώτο μέλος στην παραπάνω ισότητα είναι μη θετικό. Όμως το δεύτερο μέλος στην ισότητα αυτή είναι θετικό, γιατί $(\tilde{Q} - Q)y\tilde{y} > 0$ στο (x_1, x_2). Το άτοπο αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα.

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το εξής συμπέρασμα: Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{Q} > Q$ και ας είναι y και $\tilde{y}$ πραγματικές λύσεις των (Δ) και $(\tilde{\Delta})$ αντίστοιχα. Αν x_0 είναι μια κοινή ρίζα των y και $\tilde{y}$, x_1 είναι η επόμενη ρίζα της y και $\tilde{x}_1$ είναι η επόμενη ρίζα της $\tilde{y}$, τότε αναγκαστικά $\tilde{x}_1 < x_1$.

5.2. Προβλήματα ιδιοτιμών

Θ'αρχίσουμε δίνοντας την έννοια του προβλήματος συνοριακών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξιώσεις δεύτερης τάξης.

Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(H) \qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=f$$

όπου a_2, a_1, a_0 και f είναι συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα $[a,b]$ και $a_2(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in [a,b]$. Αν α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1,2)$ και c_i $(i=1,2)$ είναι σταθερές, όπου, για κάθε $i \in \{1,2\}$, μια τουλάχιστο απ'τις α_{ij}, β_{ij} $(j=1,2)$ είναι διάφορη του μηδενός, τότε η γραμμική διαφορική εξίσωση (H) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$(*) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)+\beta_{11}y(b)+\beta_{12}y'(b)=c_1 \\ \alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a)+\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=c_2 \end{cases}$$

λέμε ότι αποτελούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών (H)−(*). Μια λύση y της διαφορικής εξίσωσης (H) που πληροί τις συνοριακές συνθήκες (*) λέμε ότι είναι μια λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (H)−(*). Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση προβλημάτων συνοριακών τιμών για τη γραμμική διαφορική εξίσωση (H) είναι εκείνη όπου οι συνοριακές συνθήκες έχουν τη μορφή

$$\alpha_1y(a)+\alpha_2y'(a)=\alpha, \quad \beta_1y(b)+\beta_2y'(b)=\beta,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha$ και β είναι σταθερές και $|\alpha_1|+|\alpha_2|>0$, $|\beta_1|+|\beta_2|>0$. Μια παραπέρα ειδική περίπτωση προβλημάτων συνοριακών τιμών είναι αυτά που αναφέρονται στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(H_0) \qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

και στα οποία οι συνοριακές συνθήκες είναι της μορφής

$$(**) \qquad \alpha_1y(a)+\alpha_2y'(a)=0, \quad \beta_1y(b)+\beta_2y'(b)=0,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ και β_2 είναι πάλι σταθερές με $|\alpha_1|+|\alpha_2|>0$ και $|\beta_1|+$

$+|\beta_2| > 0$. Προβλήματα συνοριακών τιμών αυτής της τελευταίας μορφής θα συναντήσουμε παρακάτω. Ας σημειώσουμε, τέλος, ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (H)-(*) μπορεί και να μην έχει λύσεις· επίσης, αυτό μπορεί να έχει λύση όχι όμως αναγκαστικά μοναδική. Ακόμα, ας παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (H_0)-(**) ή έχει μόνο τη μηδενική λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$\text{(S)} \qquad (py')' + (q+\lambda r)y = 0,$$

όπου p, q και r είναι *πραγματικές* συναρτήσεις σ'ένα διάστημα $[a,b]$, η p είναι *θετική* και έχει *συνεχή παράγωγο* στο $[a,b]$, η q είναι *συνεχής* στο $[a,b]$ και η r είναι *θετική* και *συνεχής* στο $[a,b]$, και λ είναι μια *πραγματική παράμετρος* (ανεξάρτητη της μεταβλητής x). Ας θεωρήσουμε ακόμα τις συνοριακές συνθήκες

$$\text{(C)} \qquad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ και β_2 είναι *πραγματικές* σταθερές με $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ και $|\beta_2| + |\beta_2| > 0$.

Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (S)-(C) έχει τη μηδενική λύση. Μια τιμή της παραμέτρου λ, για την οποία το πρόβλημα συνοριακών τιμών (S)-(C) έχει και μη μηδενικές λύσεις, θα λέμε ότι είναι μια *ιδιοτιμή* του (S)-(C). Επίσης, αν λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του προβλήματος συνοριακών τιμών (S)-(C), τότε μια μη μηδενική λύση του (S)-(C) για $\lambda = \lambda_0$ θα λέμε ότι είναι μια *ιδιοσυνάρτηση* του (S)-(C) αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ_0. Ακόμα, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (S)-(C) θα λέμε ότι είναι ένα *πρόβλημα ιδιοτιμών*.

Θα δώσουμε τώρα ένα ορισμό: Δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$ θα λέμε ότι είναι *ορθογώνιες* στο $[a,b]$ *ως προς τη συνάρτηση βάρους* r αν και μόνο αν

$$\int_a^b r(x) f(x) g(x)\,dx = 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 31. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών (S)-(C). *Τότε:*

(i) *Αν y_0 είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή, τότε όλες οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ίδια* ιδιοτιμή είναι ακριβώς οι cy_0, όπου $c \neq 0$ είναι αυθαίρετη σταθερά.

(ii) Δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες στο $[a,b]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους r.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Ας είναι y_0 μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C) αντίστοιχη μιας ιδιοτιμής λ_0 αυτού. Είναι φανερό ότι, για κάθε σταθερά $c \neq 0$, cy_0 είναι επίσης μια ιδιοσυνάρτηση του (S)-(C) αντίστοιχη της λ_0. Τώρα, ας θεωρήσουμε μια άλλη ιδιοσυνάρτηση $\tilde{y}$ του (S)-(C) που αντιστοιχεί στην λ_0. Σύμφωνα με το Θεώρημα 27, η συνάρτηση $pW(y_0,\tilde{y}) = p(y_0\tilde{y}'-y_0'\tilde{y})$ είναι σταθερή στο $[a,b]$. Αλλά, έχουμε

$$\alpha_1 y_0(a)+\alpha_2 y_0'(a) = 0 \quad \text{και} \quad \alpha_1\tilde{y}(a)+\alpha_2\tilde{y}'(a) = 0,$$

όπου οι σταθερές α_1, α_2 δεν είναι και οι δύο μηδενικές. Έτσι, μπορούμε να πάρουμε

$$W(y_0,\tilde{y})(a) = 0$$

και επομένως $p(x)W(y_0,\tilde{y})(x) = 0$ για όλα τα $x \in [a,b]$. Άρα (Θεώρημα 4), οι λύσεις y_0 και $\tilde{y}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, το οποίο συνεπάγεται ότι υπάρχει μια σταθερά $c \neq 0$ έτσι ώστε $\tilde{y} = cy_0$, αφού οι y_0 και $\tilde{y}$ είναι μη μηδενικές.

(ii) Ας είναι y_1 και y_2 δύο ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C) αντίστοιχες των ιδιοτιμών λ_1 και λ_2 αυτού αντίστοιχα, όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Τότε

$$(py_1')' + (q+\lambda_1 r)y_1 = 0 \quad \text{και} \quad (py_2')' + (q+\lambda_2 r)y_2 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη απ' τις ισότητες αυτές με y_2 και τη δεύτερη με y_1 και αφαιρώντας κατά μέλη έπειτα, παίρνουμε

$$(py_1')' y_2 - (py_2')' y_1 + (\lambda_1-\lambda_2) r y_1 y_2 = 0$$

και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2) r y_1 y_2 &= (py_2')' y_1 - (py_1')' y_2 = [(py_2')y_1 - (py_1')y_2]' \\ &= [p(y_1 y_2' - y_1' y_2)]',\end{aligned}$$

απ' όπου με ολοκλήρωση από a μέχρι b προκύπτει

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)\,dx = p(b)[y_1(b)y_2'(b)-y_1'(b)y_2(b)]- \\ -p(a)[y_1(a)y_2'(a)-y_1'(a)y_2(a)].\end{aligned}$$

Αλλά, είναι

$$\beta_1 y_1(b)+\beta_2 y_1'(b)=0 \text{ και } \beta_1 y_2(b)+\beta_2 y_2'(b)=0,$$

όπου οι σταθερές β_1 και β_2 δεν είναι και οι δύο μηδέν. Έτσι, εύκολα βρίσκουμε

$$y_1(b)y_2'(b)-y_1'(b)y_2(b)=0.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι

$$y_1(a)y_2'(a)-y_1'(a)y_2(a)=0.$$

Άρα, έχουμε

$$\int_a^b r(x)y_1(x)y_2(x)\,dx=0,$$

αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Δεν έχουμε κάνει λόγο για την ύπαρξη ιδιοτιμών του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C). Αποδεικνύεται ότι:

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (S)-(C) έχει άπειρες ιδιοτιμές· οι ιδιοτιμές του (S)-(C) είναι ακριβώς οι όροι μιας ακολουθίας $\lambda_1<\lambda_2<\dots$ με $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$, η οποία καλείται ακολουθία των ιδιοτιμών του (S)-(C).

Αν $\lambda_1<\lambda_2<\dots$ είναι η ακολουθία των ιδιοτιμών του (S)-(C) και, για κάθε $n\in\{1,2,\dots\}$, y_n είναι μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C) αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ_n αυτού, τότε θα λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $y_n, n\in\{1,2,\dots\}$ είναι μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων του (S)-(C). Απ'το Θεώρημα 31 προκύπτει ότι, αν $y_n, n\in\{1,2,\dots\}$ είναι μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C), τότε οι ακολουθίες ιδιοσυναρτήσεων του (S)-(C) είναι ακριβώς οι $c_n y_n, n\in\{1,2,\dots\}$ για τις διάφορες ακολουθίες $c_n, n\in\{1,2,\dots\}$ μη μηδενικών αριθμών. Επίσης, το Θεώρημα 31 εξασφαλίζει ότι:

Κάθε ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων $(y_n)_{n=1,2,\dots}$ του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C) είναι ορθογώνια ως προς τη συνάρτηση βάρους r με την έννοια ότι, για τυχόντες θετικούς ακεραίους m και n με $m\neq n$, y_m και y_n είναι ορθογώνιες ως προς τη συνάρτηση βάρους r.

Ο όρος επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών (S)-(C) αναφέρεται στην εύρεση της ακολουθίας των ιδιοτιμών του (S)-(C) και μιας ακολουθίας ιδιοσυναρτήσεων αυτού.

5.3. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ν'αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της μιας απ'τις συναρτήσεις $y_1(x) = \sin 2x + \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $y_2(x) = \sin 2x - \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της άλλης.

Λύση. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}$

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2x+\cos 2x & \sin 2x-\cos 2x \\ 2\cos 2x-2\sin 2x & 2\cos 2x+2\sin 2x \end{vmatrix}$$

$$= 4 \neq 0.$$

Έτσι (Θεώρημα 8), η σχέση

$$W(y_1,y_2,y)/W(y_1,y_2) = 0$$

ορίζει μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις συναρτήσεις y_1, y_2. Η εξίσωση αυτή είναι η

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0$$

ή (όπως προκύπτει μετά από πράξεις)

$$y''+2y = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 29.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ν'αποδειχθεί ότι κάθε πραγματική λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''+x^2y = 0, \quad x > 1$$

έχει άπειρες ρίζες.

Λύση. Η συνάρτηση $y_1(x) = \sin x$, $x > 1$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+y = 0, \quad x > 1.$$

Η λύση αυτή έχει τις διαδοχικές ρίζες $k\pi$, $(k+1)\pi$ για $k = 1,2,\ldots$. Έτσι, επειδή $x^2 > 1$ για $x > 1$, το Θεώρημα 30 εξασφαλίζει ότι, για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο k, κάθε πραγματική λύση της διαφορικής μας εξίσωσης θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k\pi,(k+1)\pi)$.

'Αρα οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσής μας έχουν άπειρες ρίζες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών:

(i) $y''+y=x,\ x\in[0,\pi];\ y(0)=2,\ y(\pi)=1.$

(ii) $y''+y=x,\ x\in[0,\pi/2];\ y(0)=2,\ y(\pi/2)=1.$

(iii) $y''+y=x,\ x\in[0,\pi];\ y(0)=2,\ y(\pi)=\pi-2.$

(iv) $y''+4y=0,\ x\in[0,\pi];\ y(0)-2y'(0)=-2,\ y(\pi)+3y'(\pi)=3.$

Λύση. (i) Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x,\ x\in[0,\pi],$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Απ'τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε $y(0)=c_1=2$ και $y(\pi)=-c_1+\pi=1$, που οδηγεί σ'ένα άτοπο. 'Ετσι, το πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν έχει λύσεις.

(ii) Η διαφορική εξίσωση έχει τη γενική λύση

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x,\ x\in[0,\pi/2],$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες. Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $y(0)=c_1=2$ και $y(\pi/2)=c_2+\pi/2=1$, και άρα $c_1=2$ και $c_2=1-\pi/2$. Επομένως, το πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει τη μοναδική λύση

$$y(x)=2\cos x+(1-\pi/2)\sin x+x,\ x\in[0,\pi/2].$$

(iii) Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x,\ x\in[0,\pi],$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι συνοριακές συνθήκες γίνονται $y(0)=c_1=2$ και $y(\pi)=-c_1+\pi=\pi-2$, απ'όπου προκύπτει $c_1=2$, ενώ η σταθερά c_2 δεν προσδιορίζεται απ'τις συνοριακές συνθήκες. 'Ετσι, το πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει άπειρες λύσεις που δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x)=2\cos x+c\sin x+x,\ x\in[0,\pi]$$

για τις διάφορες τιμές της σταθεράς c.

(iv) Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x,\ x\in[0,\pi],$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. 'Εχουμε $y'(x)=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x,\ x\in[0,\pi]$ και έτσι οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $y(0)-2y'(0)=c_1-4c_2=-2$ και $y(\pi)+3y'(\pi)=c_1+6c_2=3$, απ'όπου προκύπτει ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = 1/2$. Άρα, το πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει τη μοναδική λύση

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad x \in [0,\pi].$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών:

(i) $y''+y = 0$, $x \in [0,\pi]$; $y(0)+y'(0) = 0$, $y(\pi)+2y'(\pi) = 0$.

(ii) $y''+y = 0$, $x \in [0,\pi]$; $y(0)+y'(0) = 0$, $y(\pi)+y'(\pi) = 0$.

<u>Λύση</u>. (i) Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad x \in [0,\pi],$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $c_1+c_2 = 0$ και $-c_1-2c_2 = 0$, απ'όπου προκύπτει $c_1=c_2=0$. Άρα, το πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει <u>μόνο τη μηδενική λύση</u>.

(ii) Οι λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών είναι

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad x \in [0,\pi],$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 πληρούν τη συνθήκη $c_1+c_2 = 0$. Έτσι, το πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει <u>και μη μηδενικές λύσεις</u> και μάλιστα όλες οι λύσεις είναι

$$y(x) = c \cos x + (1-c) \sin x, \quad x \in [0,\pi],$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y''+\lambda y = 0, \quad x \in [0,\pi]; \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

<u>Λύση</u>. Η διαφορική εξίσωση έχει τη γενική λύση

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}, & \text{αν } \lambda < 0 \\ c_1 + c_2 x, & \text{αν } \lambda = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x), & \text{αν } \lambda > 0 \end{cases}$$

για $x \in [0,\pi]$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\begin{cases} c_1+c_2 = 0 \text{ και } c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0, & \text{αν } \lambda < 0 \\ c_1 = 0 \text{ και } c_2 = 0, & \text{αν } \lambda = 0 \\ c_1 = 0 \text{ και } -c_1\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) + c_2\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0, & \text{αν } \lambda > 0. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι για $\lambda \leq 0$ είναι $c_1 = c_2 = 0$, και άρα $y(x) = 0, x \in [0,\pi]$. Θεωρούμε, λοιπόν, την περίπτωση $\lambda > 0$. Τότε $c_1 = 0$ και $c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$. Αν $c_2 = 0$, τότε y είναι η μηδενική λύση. Για $c_2 \neq 0$ έχουμε

$$\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0,$$

δηλαδή

$$\sqrt{\lambda} = n - 1/2 \text{ για κάποιο θετικό ακέραιο } n,$$

οπότε

$$y(x) = c_2 \sin(n-1/2)x, \quad x \in [0,\pi].$$

'Ετσι, η ακολουθία των ιδιοτιμών είναι

$$\lambda_n = n - 1/2 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

και μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων είναι (για $c_2 = 1$)

$$y_n(x) = \sin(n-1/2)x, \quad x \in [0,\pi] \quad (n = 1,2,\ldots).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να επιλυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad x \in [1,e]; \ y(1) = 0, \ y(e) = 0.$$

<u>Λύση</u>. Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$(xy')' + \frac{1}{x}\lambda y = 0, \quad x \in [1,e].$$

'Ετσι, αυτή είναι της μορφής (S). Επίσης, παρατηρούμε ότι η εξίσωσή μας είναι μια διαφορική εξίσωση Euler. Επιλύοντας, με το γνωστό τρόπο, αυτή βρίσκουμε ότι οι λύσεις της δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = \begin{cases} c_1 x^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 x^{-\sqrt{-\lambda}}, & \text{αν } \lambda < 0 \\ c_1 + c_2 \log x, & \text{αν } \lambda = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\log x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\log x), & \text{αν } \lambda > 0 \end{cases}$$

για $x \in [1,e]$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Αν $\lambda < 0$, οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $c_1 + c_2 = 0$ και $c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$, οπότε $c_1 = c_2 = 0$ που οδηγεί στη μηδενική λύση. 'Οταν $\lambda = 0$, έχουμε $c_1 = 0$ και $c_1 + c_2 = 0$, δηλαδή πάλι είναι $c_1 = c_2 = 0$ που σημαίνει ότι η λύση y είναι η μηδενική. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι $\lambda > 0$. Τότε οι συνοριακές συνθήκες οδηγούν στις σχέσεις

$$c_1 = 0 \text{ και } c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0.$$

Αν $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, δηλαδή

$$\sqrt{\lambda} = n\pi \text{ για κάποιο θετικό ακέραιο } n,$$

και $c_2 \neq 0$, έχουμε τη μη μηδενική λύση

$$y(x) = c_2 \sin(n\pi \log x), \quad x \in [1,e].$$

Άρα, η ακολουθία των ιδιοτιμών είναι

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

και μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων είναι (για $c_2 \doteq 1$)

$$y_n(x) = \sin(n\pi \log x), \quad x \in [1,e] \quad (n = 1,2,\ldots).$$

5.4. Ασκήσεις

1. Ν'αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της συνάρτησης $y_1(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μια ακριβώς ρίζα της $y_2(x) = \sin x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Ν'αποδειχθεί ότι κάθε πραγματική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + (x+1)y = 0$$

έχει άπειρες θετικές ρίζες.

3. Ας θεωρήσουμε την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + qy = 0,$$

όπου q είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο συμπαγές διάστημα $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $0 < m < q(x) < M$ για όλα τα $x \in [\alpha,\beta]$. Ας είναι y_1 μια λύση αυτής που έχει δύο διαδοχικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

4. Ν'αποδειχθεί ότι, αν q είναι μια συνεχής και αρνητική συνάρτηση σ'ένα διάστημα I, τότε κάθε λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + qy = 0$$

έχει το πολύ μια ρίζα.

5. Να επιλυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών:

(i) $y''-3y'+2y=e^x$, $x\in[0,1]$; $y'(0)=0$, $y(1)=0$.

(ii) $y''+9y=0$, $x\in[0,\pi]$; $y(0)=1$, $y(\pi)=-1$.

(iii) $y''-3y'+2y=0$, $x\in[0,1]$; $y(0)=0$, $y'(1)=0$.

(iv) $y''-y=2e^x$, $x\in[0,1]$; $y(0)-2y'(0)=-2$, $3y(1)-y'(1)=e$.

(v) $x^2y''-3xy'+3y=0$, $x\in[1,2]$; $y(1)-y'(1)=2$, $y(2)-2y'(2)=4$.

(vi) $x^2y''-3xy'+3y=\log x$, $x\in[1,2]$; $y(1)=A$, $y(2)=B$ (A,B σταθερές).

6. Να επιλυθούν, για τις διάφορες τιμές των σταθερών A και B, τα παρακάτω προβλήματα συνοριακών τιμών:

(i) $y''+16y=32x$, $x\in[0,\pi]$; $y(0)=A$, $y(\pi)=B$.

(ii) $y''+16y=32x$, $x\in[0,\pi]$; $y(0)=A$, $y'(\pi)=B$.

(iii) $y''+16y=32x$, $x\in[0,\pi]$; $y(0)+y'(0)=A$, $y(\pi)=B$.

7. Να επιλυθούν τα προβλήματα ιδιοτιμών:

(i) $y''+(2+\lambda)y=0$, $x\in[0,1]$; $y(0)=0$, $y(1)=0$.

(ii) $y''+\lambda y=0$, $x\in[0,1]$; $y(1)=0$, $y(0)+y'(0)=0$.

(iii) $y''-3y'+3(1+\lambda)y=0$, $x\in[0,\pi]$; $y'(0)=0$, $y'(\pi)=0$.

(iv) $y''+\lambda y=0$, $x\in[0,\pi]$; $y(0)=0$, $y(\pi)+y'(\pi)=0$.

8. Να επιλυθούν τα προβλήματα ιδιοτιμών:

(i) $x^2y''+3xy'+\lambda y=0$, $x\in[1,e]$; $y(1)=0$, $y(e)=0$.

(ii) $[(2+x^2)y']'+\lambda y=0$, $x\in[-1,1]$; $y(-1)=0$, $y(1)=0$.

(iii) $(1+x)^2y''+2(1+x)y'+3\lambda y=0$, $x\in[0,1]$; $y(0)=0$, $y(1)=0$.

6. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{αν } -1\le x<0 \end{cases} \quad\text{και}\quad g(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } 0\le x\le 1 \\ x^2, & \text{αν } -1\le x<0. \end{cases}$$

Ν'αποδειχθεί ότι: (i) $W(f,g)(x)=0$ για κάθε $x\in[-1,1]$. (ii) Οι συναρτήσεις f,g είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

2. Ας είναι f μια συνάρτηση στο διάστημα $(0,\infty)$ που δεν μηδενίζεται σε n τουλάχιστον σημεία. Ν'αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f_k(x) = x^{k-1} f(x), \quad x \in (0,\infty) \quad (k=1,\dots,n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

3. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\sin^2 x)y''-2(\sin x \ \cos x)y'+(1+\cos^2 x)y = \sin^3 x, \quad x \in (0,\pi),$$

αφού αποδειχθεί ότι $y_1(x) = \sin x$, $x \in (0,\pi)$ και $y_2(x) = x\sin x$, $x \in (0,\pi)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

4. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y = (x^2+1)^2; \quad y(0)=0, \ y'(0)=1,$$

με το δεδομένο ότι η αντίστοιχη ομογενής γραμμική εξίσωση δέχεται μια λύση y_1 της μορφής $y_1(x) = x+\alpha$, $x \in \mathbb{R}$ (α σταθερά).

5. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y^{(5)}-y'-\frac{4}{x}y = 0, \quad x > 0$$

με τις αντικαταστάσεις $y = xz$, $z^{(4)}-z = w$.

6. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x(1-2x\log x)y''+(1+4x^2\log x)y'-(2+4x)y = e^{2x}(1-2x\log x)^2, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1;$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = e(2+\log 2),$$

αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x) = \log x$, $x \in [\frac{1}{2},1]$ είναι μια μερική λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης.

7. Ν'αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^{-x^2/2}, \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}dt, \ x \in \mathbb{R}$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''+xy'+y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+xy'+y = 0; \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

8. Με τον μετασχηματισμό $x = tg\,\frac{t}{2}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(3x-x^2)y'+(1-x-e^{2x})y = 0, \quad x > 0,$$

αφού βρεθεί μια λύση αυτής της μορφής $\frac{1}{x}\,e^{\alpha g(x)}$, $x > 0$, όπου α είναι σταθερά και $g(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, $x > 0$.

10. Να βρεθεί μια δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $[0,2]$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και

$$f''(x)-f(x) = 0 \text{ για } x \in [0,1]; \quad f''(x)-9f(x) = 0 \text{ για } x \in [1,2].$$

11. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+\omega^2y = A\cos\omega x, \quad x \geq 0,$$

όπου ω και A είναι θετικές σταθερές. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε λύση y αυτής είναι $\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|y(x)| = \infty$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

12. Δίνεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+4xy'+q(x)y = 0,$$

όπου q είναι μια συνεχής συνάρτηση σ'ένα διάστημα I. Αν οι συναρτήσεις $u(x)$, $x \in I$ και $xu(x)$, $x \in I$ είναι λύσεις αυτής και $u(0) = 1$ (υποτίθεται ότι $0 \in I$), τότε να βρεθούν οι συναρτήσεις u και q.

13. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+a_1y'+a_0y = b(x), \quad x \geq 0,$$

όπου a_1, a_0 είναι σταθερές και b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,\infty)$. Ας είναι r_1, r_2 οι ρίζες του πολυωνύμου $r^2+a_1r+a_0$ με $r_1 \neq r_2$ και $\mathrm{Re}\,r_1 < 0$, $\mathrm{Re}\,r_2 < 0$. (i) Αν η b είναι φραγμένη, ν'αποδειχθεί ότι κάθε λύση είναι φραγμένη. (ii) Αν $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, ν'αποδειχθεί ότι για κάθε λύση y είναι $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

14. Αν $\{y_1,\ldots,y_n\}$ και $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ είναι δύο βασικά σύνολα λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), ν'αποδειχθεί ότι

$$W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = cW(y_1,\ldots,y_n),$$

όπου c είναι μια σταθερά.

15. (i) Δίνεται η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(*) \qquad y''+py'+qy=0,$$

όπου p,q είναι συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα I και η p έχει συνεχή παράγωγο στο I. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I. N'αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση

$$y(x) = u(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right], \quad x\in I$$

μετασχηματίζει την (*) στην εξίσωση

$$(**) \qquad u''+\left(q-\frac{1}{2}p'-\frac{1}{4}p^2\right)u=0.$$

Ακόμα, αν $\{u_1,u_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της (**), τότε οι συναρτήσεις

$$y_1(x)=u_1(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right], x\in I; \quad y_2(x)=u_2(x)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right], \quad x\in I$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της (*). (ii) Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''+(2x+1)y'+\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)y=0, \quad x\in[0,1].$$

16. Ας είναι y_1 και y_2 οι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \quad x>0$$

(όπου n σταθερά) με

$$y_1(1)=1, \ y_1'(1)=0; \ y_2(1)=0, \ y_2'(1)=1.$$

Να βρεθεί η ορίζουσα Wronski των y_1,y_2.

17. Ας είναι f μια συνεχής συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+\frac{1}{4x^2}y=f(x)\cos x, \quad x>0.$$

18. Ας θεωρήσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+y=b(x), \quad x\geq 1,$$

όπου b είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[1,\infty)$ με $\int_1^{\infty}|b(x)|dx<\infty$.
(i) Ν'αποδειχθεί ότι μια μερική λύση είναι

$$y_{\mu}(x)=\int_1^x \sin(x-t)b(t)dt, \quad x\geq 1.$$

(ii) Κάθε λύση είναι φραγμένη.

19. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+4y'+4y=e^{-2x}+\frac{1}{x^2}e^{-2x}, \quad x>0.$$

20. Μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχει τις λύσεις

$$y_1(x)=1+e^{x^2}, \quad y_2(x)=1+xe^{x^2} \text{ και } y_3(x)=(x+1)e^{x^2}+1 \text{ για } x\in\mathbb{R}.$$

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση. Ιδιαίτερα, να βρεθεί η λύση y με

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

21. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0, \quad x>0,$$

αφού βρεθεί μια λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x)=\frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{x}}$, $x>0$ (α σταθερά).

22. Ας είναι f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σ'ένα διάστημα I. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Αν οι f,g είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε $W(f,g)(x)=0$ για κάθε $x\in I$. (ii) Αν $W(f,g)(x)\neq 0$ για κάποιο $x\in I$, τότε οι f,g είναι γραμμικά ανεξάρτητες. (iii) Αν $W(f,g)(x)=0$ για κάθε $x\in I$, τότε οι f,g δεν είναι αναγκαστικά γραμμικά εξαρτημένες (Αντιπαράδειγμα: $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x|x|$, $x\in\mathbb{R}$). (iv) Αν $W(f,g)(x)=0$ για κάθε $x\in I$ και $g(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$, τότε οι f,g είναι γραμμικά εξαρτημένες.

23. Να επιλυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη βοήθεια των σημειούμενων μετασχηματισμών:

(i) $xy''-y'+x^3y=0$, $x>0$; $t=x^2$.

(ii) $x(1+x^2)^2y''-(1-3x^2)(1+x^2)y'-8x^3y=4x^3(1+x^2)$, $x>0$; $t=1+x^2$.

(iii) $x(x+1)^2y''+(3x+2)(x+1)y'+y=\log(x+1)$, $x>0$; $z=xy$.

(iv) $(1+x^2)xy''+2(1+x)^2y'+4y=0$, $x>0$; $z=y+xy'$.

24. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2x^2y''+7xy'+3y=\cos\sqrt{x}, \quad x>0.$$

25. Η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''-\frac{6}{x^2}y=5x+8, \quad x>0,$$

ν'αποδειχθεί ότι έχει τις λύσεις

$y_1(x)=cx^3+x^3\log x-2x^2$, $y_2(x)=x^{-2}+x^3\log x-2x^2$ και

$$y_3(x)=x^3\log x-2x^2$$

για $x>0$ (όπου c σταθερά). Να επιλυθεί, στη συνέχεια, το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-\frac{6}{x^2}y=5x+8, \quad x>0; \quad y(1)=0, \quad y'(1)=1.$$

26. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(x^2+2x-1)y''-2(x+1)y'+2y=0, \quad x>1,$$

αφού βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1,y_2 αυτής της μορφής

$$y_1(x)=\alpha x+\beta, \quad x>1 \quad \text{και} \quad y_2(x)=\gamma x^2+\delta x+\varepsilon, \quad x>1$$

(όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ και ε είναι σταθερές).

27. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy'''-y''-xy'+y=0, \quad x>0,$$

δεδομένου ότι $y_1(x)=x$, $x>0$ και $y_2(x)=e^x$, $x>0$ είναι δύο λύσεις της.

28. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-y'-2y=4e^{-x}; \quad y(0)=\alpha, \quad y'(0)=\beta,$$

όπου α,β είναι σταθερές. Να βρεθεί ακόμα η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα α,β ώστε η λύση να είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$.

29. Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''-2y'+y=4e^x\log x, \quad x>0.$$

30. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(x\cos x-\sin x)y''+(x\sin x)y'-(\sin x)y=0,\quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2},$$

δεδομένου ότι $y_1(x)=\sin x$, $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ είναι μια λύση της.

31. Ας είναι q μια θετική και συνεχής συνάρτηση σ'ένα διάστημα $[a,b]$ και ας θέσουμε $q_m=\min\limits_{x\in[a,b]}|q(x)|$. Ν'αποδειχθεί ότι, αν $q_m>k^2\pi^2/(b-a)^2$ (k ένας θετικός ακέραιος), τότε κάθε πραγματική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+qy=0$$

έχει k τουλάχιστον ρίζες στο $[a,b]$ (Υπόδειξη: Να θεωρηθεί η εξίσωση $y''+[k^2\pi^2/(b-a)^2]y=0$).

32. Να θεωρηθεί η διαφορική εξίσωση

$$(*)\qquad x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0,\quad x>0,$$

όπου p είναι μια σταθερά.

(i) Ν'αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $y=u/\sqrt{x}$, $x>0$ μετασχηματίζει την (*) στη διαφορική εξίσωση

$$(**)\qquad u''+\left(1-\frac{4p^2-1}{4x^2}\right)u=0,\quad x>0.$$

(ii) Ν'αποδειχθεί ότι, αν $p=0$, τότε κάθε διάστημα της μορφής $[a,a+\pi]$, $a>0$ περιέχει μια τουλάχιστον ρίζα κάθε πραγματικής λύσης της (*). Επίσης, ν'αποδειχθεί ότι, αν $p>1/2$, τότε κάθε διάστημα της μορφής $[a,a+\pi]$, $a>0$ περιέχει το πολύ μια ρίζα κάθε μη μηδενικής πραγματικής λύσης της εξίσωσης (*) (Υπόδειξη: Να συγκριθεί ο αριθμός των ριζών των λύσεων της (**) με τον αριθμό των ριζών των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $u''+u=0$).

33. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,A$ και a είναι σταθερές με $\alpha_3\neq 0$ και ας θεωρήσουμε την μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(*)\qquad \alpha_3y'''+\alpha_2y''+\alpha_1y'+\alpha_0y=Ae^{ax}.$$

Ας είναι $p(\lambda)=\alpha_3\lambda^3+\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (*). (i) Ν'αποδειχθεί ότι $y_\mu(x)=Ae^{ax}/p(a)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι μια λύση της (*), αν $p(a)\neq 0$. (ii) Ν'αποδειχθεί ότι, αν $p(a)=0$ και $p'(a)\neq 0$, τότε $y_\mu(x)=Axe^{ax}/p'(a)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι μια λύση της (*). (iii) Κάτω από ποιές συνθήκες μπορεί η (*) να έχει μια λύση της μορφής $y_\mu(x)=dx^2e^{ax}$,

$x \in \mathbb{R}$, όπου d είναι μια σταθερά;

34. Δίνεται η εξίσωση Riccati

$$y' = P(x)y^2+Q(x)y+R(x),$$

όπου P,Q και R είναι συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα I και $P(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Ν'αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $y = -z'/Pz$ μετασχηματίζει την εξίσωση αυτή στην γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$z''-[Q+(P'/P)]z'+PRz = 0.$$

Εφαρμογή: Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις Riccati:

(i) $xy' = x^2y^2-y+1$.

(ii) $x^2y' = x^4y^2+(3x^2-2x)y+2$.

(iii) $(\cos x)y' = (\cos^2 x)y^2+(\sin x-2\cos x)y+5$.

IV. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα γραμμικά διαφορικά συστήματα. Στο Εδάφιο 0 θα δώσουμε την έννοια του γραμμικού διαφορικού συστήματος, θα διατυπώσουμε το Θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου των λύσεων για τα γραμμικά διαφορικά συστήματα και θα παραθέσουμε μερικά στοιχεία απ'τη Γραμμική 'Αλγεβρα και την Ανάλυση για τους πίνακες που θα τα χρειασθούμε στη μελέτη μας. Τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα θα μελετηθούν στο Εδάφιο 1 και τα μη ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα θα εξετασθούν στο Εδάφιο 2. Στα Εδάφια 3 και 4 θ'ασχοληθούμε με τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές. Στο Εδάφιο 5 θ'αναπτυχθεί η μέθοδος της απαλειφής για την επίλυση των γραμμικών διαφορικών συστημάτων. Η ευστάθεια των γραμμικών διαφορικών συστημάτων θα μελετηθεί στο Εδάφιο 6. Τέλος, το Εδάφιο 7 περιλαμβάνει μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Θα δοθεί εδώ η έννοια του γραμμικού διαφορικού συστήματος και θα διατυπωθεί το Θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικά διαφορικά συστήματα. Επίσης, θα παρατεθούν μερικά στοιχεία απ'τη Γραμμική 'Αλγεβρα και την Ανάλυση σχετικά με τους πίνακες. Αυτά είναι απαραίτητα για τη μελέτη των γραμμικών διαφορικών συστημάτων.

0.1. Η έννοια του γραμμικού διαφορικού συστήματος. Ύπαρξη και μονοσήμαντο των λύσεων

Ένα γραμμικό διαφορικό σύστημα είναι ένα διαφορικό σύστημα της μορφής

$$(S)\qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1n}y_n+b_1 \\ y_2' = a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2n}y_n+b_2 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\dots+a_{nn}y_n+b_n, \end{cases}$$

όπου a_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ και b_i $(i=1,2,\dots,n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Οι συναρτήσεις a_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ λέγονται συντελεστές του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) και το διάστημα I λέγεται διάστημα ορισμού αυτού. Αν οι συντελεστές a_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ είναι σταθερές (συναρτήσεις), τότε λέμε ότι το (S) είναι ένα γραμμικό διαφορικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές. Όταν $b_i=0$ για όλα τα $i=1,2,\dots,n$ (για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το I γράφουμε $f=0$ αν και μόνο αν $f(x)=0$ για όλα τα $x\in I$, και διαφορετικά, δηλαδή όταν $f(x)\neq 0$ για ένα τουλάχιστον $x\in I$, γράφουμε $f\neq 0$), τότε το (S) παίρνει τη μορφή

$$(S_0)\qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1+a_{12}y_2+\dots+a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1+a_{22}y_2+\dots+a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\dots+a_{nn}y_n \end{cases}$$

και στην περίπτωση αυτή λέγεται ομογενές. Αν για κάποιο $i\in\{1,2,\dots,n\}$ είναι $b_i\neq 0$, τότε λέμε ότι το (S) είναι ένα μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα. Ακόμα, στην περίπτωση όπου το (S) είναι μη ομογενές, λέμε ότι το (S_0) είναι το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα του (S). Ο n-τάξης πίνακας-συνάρτηση

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

λέγεται συντελεστής πίνακας του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) και είναι συνεχής στο διάστημα I. Ας θεωρήσουμε την n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

η οποία είναι συνεχής στο I. Τότε, θεωρώντας ως άγνωστη συνάρτηση την

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

μπορούμε να γράψουμε το γραμμικό διαφορικό σύστημα (S) στη μορφή

$$(S) \qquad y' = Ay+b$$

και το (S_0) ως εξής

$$(S_0) \qquad y' = Ay.$$

Παντού παρακάτω, εκτός απ'το Εδάφιο 5, όταν αναφερόμαστε στα γραμμικά διαφορικά συστήματα (S) και (S_0), θα θεωρούμε ότι αυτά είναι γραμμένα στις πιο πάνω μορφές.

Για την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικά διαφορικά συστήματα ισχύει το παρακάτω Θεώρημα. Η απόδειξη αυτού δίνεται στο Κεφάλαιο I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του διαστήματος I και ξ είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα, τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση y του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S), η οποία είναι ορισμένη σ'ολόκληρο το διάστημα I και πληροί την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = \xi.$$

Η μόνη υπόθεση στο παραπάνω Θεώρημα είναι αυτή της συνέχειας του συντελεστή πίνακα A και της n-διάστατης διανυσματικής συνάρτησης b στο διάστημα I. Ας τονίσουμε ακόμα ότι το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει ότι όλες οι λύσεις του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) είναι ορισμένες σ'ολόκληρο το διάστημα I.

Είναι φανερό ότι το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) έχει ως λύση τη μηδενική n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο I (μηδενική λύση). Απ'το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι, αν για μια λύση y του (S_0) είναι $y(x_0)=0$ για κάποιο $x_0 \in I$, τότε η λύση αυτή είναι αναγκαστικά η μηδενική λύση. Έτσι, μια λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) ή θα είναι μηδέν σ'ολόκληρο το διάστημα I ή δεν θα μηδενίζεται πουθενά στο I.

Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης

$$(E) \qquad a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = h,$$

όπου a_i $(i=0,1,\ldots,n-1,n)$ και h είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I και $a_n(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Θέτοντας

$$y_1 = u,\ y_2 = u',\ldots,y_n = u^{(n-1)},$$

παίρνουμε

$$y_1' = u',\ y_2' = u'',\ldots,y_n' = u^{(n)}$$

και έτσι η γραμμική διαφορική εξίσωση (E) ανάγεται στο γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$(s) \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -\dfrac{a_0}{a_n} y_1 - \dfrac{a_1}{a_n} y_2 - \ldots - \dfrac{a_{n-1}}{a_n} y_n + \dfrac{h}{a_n}. \end{cases}$$

Το γραμμικό διαφορικό σύστημα (s) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(s) \qquad y' = Ay + b,$$

όπου

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \ldots & -\dfrac{a_{n-2}}{a_n} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{h}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Ο συντελεστής πίνακας A και η διανυσματική συνάρτηση b είναι συνεχείς στο διάστημα I.

Απ'τον παραπάνω τρόπο αναγωγής της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) στο γραμμικό διαφορικό σύστημα (s) προκύπτει ότι: Αν u είναι μια λύση της (E), τότε

$$y = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

είναι μια λύση του (s). Αντίστροφα, αν

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι μια λύση του (s), τότε y_1 είναι μια λύση της (E). Ακόμα: Αν ü είναι η λύση της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$(*) \qquad u(x_0) = c_0,\ u'(x_0) = c_1, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1},$$

όπου $x_0 \in I$ και $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ είναι σταθερές, τότε

$$y = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

είναι η λύση του (s) με

$$(**) \qquad y(x_0) = c,$$

όπου c είναι το διάνυσμα με συνιστώσες $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Αντίστροφα, αν

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

είναι η λύση του (s) που πληροί την αρχική συνθήκη (**), όπου x_0 είναι ένα σημείο του I και c ένα n-διάστατο διάνυσμα, τότε y_1 είναι η λύση της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες (*) με $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ τις συνιστώσες του c.

Λόγω της παραπάνω αντιστοιχίας μεταξύ των λύσεων της (Ε) και των λύσεων του (s), μπορούμε να πούμε ότι η μελέτη της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Ε) ανάγεται στη μελέτη του γραμμικού διαφορικού συστήματος (s). Έτσι, πολλά συμπεράσματα για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να παρθούν απ'αντίστοιχα συμπεράσματα για γραμμικά διαφορικά συστήματα.

0.2. Μερικά στοιχεία απ' τη Γραμμική Άλγεβρα και την Ανάλυση για τους πίνακες

Θα θεωρήσουμε εδώ γνωστή τη στοιχειώδη Θεωρία των πινάκων. Θα δώσουμε όμως την έννοια της ιδιοτιμής ενός (τετραγωνικού) πίνακα και θα διατυπώσουμε το Θεώρημα Cayley-Hamilton. Ας είναι C ένας n--τάξης πίνακας και I ο μοναδιαίος n-τάξης πίνακας. Τότε το πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(\lambda I - C) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα C και οι n ρίζες του (όχι αναγκαστικά διακεκριμμένες) λέγονται <u>ιδιοτιμές</u> (ή χαρακτηριστικές τιμές) του C. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του C, τότε $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots\ldots(\lambda-\lambda_n)$. Το <u>Θεώρημα Cayley-Hamilton</u> (ένα απ'τα βασικότερα Θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας) εξασφαλίζει ότι <u>ο πίνακας</u> C <u>μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο με την έννοια ότι ισχύει</u>

$$p(C) \equiv C^n + c_{n-1}C^{n-1} + \ldots + c_1C + c_0I = O,$$

<u>όπου</u> O <u>είναι ο μηδενικός</u> n-<u>τάξης πίνακας</u>. <u>Έτσι, αν</u> $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ <u>είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα</u> C, <u>τότε</u>

$$(C-\lambda_1 I)(C-\lambda_2 I)\ldots(C-\lambda_n I) = O.$$

Ας είναι $Y = (y_{ij})$ ένας n-τάξης πίνακας-συνάρτηση στο I, δηλαδή ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία y_{ij} $(i,j = 1,\ldots,n)$ είναι συναρτήσεις ορισμένες στο I. Θα λέμε ότι ο Y είναι φραγμένος στο I αν και μόνο αν οι συναρτήσεις y_{ij} $(i,j = 1,\ldots,n)$ είναι φραγμένες στο I. Ακόμα, για $I = \mathbb{R}$, θα λέμε ότι ο Y συγκλίνει στον μηδενικό πίνακα O για $x \to \infty$, και θα γράφουμε $\lim_{x\to\infty} Y(x) = O$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to\infty} y_{ij}(x) = 0$ $(i,j = 1,\ldots,n)$.

Ας είναι πάλι Y ένας n-τάξης πίνακας-συνάρτηση στο I. Λέμε ότι ο πίνακας-συνάρτηση Y είναι παραγωγίσιμος στο I αν και μόνο αν τα στοιχεία του είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο I. Επιπλέον, αν ο

Y είναι παραγωγίσιμος στο I, τότε η παράγωγος αυτού συμβολίζεται με Y' και προκύπτει απ'τον Y με παραγώγιση των στοιχείων του. Αν ο Y είναι παραγωγίσιμος και y είναι μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση που έχει παράγωγο στο I, τότε η συνάρτηση Yy είναι επίσης παραγωγίσιμη στο I και $(Yy)' = Y'y+Yy'$. Ακόμα, αν ο Y είναι παραγωγίσιμος στο I και Z είναι ένας άλλος παραγωγίσιμος n-τάξης πίνακας-συνάρτηση στο I, τότε YZ είναι παραγωγίσιμος στο I και μάλιστα $(YZ)' = Y'Z+YZ'$. Τέλος, αν ο Y είναι παραγωγίσιμος στο I και $\det Y(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε ορίζεται ο πίνακας-συνάρτηση Y^{-1} με $Y^{-1}(x) = [Y(x)]^{-1}$, $x \in I$ ο οποίος είναι παραγωγίσιμος στο I και είναι $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$ (γιατί $YY^{-1} = I$).

Αν Y είναι ένας n-τάξης πίνακας-συνάρτηση που έχει παράγωγο στο I, τότε $(\det Y)' = \det Y_1 + \det Y_2 + \ldots + \det Y_n$, όπου, για κάθε $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, Y_i είναι ο πίνακας-συνάρτηση που προκύπτει απ'τον Y με παραγώγιση των στοιχείων-συναρτήσεων της i-γραμμής αυτού.

Ένα ομογενές γραμμικό (αλγεβρικό) σύστημα έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών αυτού είναι μηδέν. Έτσι, αν C είναι ένας n-τάξης πίνακας με $\det C \neq 0$ και c είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα, τότε η ισότητα $Cc = 0$ ισχύει μόνο όταν $c=0$.

Ας είναι $C = (c_{ij})$ ένας n-τάξης πίνακας. Θέτουμε

$$h = \max_{i,j=1,\ldots,n} |c_{ij}| \quad \text{και} \quad C^{\nu} = (c_{ij}(\nu)) \quad (\nu = 1,2,\ldots).$$

Τότε για κάθε $\nu = 1,2,\ldots$ ισχύει

$$|c_{ij}(\nu)| \leq n^{\nu-1}h^{\nu} \quad (i,j = 1,\ldots,n).$$

Πραγματικά, για $\nu = 1$ έχουμε $|c_{ij}(1)| = |c_{ij}| \leq h$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ και άρα η πρότασή μας αληθεύει για $\nu = 1$. Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο $\nu \in \{1,2,\ldots\}$, τότε παίρνουμε

$$|c_{ij}(\nu+1)| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\nu)c_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}(\nu)||c_{kj}| \leq \sum_{k=1}^{n} n^{\nu-1}h^{\nu}h = n^{\nu}h^{\nu+1}$$

για $i,j = 1,\ldots,n$ και επομένως η πρότασή μας ισχύει για το $\nu+1$. Άρα, η πρόταση ισχύει για όλα τα $\nu = 1,2,\ldots$. Παρατηρούμε τώρα ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{ij}(\nu)}{\nu!}$$

συγκλίνει για οποιαδήποτε $i,j = 1,\ldots,n$, επειδή

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n^{\nu-1}h^{\nu}}{\nu!} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n^{\nu}h^{\nu}}{\nu!} = e^{nh}-1 < \infty.$$

Ορίζουμε τη σειρά πινάκων $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{C^{\nu}}{\nu!}$ ως εξής

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C^{\nu}}{\nu!} = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} c_{ij}^{(\nu)} \right)$$

και έχουμε ότι αυτή συγκλίνει προς ένα n-τάξης πίνακα. Μετά απ'τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε τον <u>εκθετικό</u> <u>πίνακα</u> <u>του</u> C με τον τύπο

$$e^{C} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C^{\nu}}{\nu!} .$$

Αν C και D είναι δύο n-τάξης πίνακες που αντιμετατίθενται, τότε μπορεί ν'αποδειχθεί ότι

$$e^{C+D} = e^{C} e^{D}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι $\det e^{C} \neq 0$ για οποιονδήποτε n-τάξης πίνακα C. Τώρα, αν C είναι ένας n-τάξης πίνακας, τότε, επειδή C και −C αντιμετατίθενται, είναι

$$I = e^{O} = e^{C+(-C)} = e^{C} . e^{-C}$$

και άρα ισχύει

$$(e^{C})^{-1} = e^{-C}.$$

Τέλος, για οποιονδήποτε n-τάξης πίνακα C μπορεί να ορισθεί ο πίνακας-συνάρτηση e^{xC}, $x \in \mathbb{R}$ που έχει παράγωγο και μάλιστα για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$(e^{xC})' = \left(I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu} C^{\nu}}{\nu!} \right)' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu x^{\nu-1} C^{\nu}}{\nu!} = C \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu-1} C^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

$$= C \left(I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu} C^{\nu}}{\nu!} \right) = Ce^{xC}.$$

Πριν κλείσουμε την παράγραφο αυτή, θα υπενθυμίσουμε ότι η στάθμη ενός n-τάξης τετραγωνικού πίνακα C ορίζεται με τον τύπο

$$|C| = \sup_{c \neq 0} \frac{|Cc|}{|c|} = \sup_{|c|=1} |Cc| = \sup_{|c| \leq 1} |Cc| ,$$

όπου για ένα n-διάστατο διάνυσμα ξ με $|\xi|$ παριστάνουμε μια στάθμη του ξ στο χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων. Για κάθε n-τάξης τετραγωνικό πίνακα C και για κάθε n-διάστατο διάνυσμα c είναι

$$|Cc| \leq |C| \, |c| .$$

Επίσης, για δύο n-τάξης τετραγωνικούς πίνακες C και D ισχύει

$$|CD| \leq |C||D|.$$

Τέλος, αν Y είναι ένας n-τάξης τετραγωνικός πίνακας-συνάρτηση σ' ένα διάστημα I, τότε Y είναι φραγμένος αν και μόνο αν η συνάρτηση $|Y(x)|$, $x \in I$ είναι φραγμένη και, για $I = [x_0, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} Y(x) = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\infty} |Y(x)| = 0$.

Θα δώσουμε τώρα μερικά ακόμα στοιχεία απ'τη Θεωρία Πινάκων, τα οποία θα χρειασθούμε στο Εδάφιο 4. Για τα παρακάτω, C θα είναι ένας n-τάξης πίνακας.

Υπάρχουν ένας ακέραιος m με $1 \leq m \leq n$ και ένα μοναδικό πολυώνυμο q βαθμού m με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του τη μονάδα έτσι ώστε $q(C) = 0$ ενώ $Q(C) \neq 0$ για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο Q βαθμού μικρότερου του m. Το πολυώνυμο q λέμε ότι είναι το <u>ελάχιστο πολυώνυμο</u> του πίνακα C. Αν p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα C και $d_{n-1}(\lambda)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων του πίνακα $\lambda I - C$, τότε

$$p(\lambda) = q(\lambda) d_{n-1}(\lambda).$$

Το συμπέρασμα αυτό δίνει μια μέθοδο για την εύρεση του ελάχιστου πολυωνύμου του πίνακα C, αν είναι γνωστό το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτού.

Ας είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του πίνακα C με πολλαπλότητες $n_1, n_2, \ldots, n_s$ αντίστοιχα $(n_1+n_2+\ldots+n_s=n)$. Τότε

$$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

ενώ

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

όπου $1 \leq m_i \leq n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ και $m_1+m_2+\ldots+m_s = m$. Ένα από τα πιο βασικά συμπεράσματα της Θεωρίας Πινάκων είναι: <u>Αν f είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f^{(j)}(\lambda_i)$ $(j = 0, 1, \ldots, m_i-1;\ i = 1, \ldots, s)$ να υπάρχουν, τότε ισχύει</u>

$$f(C) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) Z_{ij},$$

<u>όπου</u> Z_{ij} $(j = 0, 1, \ldots, m_i-1;\ i = 1, \ldots, s)$ <u>είναι</u> m <u>πίνακες που δεν ε-</u>

ξαρτώνται απ'την f (αλλά μόνο απ'τον πίνακα C) και καλούνται συνιστώσες του πίνακα C. Αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{i=1}^{s} Z_{i0} = I$$

και

$$Z_{ij} = \frac{1}{j!}(C-\lambda_i I)^j Z_{i0} \quad (j=0,1,\ldots,m_i-1;\ i=1,\ldots,s).$$

Ακόμα, αν $m_i = 1$ $(i=1,\ldots,s)$ και $s>1$, τότε είναι

$$Z_{i0} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s}(C-\lambda_k I) \Big/ \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s}(\lambda_i-\lambda_k) \quad (i=1,\ldots,s).$$

Γενικά, οι συνιστώσες του C προσδιορίζονται ως εξής: Θεωρούμε m πολυώνυμα $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ με συντελεστές των μεγιστοβαθμίων όρων τη μονάδα και βαθμούς $0,1,\ldots,m-1$ αντίστοιχα. Τότε απ'το σύστημα

$$g_k(C) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{m_i-1} g_k^{(j)}(\lambda_i) Z_{ij} \quad (k=0,1,\ldots,m-1)$$

προκύπτουν οι m συνιστώσες Z_{ij} $(j=0,1,\ldots,m_i-1;\ i=1,\ldots,s)$ του πίνακα C.

1. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Το Εδάφιο αυτό αναφέρεται στη μελέτη των ομογενών γραμμικών διαφορικών συστημάτων. Εισάγονται οι έννοιες του πίνακα λύσεων και του βασικού πίνακα για το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) και δίνονται μερικά συμπεράσματα (Θεωρήματα 2-10) σχετικά με τις λύσεις, τους πίνακες λύσεων και τους βασικούς πίνακες για το (S_0). Τελικά, αποδεικνύεται (Θεώρημα 11) ότι οι λύσεις του (S_0) είναι ακριβώς οι γραμμικοί συνδυασμοί n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων αυτού. Βρίσκεται ακόμα (Θεώρημα 12) ένας βασικός πίνακας του (S_0) με n=2, όταν είναι γνωστή μια λύση του της οποίας η πρώτη συντεταγμένη δεν μηδενίζεται πουθενά στο I. Τέλος, δίνονται μερικά παραδείγματα και προτείνονται ορισμένες ασκήσεις για λύση.

1.1. Πίνακες λύσεων. Ο τύπος του Jacobi

Ένας n-τάξης πίνακας-συνάρτηση στο διάστημα I, του οποίου οι στήλες είναι λύσεις του (S_0), λέμε ότι είναι ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ας είναι Y ένας n-τάξης πίνακας-συνάρτηση στο διάστημα I. Τότε Y είναι ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) αν και μόνο αν έχει παράγωγο στο I και</u>

$$Y' = AY.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}\cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22}\cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ y_{n1} & y_{n2}\cdots y_{nn} \end{pmatrix}$$

και ας θεωρήσουμε τις στήλες του

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Είναι φανερό ότι ο Y έχει παράγωγο στο I αν και μόνο αν οι n-διάστατες διανυσματικές συναρτήσεις y_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο Y είναι παραγωγίσιμος στο I. Τότε y_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ είναι λύσεις του ομογενούς διαφορικού συστήματος (S_0) αν και μόνο αν

$$\begin{pmatrix} y'_{1j} \\ y'_{2j} \\ \vdots \\ y'_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

ή ισοδύναμα

$$y'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{kj} \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n).$$

Οι τελευταίες ισότητες είναι ισοδύναμες με την

$$Y' = AY.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ας είναι Y ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και c ένα n-διάστατο διάνυσμα. Τότε Yc είναι μια λύση του (S_0).</u>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, είναι $Y' = AY$ και έτσι έχουμε

$$(Yc)' = Y'c = (AY)c = A(Yc),$$

το οποίο αποδεικνύει ότι Yc είναι μια λύση του (S_0).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4</u> (<u>Τύπος του Jacobi</u>). <u>Ας είναι</u> Y <u>ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u> (S_0) <u>και</u> x_0 <u>ένα σημείο του</u> I. <u>Τότε</u>

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \exp\left[\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)\, dt\right] \quad \underline{\text{για όλα τα}}\ x \in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Τότε (Θεώρημα 2) είναι $Y' = AY$, δηλαδή

$$y'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{kj} \quad (i,j = 1,2,\ldots,n).$$

Έτσι, έχουμε

$$(\det Y)' = \det \begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} \cdots y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} \cdots y'_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} \cdots y'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}y_{kn} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}y_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}y_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}y_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+ \\ \vdots$$

$$+ \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}y_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}y_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}y_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \det \begin{pmatrix} y_{k1} & y_{k2} \cdots y_{kn} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{k1} & y_{k2} \cdots y_{kn} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\;\; \vdots \\ y_{k1} & y_{k2} \cdots y_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}\cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22}\cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ y_{n1} & y_{n2}\cdots y_{nn}\end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}\cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22}\cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ y_{n1} & y_{n2}\cdots y_{nn}\end{pmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + a_{nn}\det\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12}\cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22}\cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ y_{n1} & y_{n2}\cdots y_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\det Y = (\operatorname{tr} A)\det Y.$$

Επομένως, η συνάρτηση $\det Y$ είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης

$$w' - (\operatorname{tr} A)w = 0$$

και έτσι προκύπτει ο τύπος μας.

Απ'το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι η ορίζουσα ενός πίνακα λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) ή θα είναι μηδέν σ'ολόκληρο το διάστημα I ή δεν θα μηδενίζεται πουθενά στο I.

1.2. Γραμμική ανεξαρτησία. Βασικοί πίνακες. Το σύνολο των λύσεων

Η χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα είναι ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί λύσεων είναι επίσης λύσεις. Συγκεκριμμένα, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,m)$ λύσεις του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και c_k $(k=1,\ldots,m)$ σταθερές. Τότε $c_1y_1+\ldots+c_my_m$ είναι επίσης μια λύση του (S_0).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι

$$(c_1y_1+\ldots+c_my_m)' = c_1y_1'+\ldots+c_my_m' = c_1(Ay_1)+\ldots+c_m(Ay_m) = A(c_1y_1+\ldots+c_my_m).$$

Ας είναι f_k $(k=1,\ldots,m)$ n-διάστατες διανυσματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα I. Λέμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές c_k $(k=1,\ldots,m)$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε

$$c_1f_1+\ldots+c_mf_m = 0$$

(το δεύτερο μέλος είναι η μηδενική n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο I). Διαφορετικά, δηλαδή όταν η παραπάνω ισότητα ισχύει μόνο για $c_1=\ldots=c_m=0$, λέμε ότι οι f_k $(k=1,\ldots,m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,m)$ λύσεις του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και x_0 ένα σημείο του διαστήματος I. Τότε οι y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα n-διάστατα διανύσματα $y_k(x_0)$ $(k=1,\ldots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν οι λύσεις y_k $(k=1,\ldots,m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, τότε υπάρχουν σταθερές c_k $(k=1,\ldots,m)$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε

$$(*) \qquad c_1y_1+\ldots+c_my_m = 0,$$

οπότε και

$$(**) \qquad c_1y_1(x_0)+\ldots+c_my_m(x_0) = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι τα n-διάστατα διανύσματα $y_k(x_0)$ $(k=1,\ldots,m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $y_k(x_0)$ $(k=1,\ldots,m)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε θα ισχύει η (**) για κάποιες σταθερές c_k $(k=1,\ldots,m)$ που δεν είναι όλες μηδέν. Η συνάρτηση $y=c_1y_1+\ldots+c_my_m$ είναι (Θεώρημα 5) μια λύση του (S_0). Η λύση αυτή πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0)=0$ και επομένως (Θεώρημα 1) είναι η μηδενική λύση. Δηλαδή έχουμε την ισότητα (*), το οποίο αποδεικνύει τη γραμμική εξάρτηση των y_k $(k=1,\ldots,m)$.

'Ενας πίνακας λύσεων του (S_0) που οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες (συναρτήσεις) λέμε ότι είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). 'Ετσι, ένας βασικός πίνακας του (S_0) είναι ένας n-τάξης πίνακας-συνάρτηση στο I, του οποίου οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. Υπάρχουν βασικοί πίνακες του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε τα n-διάστατα διανύσματα

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει την ύπαρξη των λύσεων y_k $(k=1,\ldots,n)$ του (S_0) με

$$y_k(x_0) = e_k \qquad (k=1,\ldots,n),$$

όπου x_0 είναι ένα σημείο του I. Οι λύσεις αυτές είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 6, γραμμικά ανεξάρτητες δεδομένου ότι τα e_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι, ο πίνακας-συνάρτηση με στήλες τις λύσεις y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Ας είναι Y ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Τότε Y είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0) αν και μόνο αν

$$\det Y(x) \neq 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots y_{nn} \end{pmatrix}$$

και ας θεωρήσουμε τις στήλες του

$$y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

που είναι λύσεις του (S_0). Σύμφωνα με το Θεώρημα 6, οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα n-διάστατα διανύσματα

$$y_j(x_0) = \begin{pmatrix} y_{1j}(x_0) \\ y_{2j}(x_0) \\ \vdots \\ y_{nj}(x_0) \end{pmatrix} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε και μόνο τότε αν η σχέση

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0) = 0$$

συνεπάγεται το μηδενισμό των σταθερών c_j $(j=1,2,\ldots,n)$, δηλαδή όταν και μόνο όταν το ομογενές γραμμικό (αλγεβρικό) σύστημα

$$\begin{cases} c_1y_{11}(x_0)+c_2y_{12}(x_0)+\ldots+c_ny_{1n}(x_0) = 0 \\ c_1y_{21}(x_0)+c_2y_{22}(x_0)+\ldots+c_ny_{2n}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1y_{n1}(x_0)+c_2y_{n2}(x_0)+\ldots+c_ny_{nn}(x_0) = 0 \end{cases}$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\det\begin{pmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0)\ldots y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0)\ldots y_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0)\ldots y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = \det Y(x_0) \neq 0.$$

Τέλος, απ' τον τύπο του Jacobi (Θεώρημα 4) προκύπτει ότι, αν $\det Y(x_0) \neq 0$, τότε $\det Y(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. (i) Αν Y είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και C είναι ένας σταθερός n-τάξης πίνακας με $\det C \neq 0$, τότε YC είναι επίσης ένας βασικός πίνακας του (S_0).

(ii) Αν Y και Y^* είναι δυο βασικοί πίνακες του (S_0), τότε υπάρχει ένας σταθερός n-τάξης πίνακας C με $\det C \neq 0$ έτσι ώστε

$$Y^* = YC.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του (S_0). Τότε (Θεωρήματα 2 και 8) θα είναι

$$Y' = AY \text{ και } \det Y(x) \neq 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Αν λοιπόν C είναι ένας n-τάξης σταθερός πίνακας με $\det C \neq 0$, τότε

$$(YC)' = Y'C = (AY)C = A(YC)$$

και

$$\det(YC)(x) = [\det Y(x)]\det C \neq 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Έτσι (Θεωρήματα 2 και 8), YC είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0).

(ii) Ας είναι Y και Y* δύο βασικοί πίνακες του (S_0). Τότε (Θεωρήματα 2 και 8) έχουμε

$$Y' = AY \text{ και } (Y^*)' = AY^*$$

και

$$\det Y(x) \neq 0, \ \det Y^*(x) \neq 0 \text{ για όλα τα } x \in I.$$

Θέτουμε $C = Y^{-1}Y^*$, οπότε θα είναι $Y^* = YC$. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι ο C είναι σταθερός και ότι $\det C \neq 0$. Έχουμε

$$C' = (Y^{-1}Y^*)' = (Y^{-1})'Y^* + Y^{-1}(Y^*)' = (-Y^{-1}Y'Y^{-1})Y^* + Y^{-1}(Y^*)'$$
$$= -Y^{-1}(AY)Y^{-1}Y^* + Y^{-1}(AY^*) = -Y^{-1}AY^* + Y^{-1}AY^* = 0$$

και

$$\det C = (\det Y^{-1}) \det Y^* = \det Y^*/\det Y \neq 0.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 10</u>. <u>Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και y μια λύση αυτού. Τότε υπάρχει ένα, και μόνο ένα, n-διάστατο διάνυσμα c έτσι ώστε</u>

$$y = Yc.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε το n-διάστατο διάνυσμα $c = Y^{-1}(x_0)y(x_0)$, όπου x_0 είναι ένα σημείο του I (είναι $\det Y(x_0) \neq 0$ απ'το Θεώρημα 8). Η συνάρτηση $\tilde{y} = Yc$ είναι (Θεώρημα 3) μια λύση του (S_0). Επιπλέον, έχουμε $\tilde{y}(x_0) = Y(x_0)[Y^{-1}(x_0)y(x_0)] = y(x_0)$ και επομένως (Θεώρημα 1) είναι $\tilde{y} = y$. Άρα, $y = Yc$. Αν $\tilde{c}$ είναι ένα άλλο n-διάστατο διάνυσμα τέτοιο ώστε $y = Y\tilde{c}$, τότε $Yc = Y\tilde{c}$ και άρα $Y^{-1}(Yc) = Y^{-1}(Y\tilde{c})$, και έτσι $c = \tilde{c}$.

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,n)$ n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και y μια λύση αυτού. Τότε υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές c_k $(k=1,\ldots,n)$ έτσι ώστε

$$y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n.$$

Απ'τα Θεωρήματα 3 και 10 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα που είναι και το πιο βασικό συμπέρασμα του Εδαφίου αυτού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11. (i) Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Τότε y είναι μια λύση του (S_0) αν και μόνο αν υπάρχει ένα n-διάστατο διάνυσμα c έτσι ώστε $y=Yc$.

(ii) Αν x_0 είναι ένα σημείο του διαστήματος I και ξ είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα, τότε η λύση y του (S_0) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0)=\xi$ δίνεται απ'τον τύπο

$$y=YY^{-1}(x_0)\xi,$$

όπου Y είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0).

Το συμπέρασμα (i) του Θεωρήματος 11 εκφράζεται και ως εξής: Ας είναι y_k $(k=1,\ldots,n)$ n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Τότε y είναι μια λύση του (S_0) αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές c_k $(k=1,\ldots,n)$ έτσι ώστε $y=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$.

1.3. Υποβιβασμός της τάξης

Αν γνωρίζουμε m, όπου $1\leq m\leq n-1$, γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0), τότε μπορούμε να αναγάγουμε το (S_0) σ'ένα ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα τάξης n-m (δηλαδή με n-m εξισώσεις και n-m άγνωστες συναρτήσεις). Δεν θ'αναπτύξουμε το θέμα αυτό στη γενική περίπτωση, αλλά μόνο στην ειδική περίπτωση $n=2$, δηλαδή στην περίπτωση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$(S_0)_2 \qquad y'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}y.$$

Ας θεωρήσουμε μια λύση

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$$

του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $(S_0)_2$ με $y_{11}(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$. Στη συνέχεια, ας θέσουμε

$$Q = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε με την αντικατάσταση $y = Qu$ παίρνουμε

$$Qu' + Q'u = AQu \text{ ή } u' = Q^{-1}(AQ-Q')u.$$

Αλλά, λαμβάνοντας υπόψη ότι η y_1 είναι μια λύση του (S_0), έχουμε

$$Q^{-1}(AQ-Q') = \frac{1}{y_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y'_{11} & 0 \\ y'_{21} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{y_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}y_{11}+a_{12}y_{21}-y'_{11} & a_{12} \\ a_{21}y_{11}+a_{22}y_{21}-y'_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{y_{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{y_{11}} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & -a_{12}y_{21}+a_{22}y_{11} \end{pmatrix}.$$

Έτσι λοιπόν για

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

έχουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$(*) \qquad \begin{cases} u'_1 = \dfrac{a_{12}}{y_{11}} u_2 \\ u'_2 = \dfrac{1}{y_{11}} (-a_{12}y_{21}+a_{22}y_{11}) u_2. \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του (*) περιέχει μόνο την άγνωστη συνάρτηση u_2. Ας είναι x_0 ένα σημείο του διαστήματος I. Μια λύση του (*) είναι

$$\begin{cases} u_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{a_{12}(s)}{y_{11}(s)} \exp\left[\int_{x_0}^{s} \frac{-a_{12}(t)y_{21}(t)+a_{22}(t)y_{11}(t)}{y_{11}(t)}\,dt\right] ds, \ x \in I \\ u_2(x) = \exp\left[\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{-a_{12}(t)y_{21}(t)+a_{22}(t)y_{11}(t)}{y_{11}(t)}\,dt\right], \ x \in I. \end{cases}$$

Τότε η συνάρτηση

$$y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = Qu = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}u_1 \\ y_{21}u_1+u_2 \end{pmatrix}$$

είναι μια λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $(S_0)_2$. Οι λύσεις y_1 και y_2 του $(S_0)_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, γιατί (Θεώρημα 8)

$$\det\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{11}(x)u_1(x) \\ y_{21}(x) & y_{21}(x)u_1(x)+u_2(x) \end{pmatrix} =$$

$$= y_{11}(x)u_2(x) \neq 0$$

για όλα τα $x \in I$.

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το παρακάτω θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 12</u>. <u>Ας είναι</u>

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$$

<u>μια λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u> $(S_0)_2$ <u>με</u> $y_{11}(x) \neq 0$ <u>για όλα τα</u> $x \in I$. <u>Επιπλέον, ας είναι</u> x_0 <u>ένα σημείο του</u> I <u>και</u>

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{-a_{12}(t)y_{21}(t)+a_{22}(t)y_{11}(t)}{y_{11}(t)}\,dt, \ x \in I.$$

<u>Τότε ένας βασικός πίνακας του</u> $(S_0)_2$ <u>είναι</u>

$$\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{11}(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{a_{12}(s)}{y_{11}(s)}\exp[v(s)]ds \\ y_{21}(x) & y_{21}(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{a_{12}(s)}{y_{11}(s)}\exp[v(s)]ds+\exp[v(x)] \end{pmatrix}, \quad x \in I.$$

1.4. Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Ν'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας πίνακας λύσεων και να βρεθεί η ορίζουσα αυτού. (ii) Ν' αποδειχθεί ότι

$$y(x) = \begin{pmatrix} (x-1)e^x \\ xe^x \\ (x+1)e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι μια λύση.

<u>Λύση</u>. (i) Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \\ e^x & (x+3)e^x & 8e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix} =$$

$$= A(x)Y(x)$$

και επομένως (Θεώρημα 2) Y είναι ένας πίνακας λύσεων. Τώρα, με τον τύπο του Jacobi (Θεώρημα 4), παίρνουμε

$$\det Y(x) = \det Y(0)\exp\left(\int_0^x \mathrm{tr}\, A\, dt\right) = e^{4x}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = e^{4x}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (ii) Παρατηρούμε ότι για $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \begin{pmatrix} (x-1)e^x \\ xe^x \\ (x+1)e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Y(x)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, y είναι μια λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Οι συναρτήσεις f_1, f_2 και f_3 με

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \cos^2 x \\ \cos x \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 2\sin^2 x \\ \cos x \\ -1 \end{pmatrix} \text{ και } f_3(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\cos x \\ 7 \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένες. (ii) Οι συναρτήσεις g_1 και g_2 με

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } g_2(x) = \begin{pmatrix} x\log x \\ 1+\log x \end{pmatrix} \text{ για } x \geqq 1$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

<u>Λύση</u>. (i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$2f_1(x)+f_2(x)-f_3(x) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 x \\ 2\cos x \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin^2 x \\ \cos x \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3\cos x \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos^2 x+2\sin^2 x-2 \\ 2\cos x+\cos x-3\cos x \\ 8-1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $2f_1+f_2-f_3 = 0$, που αποδεικνύει τη γραμμική εξάρτηση των f_1, f_2 και f_3. (ii) Ας υποθέσουμε ότι $c_1g_1+c_2g_2 = 0$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές. Τότε

$$c_1g_1(x)+c_2g_2(x) = c_1\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x\log x \\ 1+\log x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x+c_2x\log x \\ c_1+c_2(1+\log x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε $x \geqq 1$. Έτσι, θα είναι

$$c_1+c_2(1+\log x) = 0 \text{ για όλα τα } x \geqq 1.$$

Για $x=1$ και $x=e$ παίρνουμε $c_1+c_2=0$ και $c_1+2c_2=0$, δηλαδή $c_1=c_2=0$. Αυτό αποδεικνύει ότι οι g_1 και g_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \quad \text{με } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Οι συναρτήσεις y_1 και y_2 με

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix} \text{ και } y_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ (x+1)e^x \\ (x+2)e^x \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. (ii) Η συνάρτηση y με

$$y(x) = \begin{pmatrix} (2x-1)e^x \\ (2x+1)e^x \\ (2x+3)e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι μια λύση.

<u>Λύση</u>. (i) Οι y_1 και y_2 είναι λύσεις γιατί για όλα τα $x \in \mathbb{R}$

$$y_1'(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix} = Ay_1(x)$$

και

$$y_2'(x) = \begin{pmatrix} (x+1)e^x \\ (x+2)e^x \\ (x+3)e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^x \\ (x+1)e^x \\ (x+2)e^x \end{pmatrix} = Ay_2(x).$$

Εξάλλου οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες γιατί (Θεώρημα 6) τα διανύσματα

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } y_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

είναι, όπως εύκολα αποδεικνύεται, γραμμικά ανεξάρτητα. (ii) Βλέπουμε αμέσως ότι $y = 2y_2 - y_1$, και επομένως (Θεώρημα 5) y είναι μια λύση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \text{ με } A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^{-2} & x^{-1} \end{pmatrix} \text{ για } x > 0.$$

(i) Ν'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

είναι ένας βασικός πίνακας. (ii) Να βρεθεί ένας βασικός πίνακας Y^* με

$$Y^*(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. (i) Για όλα τα $x > 0$ έχουμε

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1+\log x \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^{-2} & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} = A(x)Y(x)$$

και

$$\det Y(x) = x \neq 0.$$

'Αρα (Θεωρήματα 2 και 8) Y είναι ένας βασικός πίνακας. (ii) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9, θα είναι $Y^* = YC$ για κάποιον n-τάξης σταθερό πίνακα C με $\det C \neq 0$. 'Εχουμε $Y^*(1) = Y(1)C$, οπότε $C = Y^{-1}(1)Y^*(1)$. 'Ετσι, για κάθε $x > 0$,

$$Y^*(x) = Y(x)Y^{-1}(1)Y^*(1) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & -x\log x \\ 1 & -1-\log x \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \text{ με } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

αφού αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας αυτού. Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Στο Παράδειγμα 1 αποδείξαμε ότι Y είναι ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού μας συστήματος. Ακόμα, βρήκαμε ότι $\det Y(x) = e^{4x}$ για $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, έχουμε $\det Y(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και επομένως (Θεώρημα 8) Y είναι ένας βασικός πίνακας. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, οι λύσεις y θα δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} \\ c_1e^x + c_2(x+1)e^x + 2c_3e^{2x} \\ c_1e^x + c_2(x+2)e^x + 4c_3e^{2x} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Ιδιαίτερα, για τη λύση y_0 θα έχουμε $c_1+c_3 = 1$, $c_1+c_2+2c_3 = 0$ και $c_1+2c_2+4c_3 = -1$, απ'όπου προκύπτει ότι $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ και $c_3 = 0$. Έτσι

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} (x-1)e^x \\ -xe^x \\ -(x+1)e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα·

$$y' = Ay \quad \text{με } A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^{-2} & x^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{για } x > 0,$$

αφού αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

είναι ένας βασικός πίνακας. Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Το ότι Y είναι ένας βασικός πίνακας έχει αποδειχθεί στο Παράδειγμα 4. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, οι λύσεις y θα δίνονται απ' τον τύπο

$$y(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1x+c_2x\log x \\ c_1+c_2(1+\log x) \end{pmatrix}, \quad x>0.$$

Ειδικά, η λύση y_0 είναι (Θεώρημα 11)

$$y_0(x) = Y(x)Y^{-1}(1)y_0(1) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1+\log x) \\ 2+\log x \end{pmatrix},$$

$$x>0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να βρεθεί ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$Y' = Ay \quad \text{με } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

αφού πρώτα αποδειχθεί ότι

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι μια λύση του.

<u>Λύση</u>. Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$y_1'(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} = Ay_1(x),$$

που αποδεικνύει ότι η y_1 είναι μια λύση. Θέτουμε για $x \in \mathbb{R}$

$$v(x) = \int_0^x \frac{-e^t+3e^t}{e^t}\,dt = 2\int_0^x dt = 2x.$$

Τότε (Θεώρημα 12) ένας βασικός πίνακας του συστήματος είναι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^x\int_0^x \frac{1}{e^s}\exp[v(s)]ds \\ e^x & e^x\int_0^x \frac{1}{e^s}\exp[v(s)]ds+\exp[v(x)] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & e^x\int_0^x e^s ds \\ e^x & e^x\int_0^x e^s ds+e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x}-e^x \\ e^x & 2e^{2x}-e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.5. Ασκήσεις

1. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετασθεί αν είναι γραμμικά εξαρτημένες ή γραμμικά ανεξάρτητες οι συναρτήσεις που δίνονται:

(i) $$f_1(x) = \begin{pmatrix} \sin x+\cos x \\ 2\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 2\sin x \\ 3\sin x-\cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

$$\text{και} \quad f_3(x) = \begin{pmatrix} 4\cos x \\ 2\cos x \\ 2\sin x-4\cos x \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) $$f_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) $$f_1(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -4e^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} xe^{-x} \\ -4xe^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}.$$

(iv) $f_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ και $f_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$ για $x \in (-1,1)$.

(v) $f_1(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \sin x \end{pmatrix}$ και $f_2(x) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2}-2x \\ 2e^{x^2}+2x \end{pmatrix}$ για $x \in \mathbb{R}$.

2. Ν'αποδειχθεί ότι η ορίζουσα κάθε πίνακα λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$y' = \begin{pmatrix} 1-\cos^2 x & \log(1+x^2) \\ x^2+7 & -\sin^2 x \end{pmatrix} y, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερά.

3. Ας είναι Y ένας πίνακας λύσεων του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$y' = \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2x} & x-\frac{1}{2x} \\ x-\frac{1}{2x} & x+\frac{1}{2x} \end{pmatrix} y, \quad x \geq 1.$$

Ν'αποδειχθεί ότι

$$\det Y(x) = xe^{x^2-1}\det Y(1) \quad \text{για κάθε } x \geq 1.$$

4. Ν'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Να βρεθεί, στη συνέχεια, ένας βασικός πίνακας Y^* με

$$Y^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} y,$$

αφού πρώτα αποδειχθεί ότι ένας βασικός πίνακας αυτού είναι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} & e^{5x} \\ 0 & 2e^{3x} & 2e^{5x} \\ 0 & 0 & 2e^{5x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y,$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι μια λύση του είναι η

$$y_1(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:

(i) $y' = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y, \; x > 0.$ (ii) $y' = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y, \; x > 0.$

(iii) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} y.$ (iv) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} y.$

2. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στο Εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε τα μη ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα. Συγκεκριμμένα, θ'αποδείξουμε (Θεώρημα 13) ότι οι λύσεις του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) είναι ακριβώς τα αθροίσματα των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (S_0) με μια μερική λύση του (S). Θα δώσουμε (Θεώρημα 14) έπειτα ένα τύπο που δίνει μια μερική λύση του (S) με τη βοήθεια ενός βασικού πίνακα του (S_0). Στη συνέχεια, θα δώσουμε (Θεώρημα 15) τον τρόπο για την εύρεση όλων των λύσεων του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) αν είναι γνωστός ένας βασικός πίνακας του (S_0). Τέλος, θα παραθέσουμε ορισμένα παραδείγματα και θα προτείνουμε μερικές ασκήσεις για λύση.

2.1. Μερικές λύσεις. Το σύνολο των λύσεων

Μια συγκεκριμμένη λύση του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) λέμε ότι είναι μια <u>μερική λύση</u> αυτού.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 13. Ας είναι y_μ μια μερική λύση του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S). Τότε y είναι μια λύση του (S) αν και μόνο αν υπάρχει μια λύση $\tilde{y}$ του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (S_0) έτσι ώστε</u>

$$y = \tilde{y} + y_\mu .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι y μια λύση του (S). Θέτουμε $\tilde{y} = y - y_\mu$ και έχουμε

$$\tilde{y}' = y' - y_\mu' = (Ay+b) - (Ay_\mu + b) = A(y - y_\mu) = A\tilde{y},$$

δηλαδή y είναι μια λύση του (S_0) και $y=\tilde{y}+y_\mu$. Αντίστροφα, αν $\tilde{y}$ είναι μια λύση του (S_0) και θέσουμε $y=\tilde{y}+y_\mu$, τότε

$$y'=\tilde{y}'+y_\mu'=A\tilde{y}+(Ay_\mu+b)=A(\tilde{y}+y_\mu)+b=Ay+b,$$

δηλαδή y είναι μια λύση του (S).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 14</u>. <u>Αν</u> x_0 <u>είναι ένα σημείο του διαστήματος</u> I <u>και</u> Y <u>είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u> (S_0), <u>τότε</u>

$$y_\mu(x)=Y(x)\int_{x_0}^{x}Y^{-1}(t)b(t)dt,\quad x\in I$$

<u>είναι μια μερική λύση του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u> (S). <u>Επιπλέον, η λύση αυτή πληροί την αρχική συνθήκη</u> $y_\mu(x_0)=$ $=0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι $x_0\in I$ και Y ένας βασικός πίνακας του (S_0). Τότε (Θεωρήματα 2 και 8) είναι $Y'=AY$ και $\det Y(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in I$. Έτσι, έχει νόημα ο Y^{-1} και για κάθε $x\in I$ παίρνουμε

$$y_\mu'(x)=Y'(x)\int_{x_0}^{x}Y^{-1}(t)b(t)dt+Y(x)Y^{-1}(x)b(x)$$

$$=A(x)Y(x)\int_{x_0}^{x}Y^{-1}(t)b(t)dt+b(x)=A(x)y_\mu(x)+b(x),$$

δηλαδή y_μ είναι μια λύση του (S). Είναι φανερό ότι $y_\mu(x_0)=0$.

Συνδυάζοντας τώρα τα Θεωρήματα 11, 13 και 14, παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 15</u>. <u>Ας είναι</u> x_0 <u>ένα σημείο του διαστήματος</u> I <u>και</u> Y <u>ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u> (S_0). <u>Τότε</u> y <u>είναι μια λύση του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u> (S) <u>αν και μόνο αν υπάρχει ένα</u> n<u>-διάστατο διάνυσμα</u> c <u>έτσι ώστε</u>

$$y(x)=Y(x)\left[c+\int_{x_0}^{x}Y^{-1}(t)b(t)dt\right]\ \text{για όλα τα}\ x\in I.$$

<u>Επιπλέον, αν</u> ξ <u>είναι ένα</u> n<u>-διάστατο διάνυσμα, τότε η λύση</u> y <u>του</u> (S) <u>που πληροί την αρχική συνθήκη</u> $y(x_0)=\xi$ <u>δίνεται απ' τον τύπο</u>

$$y(x) = Y(x)\left[Y^{-1}(x_0)\xi + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)b(t)dt\right], \quad x \in I.$$

2.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ένα μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα με διάστημα ορισμού το $(0,\infty)$ έχει τις λύσεις

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} x(1+\log x) \\ \log x \end{pmatrix} \text{ και } y_3(x) = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \text{ για } x > 0.$$

Να επιλυθεί αυτό και, ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα θα έχει (Θεώρημα 13) τις λύσεις $\tilde{y}_1 = y_1 - y_3$ και $\tilde{y}_2 = y_2 - y_3$. Είναι

$$\tilde{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } \tilde{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x\log x \\ 1+\log x \end{pmatrix} \text{ για } x > 0.$$

Τότε

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

θα είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού συστήματος γιατί (Θεώρημα 8) $\det Y(x) = x \neq 0$ για κάθε $x \in (0,\infty)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, οι λύσεις $\tilde{y}$ του ομογενούς συστήματος θα δίνονται απ' τον τύπο

$$\tilde{y}(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x + c_2 x\log x \\ c_1 + c_2(1+\log x) \end{pmatrix}, \quad x > 0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Έτσι (Θεώρημα 13), οι λύσεις y του μη ομογενούς μας γραμμικού διαφορικού συστήματος είναι

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y_3(x) = \begin{pmatrix} c_1x + c_2x\log x + x \\ \\ c_1 + c_2(1+\log x) - 1 \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

Ειδικά, για τη λύση y_0 έχουμε $c_1+1=2$ και $c_1+c_2-1=5$, δηλαδή $c_1=1$ και $c_2=5$, και επομένως

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} 2x+5x\log x \\ \\ 5+5\log x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay + b \text{ με } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

αφού διαπιστωθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού συστήματος. Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί την αρχική συνθήκη

$$y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο Y είναι (Παραδείγματα 1 και 5 του Εδαφίου 1, Παράγραφος 1.4) ένας βασικός πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$Y^{-1}(x)b(x) = \begin{pmatrix} 2xe^{-x} & -(3x-2)e^{-x} & (x-1)e^{-x} \\ -2e^{-x} & 3e^{-x} & -e^{-x} \\ e^{-2x} & -2e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ 1 \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

και έτσι

$$\int_0^x Y^{-1}(t)b(t)dt = \begin{pmatrix} \int_0^x (-t+2)dt \\ \int_0^x dt \\ \int_0^x (-e^{-t})dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2}+2x \\ x \\ e^{-x}-1 \end{pmatrix}.$$

'Αρα (Θεώρημα 15), όλες οι λύσεις του διαφορικού μας συστήματος είναι

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{2}+2x \\ x \\ e^{-x}-1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1-\frac{x^2}{2}+2x \\ c_2+x \\ c_3+e^{-x}-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x\left[\frac{x^2}{2}+c_1+1+(c_2+2)x+(c_3-1)e^x\right] \\ e^x\left[\frac{x^2}{2}+c_1+c_2+2+(c_2+3)x+2(c_3-1)e^x\right] \\ e^x\left[\frac{x^2}{2}+c_1+2c_2+4+(c_2+4)x+4(c_3-1)e^x\right] \end{pmatrix}$$

για $x \in \mathbb{R}$. Ειδικά, για τη λύση y_0 έχουμε

$$c_1+1+c_3-1=1,\quad c_1+c_2+2+2(c_3-1)=-1,\quad c_1+2c_2+4+4(c_3-1)=0$$

απ'όπου προκύπτει $c_1=-2$, $c_2=-5$, $c_3=3$, και άρα

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} e^x\left(\frac{x^2}{2}-1-3x+2e^x\right) \\ e^x\left(\frac{x^2}{2}-5-2x+4e^x\right) \\ e^x\left(\frac{x^2}{2}-8-x+8e^x\right) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x^{-2} & x^{-1} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad x > 0; \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

αφού πρώτα αποδειχθεί ότι ένας βασικός πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος είναι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

Λύση. Το γεγονός ότι Y είναι ένας βασικός πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος έχει αποδειχθεί στο Παράδειγμα 4 του Εδαφίου 1 (Παράγραφος 1.4). Τώρα, η ζητούμενη λύση y είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 15,

$$y(x) = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_1^x \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1+\log t & -t\log t \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} dt \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_1^x t\,dt \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x & x\log x \\ 1 & 1+\log x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2+1) \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x(x^2+1) - 2x\log x \\ \frac{1}{2}(x^2-3) - 2\log x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

2.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού συστήματος. Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 με

$$y_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

αφού πρώτα αποδειχθεί ότι μια λύση του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος είναι η

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$y' = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x > 0; \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) $$y' = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Να επιλυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} xe^x \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

με το δεδομένο ότι το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα δέχεται λύσεις της μορφής $ce^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $c \neq 0$ είναι 2-διάστατο διάνυσμα και λ είναι σταθερά.

3. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Το Εδάφιο αυτό αναφέρεται στα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή εδώ μελετάται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) όπου ο συντελεστής πίνακας A είναι σταθερός. Το διάστημα ορισμού του (S_0) είναι σ'αυτή την περίπτωση ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Αποδεικνύεται ότι e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και εκφράζονται οι λύσεις του (S_0) με τη βοήθεια αυτού του βασικού πίνακα (Θεώρημα 16). Στη συνέχεια, δίνεται μια μέθοδος (οφειλόμενη στον Putzer [E.J. Putzer, Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients, Amer. Math. Monthly, 73(1966), 2-7]) για την εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ (Θεώρημα 17). Η περίπτωση όπου ο A είναι πραγματικός εξετάζεται ιδιαίτερα (Θεώρημα 18). Τέλος, παρατίθενται μερικά παραδείγματα και δίνονται ασκήσεις για λύση.

3.1. Ο βασικός πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$

Το παρακάτω Θεώρημα εξασφαλίζει ότι e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) και δίνει την έκφραση των λύσεων του (S_0) με τη βοήθεια αυτού του βασικού πίνακα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16. Ο πίνακας-συνάρτηση e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Επιπλέον, y είναι μια λύση του (S_0) αν και μόνο αν υπάρχει ένα n-διάστατο διάνυσμα c έτσι ώστε

$$y(x) = e^{xA}c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ειδικά, η λύση y του (S_0) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0) = \xi$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$ και ξ είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα, δίνεται απ' τον τύπο

$$y(x) = e^{(x-x_0)A}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$(e^{xA})' = Ae^{xA} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, ο τύπος του Jacobi (Θεώρημα 4) δίνει

$$\det e^{xA} = (\det e^{0A})\, e^{x\operatorname{tr}A} = e^{x\operatorname{tr}A} \neq 0$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Έτσι (Θεωρήματα 2 και 8) e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 11, βλέπουμε ότι y είναι μια λύση του (S_0) αν και μόνο αν $y(x) = e^{xA}c$, $x \in \mathbb{R}$ για κάποιο n-διάστατο διάνυσμα c. Αν τέλος $x_0 \in \mathbb{R}$ και ξ είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα, τότε (Θεώρημα 11) η λύση y με $y(x_0) = \xi$ είναι

$$y(x) = e^{xA}(e^{x_0A})^{-1}\xi = e^{xA}\cdot e^{-x_0A}\xi = e^{(x-x_0)A}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η εύρεση του e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του ορισμού

$$e^{xA} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu A^\nu}{\nu!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

παρά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις για τον πίνακα A. Η πιο απλή τέτοια περίπτωση είναι αυτή όπου ο A είναι διαγώνιος. Αν λοιπόν

$$A = \operatorname{diag}[q_1, \ldots, q_n],$$

τότε

$$A^\nu = \operatorname{diag}[q_1^\nu, \ldots, q_n^\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

και έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA} = \operatorname{diag}\left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu q_1^\nu}{\nu!}, \ldots, 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu q_n^\nu}{\nu!}\right] = \operatorname{diag}\left[e^{xq_1}, \ldots, e^{xq_n}\right].$$

Έτσι, στη γενική περίπτωση οποιουδήποτε A, το πρόβλημα της εύρεσης του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ για ν'αντιμετωπισθεί απαιτεί ιδιαίτερες μεθόδους.

Το επόμενο Θεώρημα οφείλεται στον Putzer και δίνει μια μέθοδο για την εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με τη βοήθεια των ιδιοτιμών του πίνακα A. Το συμπέρασμα αυτό είναι σχετικά πρόσφατο (1966).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 17 (Putzer).</u> <u>Ας είναι</u> $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ <u>οι ιδιοτιμές του πίνακα</u> A <u>(όχι αναγκαστικά διακεκριμμένες) και</u>

$$P_k = \prod_{j=1}^{k} (A-\lambda_j I) \quad (k=1,\dots,n-1).$$

<u>Ας είναι ακόμα</u> $r_1,\dots,r_n$ <u>η λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος</u>

$$(*) \qquad r_1' = \lambda_1 r_1, \quad r_i' = r_{i-1} + \lambda_i r_i \quad (i=2,\dots,n)$$

<u>που πληροί την αρχική συνθήκη</u>

$$r_1(0) = 1, \quad r_i(0) = 0 \quad (i=2,\dots,n).$$

<u>Τότε</u>

$$e^{xA} = r_1(x) I + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}(x) P_k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$Y = r_1 I + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1} P_k.$$

Τότε

$$Y' = r_1' I + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}' P_k = \lambda_1 r_1 I + \sum_{k=1}^{n-1} (r_k + \lambda_{k+1} r_{k+1}) P_k.$$

Θέτοντας

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (A-\lambda_j I),$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} AY-Y' &= r_1 A + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1} A P_k - \lambda_1 r_1 I - \sum_{k=1}^{n-1} (r_k + \lambda_{k+1} r_{k+1}) P_k \\ &= r_1 (A-\lambda_1 I) + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1} (A-\lambda_{k+1} I) P_k - \sum_{k=1}^{n-1} r_k P_k \\ &= r_1 P_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1} P_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} r_k P_k = r_n P_n. \end{aligned}$$

Αλλά, σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley-Hamilton, P_n είναι ο μηδενικός n-τάξης πίνακας. Άρα $AY-Y'=0$, δηλαδή

$$Y'=AY.$$

Τώρα, έχουμε

$$Y(0)=r_1(0)I+\sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}(0)P_k=I$$

και επομένως (Θεώρημα 4)

$$\det Y(x)=[\det Y(0)]e^{x\,\mathrm{tr}A}=e^{x\,\mathrm{tr}A}\neq 0$$

για όλα τα $x\in\mathbb{R}$. Έτσι (Θεωρήματα 2 και 8), Y είναι ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Επειδή e^{xA}, $x\in\mathbb{R}$ είναι επίσης (Θεώρημα 16) ένας βασικός πίνακας του (S_0), θα υπάρχει (Θεώρημα 9) ένας σταθερός n-τάξης πίνακας C με $\det C\neq 0$, έτσι ώστε

$$e^{xA}=Y(x)C \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αλλά είναι $e^{0A}=e^0=I$ και $Y(0)=I$. Άρα $C=I$ και επομένως

$$e^{xA}=Y(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η λύση $r_1,\ldots,r_n$ του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (*) (που έχει σταθερούς συντελεστές), η οποία πληροί την αρχική συνθήκη $r_1(0)=1$, $r_i(0)=0$ $(i=2,\ldots,n)$, δίνεται αναγωγικά ως εξής:

$$r_1(x)=e^{\lambda_1 x},\ x\in\mathbb{R} \text{ και } r_i(x)=e^{\lambda_i x}\int_0^x r_{i-1}(t)e^{-\lambda_i t}dt,\ x\in\mathbb{R}\ (i=2,\ldots,n).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου ο σταθερός πίνακας A είναι πραγματικός. Γι'αυτή την περίπτωση έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 18</u>. <u>Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας</u> A <u>είναι πραγματικός. Τότε για το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα</u> (S_0) <u>ισχύουν τα παρακάτω</u>:

(i) <u>Αν</u> y <u>είναι μια λύση, τότε</u> Re y <u>και</u> Im y <u>είναι επίσης λύσεις</u>.

(ii) <u>Κάθε λύση με αρχική τιμή ένα πραγματικό</u> n-<u>διάστατο διάνυσμα είναι πραγματική</u> (<u>με την έννοια ότι έχει πραγματικές συνιστώσες</u>).

(iii) Ας είναι Y ένας πραγματικός βασικός πίνακας. Τότε y είναι μια πραγματική λύση αν και μόνο αν υπάρχει ένα πραγματικό n-διάστατο διάνυσμα c έτσι ώστε $y = Yc$.

(iv) Ο πίνακας-συνάρτηση e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός βασικός πίνακας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Αν y είναι μια λύση του (S_0), τότε

$$0 = y' - Ay = [(\mathrm{Re}\, y)' + i(\mathrm{Im}\, y)'] - A(\mathrm{Re}\, y + i\mathrm{Im}\, y) =$$

$$= [(\mathrm{Re}\, y)' - A(\mathrm{Re}\, y)] + i[(\mathrm{Im}\, y)' - A(\mathrm{Im}\, y)]$$

και άρα

$$(\mathrm{Re}\, y)' - A(\mathrm{Re}\, y) = 0 \quad \text{και} \quad (\mathrm{Im}\, y)' - A(\mathrm{Im}\, y) = 0,$$

δηλαδή $\mathrm{Re}\, y$ και $\mathrm{Im}\, y$ είναι λύσεις του (S_0).

(ii) Ας είναι y μια λύση του (S_0) με $y(x_0) = \xi$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$ και ξ είναι ένα πραγματικό n-διάστατο διάνυσμα. Τότε $\mathrm{Im}\, y$ είναι μια λύση του (S_0) με $(\mathrm{Im}\, y)(x_0) = 0$. Άρα $\mathrm{Im}\, y$ είναι η μηδενική λύση του (S_0) και άρα η λύση y είναι πραγματική.

(iii) Αν c είναι ένα πραγματικό n-διάστατο διάνυσμα, τότε (Θεώρημα 11) $y = Yc$ είναι μια πραγματική λύση του (S_0). Αντίστροφα, αν y είναι μια πραγματική λύση του (S_0), τότε (Θεώρημα 11) υπάρχει ένα n-διάστατο διάνυσμα c έτσι ώστε $y = Yc$. Τότε το c θα είναι πραγματικό, γιατί $0 = \mathrm{Im}\, y = \mathrm{Im}(Yc) = Y(\mathrm{Im}\, c)$ και άρα $\mathrm{Im}\, c = 0$ (επειδή $\det Y(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 8).

(iv) Είναι φανερό.

3.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί ο πίνακας-συνάρτηση e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά απ' τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{(iii)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση. (i) Είναι

$$A^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

και έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu A^\nu}{\nu!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \begin{pmatrix} x^\nu & 0 & 0 \\ 0 & (-2x)^\nu & 0 \\ 0 & 0 & (-x)^\nu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-2x)^\nu}{\nu!} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-x)^\nu}{\nu!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

(ii) Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$A^{2\nu} = (-2)^\nu I \quad \text{και} \quad A^{2\nu-1} = (-2)^{\nu-1} A \quad (\nu = 1,2,\ldots).$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$e^{xA} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu A^\nu}{\nu!} = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu} A^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1} A^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$$

$$= I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}(-2)^\nu I}{(2\nu)!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}(-2)^{\nu-1} A}{(2\nu-1)!}$$

$$= \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}(-2)^\nu}{(2\nu)!}\right] I + \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu-1}(-2)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!}\right] A$$

$$= \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (x\sqrt{2})^{2\nu}}{(2\nu)!}\right] I + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}(x\sqrt{2})^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}\right] A$$

$$= (\cos x\sqrt{2})\, I + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x\sqrt{2})\, A$$

$$= (\cos x\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x\sqrt{2} & \sqrt{2}\sin x\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\sqrt{2} & \cos x\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

δεδομένου ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\cos t = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} t^{2\nu}}{(2\nu)!} \quad \text{και} \quad \sin t = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} t^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}.$$

(iii) Παρατηρούμε ότι $A = 2I+B$, όπου

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και ότι

$$B^{\nu} = 0 \quad (\nu = 3,4,\ldots).$$

Έτσι, για $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$e^{xA} = e^{2xI+xB} = e^{2xI}e^{xB} = \left[I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2x)^{\nu} I^{\nu}}{\nu!}\right]\left(I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu} B^{\nu}}{\nu!}\right)$$

$$= \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2x)^{\nu}}{\nu!}\right] I \left(I + xB + \frac{x^2}{2} B^2\right)$$

$$= e^{2x}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= e^{2x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$r_1' = r_1, \quad r_2' = r_1 + 4r_2; \quad r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = 0$$

έχει τη λύση

$$r_1(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad r_2(x) = \frac{1}{3}(e^{4x} - e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι (Θεώρημα 17), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA} = r_1(x)I + r_2(x)(A-I) = e^x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(e^{4x}-e^x)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(e^{4x}+2e^x) & \frac{2}{3}(e^{4x}-e^x) \\ \frac{1}{3}(e^{4x}-e^x) & \frac{1}{3}(2e^{4x}+e^x) \end{pmatrix}.$$

Επομένως (Θεώρημα 16) οι λύσεις y δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(e^{4x}+2e^x) & \frac{2}{3}(e^{4x}-e^x) \\ \frac{1}{3}(e^{4x}-e^x) & \frac{1}{3}(2e^{4x}+e^x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[(c_1+2c_2)e^{4x}+2(c_1-c_2)e^x] \\ \frac{1}{3}[(c_1+2c_2)e^{4x}-(c_1-c_2)e^x] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{4x}+2C_2e^x \\ C_1e^{4x}-C_2e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $C_1 = \frac{1}{3}(c_1+2c_2)$, $C_2 = \frac{1}{3}(c_1-c_2)$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \text{ με } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1' = 2r_1, \quad r_2' = r_1+2r_2; \quad r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = 0$$

είναι

$$r_1(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad r_2(x) = xe^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και άρα (Θεώρημα 17) για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$e^{xA} = r_1(x)I + r_2(x)(A-2I) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + xe^{2x}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x}-xe^{2x} & -xe^{2x} \\ xe^{2x} & e^{2x}+xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Έτσι (Θεώρημα 16), οι λύσεις y δίνονται απ' τον τύπο

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}-xe^{2x} & -xe^{2x} \\ xe^{2x} & e^{2x}+xe^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2x}-(c_1+c_2)xe^{2x} \\ c_2e^{2x}+(c_1+c_2)xe^{2x} \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \text{ με } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ και το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$r_1' = r_1, \ r_2' = r_1+2r_2, \ r_3' = r_2-r_3; \ r_1(0) = 1, \ r_2(0) = 0, \ r_3(0) = 0$$

έχει τη λύση

$$r_1(x) = e^x, \ x\in\mathbb{R}; \ r_2(x) = -e^x+e^{2x}, \ x\in\mathbb{R}; \ r_3(x) = -\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}, \ x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως (Θεώρημα 17), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA} = r_1(x)I+r_2(x)(A-I)+r_3(x)(A-I)(A-2I) = e^x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+(-e^x+e^{2x}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^x+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} & -\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x} \\ \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}+\frac{2}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} \\ -\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} & \frac{1}{2}e^x+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x} \end{pmatrix}$$

και άρα (Θεώρημα 16) οι λύσεις y δίνονται απ' τον τύπο

$$y(x)=e^{xA}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(c_1-c_3)e^{x}+\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)e^{2x}+\frac{1}{6}(c_1-2c_2+c_3)e^{-x}\\ \frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)e^{2x}-\frac{1}{3}(c_1-2c_2+c_3)e^{-x}\\ -\frac{1}{2}(c_1-c_3)e^{x}+\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)e^{2x}+\frac{1}{6}(c_1-2c_2+c_3)e^{-x}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}\\ C_2e^{2x}-2C_3e^{-x}\\ -C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}\end{pmatrix},$$

όπου $C_1=\frac{1}{2}(c_1-c_3)$, $C_2=\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)$, $C_3=\frac{1}{6}(c_1-2c_2+c_3)$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y'=Ay \text{ με } A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο πίνακας A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1=\lambda_2=-1$ και $\lambda_2=2$. Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1'=-r_1,\ r_2'=r_1-r_2,\ r_3'=r_2+2r_3;\ r_1(0)=1,\ r_2(0)=0,\ r_3(0)=0$$

είναι

$r_1(x)=e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$; $r_2(x)=xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$; $r_3(x)=-\frac{1}{9}e^{-x}-\frac{1}{3}xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$

και έτσι (Θεώρημα 17) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$e^{xA}=r_1(x)I+r_2(x)(A+I)+r_3(x)(A+I)^2=e^{-x}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+$$

$$+xe^{-x}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{9}e^{-x}-\frac{1}{3}xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}\right)\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} \\ -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} \\ -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Επομένως (Θεώρημα 16) οι λύσεις y είναι

$$y(x) = e^{xA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2c_1-c_2-c_3)e^{-x}+\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)e^{2x} \\ \frac{1}{3}(-c_1+2c_2-c_3)e^{-x}+\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)e^{2x} \\ \frac{1}{3}(-c_1-c_2+2c_3)e^{-x}+\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3)e^{2x} \end{pmatrix}$$

για $x \in \mathbb{R}$, όπου c_1, c_2, c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ και το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$r_1' = r_1, \quad r_2' = r_1+r_2, \quad r_3' = r_2+r_3; \quad r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = 0, \quad r_3(0) = 0$$

έχει τη λύση

$$r_1(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}; \quad r_2(x) = xe^x, \ x \in \mathbb{R}; \quad r_3(x) = \frac{x^2}{2}e^x, \ x \in \mathbb{R}.$$

'Ετσι (Θεώρημα 17), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA} = r_1(x)I+r_2(x)(A-I)+r_3(x)(A-I)^2 = e^x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+$$

$$+xe^x\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\frac{x^2}{2}e^x\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^x & -xe^x & 2xe^x-\frac{x^2}{2}e^x \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

και άρα (Θεώρημα 16) οι λύσεις y δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x)=e^{xA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^x+(-c_2+2c_3)xe^x-\frac{c_3}{2}x^2e^x \\ c_2e^x+c_3xe^x \\ c_3e^x \end{pmatrix}, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2, c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y'=Ay \text{ με } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$ και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1'=2ir_1, \; r_2'=r_1-2ir_2; \; r_1(0)=1, \; r_2(0)=0$$

είναι

$$r_1(x)=e^{2ix}, \; x\in\mathbb{R}; \; r_2(x)=-\frac{i}{4}(e^{2ix}-e^{-2ix}), \; x\in\mathbb{R}.$$

Άρα (Θεώρημα 17), για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA}=r_1(x)I+r_2(x)(A-2iI)=e^{2ix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{i}{4}(e^{2ix}-e^{-2ix})\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix}) & \frac{-i}{4}(e^{2ix}-e^{-2ix}) \\ i(e^{2ix}-e^{-2ix}) & \frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2x & \frac{1}{2}\sin 2x \\ -2\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

και επομένως (Θεώρημα 16) οι λύσεις y δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = e^{xA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos 2x + \frac{c_2}{2}\sin 2x \\ -2c_1\sin 2x + c_2\cos 2x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \quad \text{με} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$r_1' = ir_1, \quad r_2' = r_1 - ir_2, \quad r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = 0$$

είναι

$$r_1(x) = e^{ix}, \ x \in \mathbb{R}; \quad r_2(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \ x \in \mathbb{R}$$

και επομένως (Θεώρημα 17) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA} = r_1(x)I + r_2(x)(A - iI) = e^{ix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$$

$$= (\cos x + i\sin x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\sin x)\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x & \sin x + i\sin x \\ -\sin x + i\sin x & \cos x - \sin x \end{pmatrix}.$$

Άρα (Θεώρημα 16) οι λύσεις y δίνονται απ' τον τύπο

$$y(x) = e^{xA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos x + (c_1 + c_2 + ic_2)\sin x \\ c_2\cos x + (-c_1 + ic_1 - c_2)\sin x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = Ay \text{ με } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Στο Παράδειγμα 5 έχουμε βρεί ότι

$$e^{xA} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-x}+e^{2x} & -e^{-x}+e^{2x} & -e^{-x}+e^{2x} \\ -e^{-x}+e^{2x} & 2e^{-x}+e^{2x} & -e^{-x}+e^{2x} \\ -e^{-x}+e^{2x} & -e^{-x}+e^{2x} & 2e^{-x}+e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως (Θεώρημα 16) η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών θα είναι

$$y(x) = e^{(x-0)A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{xA}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>3.3.</u> <u>Ασκήσεις</u>

<u>1</u>. Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:

(i) $y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} y.$ (ii) $y' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y.$

<u>2</u>. Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:

(i) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y.$ (ii) $y' = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} y.$

<u>3</u>. Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:

(i) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} y.$ (iii) $y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} y.$

(ii) $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} y.$ (iv) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y.$

4. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \text{ με } A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Ν'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} & 3e^{5x} \\ -e^{2x} & -2e^{3x} & -6e^{5x} \\ -e^{2x} & -e^{3x} & -2e^{5x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας. (ii) Να βρεθεί ο e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$.

7. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα $y' = Ay$, όπου A είναι ένας σταθερός τρίτης τάξης πίνακας. Αν

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} e^x+e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \quad y_3(x) = \begin{pmatrix} e^x-e^{3x} \\ -e^{3x} \\ -e^{3x} \end{pmatrix} \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

είναι τρείς λύσεις αυτού, να βρεθεί ο πίνακας-συνάρτηση e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$.

4. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Το Εδάφιο αυτό περιέχει μερικά συμπεράσματα συμπληρωματικά εκείνων του προηγούμενου Εδαφίου. Συγκεκριμμένα, θεωρείται και εδώ το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) όπου ο πίνακας A είναι σταθερός και δίνεται μια άλλη μέθοδος (Θεώρημα 19) για την εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ του (S_0) καθώς επίσης (Θεώρημα 20) δίνονται συνθήκες για να είναι φραγμένος ο πίνακας e^{xA} για $x \geq 0$ ή για να ισχύει $\lim_{x\to\infty} e^{xA} = 0$. Η μέθοδος για την εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ που θα δοθεί εδώ είναι πιο πολύπλοκη απ' εκείνη που δόθηκε στο προηγούμενο Εδάφιο με το Θεώρημα 17, έχει όμως το πλεονέκτημα ότι οδηγεί στο Θεώρημα 20 που είναι χρήσιμο για τη μελέτη της ευστάθειας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Θα δοθούν επίσης μερικά παραδείγματα εφαρμογής των Θεωρημάτων 19 και 20 και θα προταθούν για λύση ορισμένες ασκήσεις.

4.1. Εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x\in\mathbb{R}$

Το παρακάτω Θεώρημα (Θεώρημα 19) δίνει μια μέθοδο για την εύρεση του βασικού πίνακα e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής προϋποθέτει την εύρεση του ελάχιστου πολυωνύμου του πίνακα A και των συνιστωσών του A.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19. Ας είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του πίνακα A με πολλαπλότητες $n_1, n_2, \ldots, n_s$ αντίστοιχα $(n_1+n_2+\ldots$ $\ldots+n_s = n)$ και ας θεωρήσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο του A

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

όπου $1 \leq m_i \leq n_i$ $(i = 1,2,\ldots,s)$. Ας είναι ακόμα Z_{ij} $(j = 0,1,\ldots,m_i-1;$ $i = 1,2,\ldots,s)$ οι συνιστώσες του πίνακα A.

Τότε

$$e^{xA} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} x^j Z_{ij}\right)e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα συγκεκριμμένο $x \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση

$$f(\lambda) = e^{x\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Τότε θα είναι

$$f(A) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) Z_{ij}.$$

Αλλά

$$f^{(j)}(\lambda_i) = x^j e^{x\lambda_i} \quad (j=0,1,\ldots,m_i-1;\ i=1,2,\ldots,s),$$

και έτσι παίρνουμε

$$e^{xA} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} x^j e^{x\lambda_i} Z_{ij} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} x^j Z_{ij} \right) e^{\lambda_i x}.$$

4.2. Συνθήκες ώστε e^{xA} να είναι φραγμένος για $x \geq 0$ ή $\lim\limits_{x\to\infty} e^{xA} = 0$

Το παρακάτω Θεώρημα (Θεώρημα 20) χρησιμοποιείται για την πλήρη μελέτη της ευστάθειας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 20. Ας είναι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του πίνακα A με πολλαπλότητες $n_1, n_2, \ldots, n_s$ αντίστοιχα $(n_1+n_2+\ldots$ $\ldots+n_s = n)$ και ας θεωρήσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο του A

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

όπου $1 \leq m_i \leq n_i$ $(i = 1,2,\ldots,s)$. Τότε:

(I) e^{xA} είναι φραγμένος για $x \geq 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $i=1,$ $2,\ldots,s$, είναι $\mathrm{Re}\lambda_i \leq 0$ και επιπλέον $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ συνεπάγεται $m_i = 1$.

(II) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{xA} = 0$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1,2,\ldots,s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι Z_{ij} $(j=0,1,\ldots,m_i-1;\ i=1,2,\ldots,s)$ οι συνιστώσες του πίνακα A. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 19, θα ισχύει

$$e^{xA} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} x^j Z_{ij} \right) e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ας είναι i ένας δείκτης στο σύνολο $\{1,2,\ldots,s\}$ και ας θέσουμε

$$P_i(x) = \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} x^j Z_{ij} \right) e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $Re\lambda_i < 0$. Τότε $\lim_{x\to\infty} x^j e^{\lambda_i x} = 0$ $(j = 0,1,\ldots,m_i-1)$ και άρα $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = 0$ και (επομένως) $P_i(x)$ είναι φραγμένος για $x \geqq 0$.

(ii) $Re\lambda_i = 0$ και $m_i = 1$. Στην περίπτωση αυτή είναι

$$P_i(x) = Z_{i0} e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και έτσι $P_i(x)$ είναι φραγμένος για $x \geqq 0$ χωρίς όμως να ισχύει $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = 0$.

(iii) $Re\lambda_i = 0$ και $m_i > 1$. Τότε $P_i(x)$ δεν είναι φραγμένος για $x \geqq 0$ και (άρα) δεν ισχύει $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = 0$.

(iv) $Re\lambda_i > 0$. Τότε πάλι $P_i(x)$ δεν είναι φραγμένος για $x \geqq 0$ και (επομένως) δεν ισχύει $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = 0$.

Έτσι, $P_i(x)$ είναι φραγμένος για $x \geqq 0$ αν και μόνο αν ή $Re\lambda_i < 0$ ή $Re\lambda_i = 0$ και $m_i = 1$. Επίσης, $\lim_{x\to\infty} P_i(x) = 0$ αν και μόνο αν $Re\lambda_i < 0$. Μετά απ'αυτά προκύπτουν άμεσα τα συμπεράσματα (I) και (II) του Θεωρήματός μας.

4.3. Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Λύση. Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ και το ελάχιστο πολυώνυμό του

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = (\lambda-1)(\lambda-4).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 19, θα έχουμε

$$e^{xA} = e^{\lambda_1 x} Z_{10} + e^{\lambda_2 x} Z_{20} = e^x Z_{10} + e^{4x} Z_{20}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου

$$Z_{10} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2 I) = -\frac{1}{3}(A-4I), \quad Z_{20} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I) = \frac{1}{3}(A-I).$$

Αμέσως βρίσκουμε ότι

$$Z_{10}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad Z_{20}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

και έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA}=-\frac{1}{3}\,e^{x}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\,e^{4x}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(e^{4x}+2e^{x}) & \frac{2}{3}(e^{4x}-e^{x})\\ \frac{1}{3}(e^{4x}-e^{x}) & \frac{1}{3}(2e^{4x}+e^{x})\end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Λύση. Ο A έχει την διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1=2$. Το ελάχιστο πολυώνυμο q αυτού είναι $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2$ ή $q(\lambda)=\lambda-\lambda_1$. Επειδή $A-\lambda_1 I\neq 0$, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2=(\lambda-2)^2$. 'Ετσι (Θεώρημα 19) θα είναι

$$e^{xA}=e^{\lambda_1 x}(Z_{10}+xZ_{11})=e^{2x}(Z_{10}+xZ_{11}),$$

όπου

$$Z_{10}=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad Z_{11}=(A-\lambda_1 I)Z_{10}=A-2I=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

'Αρα, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA}=e^{2x}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}e^{2x}(1-x) & -e^{2x}x\\ e^{2x}x & e^{2x}(1+x)\end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Λύση. Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ και το ελάχιστο πολυώνυμο αυτού είναι $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 19, είναι

$$e^{xA}=e^{\lambda_1 x}Z_{10}+e^{\lambda_2 x}Z_{20}+e^{\lambda_3 x}Z_{30}=e^{x}Z_{10}+e^{2x}Z_{20}+e^{-x}Z_{30},\quad x\in\mathbb{R},$$

όπου είναι:

$$Z_{10}=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)=-\frac{1}{2}(A-2I)(A+I)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$Z_{20}=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)=\frac{1}{3}(A-I)(A+I)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$Z_{30}=\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=\frac{1}{6}(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Επομένως, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} & -\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}\\ \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}+\frac{2}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x}\\ -\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}\end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x\in\mathbb{R}$ με

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Λύση. Ο πίνακας A έχει τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ καθώς και την απλή ιδιοτιμή $\lambda_2=2$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=$ $=(A+I)(A-2I)=0$ και επομένως το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=(\lambda+1)(\lambda-2)$. Το Θεώρημα 19 εξασφαλίζει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA}=e^{\lambda_1 x}Z_{10}+e^{\lambda_2 x}Z_{20}=e^{-x}Z_{10}+e^{2x}Z_{20},$$

όπου

$$Z_{10} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2 I) = -\frac{1}{3}(A-2I) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

και

$$Z_{20} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I) = \frac{1}{3}(A+I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Επομένως, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} \\ -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} \\ -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & -\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} & \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x} \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ (διπλή) και $\lambda_2 = 1$ (απλή). Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I) = (A-2I)(A-I) \neq 0$ και έτσι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)$. Τότε (Θεώρημα 19) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA} = e^{\lambda_1 x}(Z_{10}+xZ_{11})+e^{\lambda_2 x}Z_{20} = e^{2x}(Z_{10}+xZ_{11})+e^{x}Z_{20},$$

όπου Z_{10}, Z_{11}, Z_{20} είναι οι συνιστώσες του A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f(A) = f(\lambda_1)Z_{10}+f'(\lambda_1)Z_{11}+f(\lambda_2)Z_{20},$$

δηλαδή

$$(A-\lambda_1 I)^2 = (\lambda_2-\lambda_1)^2 Z_{20} \text{ ή } (A-2I)^2 = Z_{20}.$$

Έτσι, βρίσκουμε αμέσως ότι

$$Z_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε, επειδή $Z_{10}+Z_{20}=I$, έχουμε

$$Z_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε

$$Z_{11} = (A-\lambda_1 I)Z_{10} = (A-2I)Z_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA} = e^{2x}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{x}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x} & 0 & -e^{2x}+e^{x} \\ 0 & e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο πίνακας A έχει την τριπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$. Επειδή $(A-\lambda_1 I)^2 = (A-I)^2 \neq 0$, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^3 = (\lambda-1)^3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 19, είναι για $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA} = e^{\lambda_1 x}(Z_{10}+xZ_{11}+x^2 Z_{12}) = e^{x}(Z_{10}+xZ_{11}+x^2 Z_{12}),$$

όπου

$$Z_{10} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z_{11} = (A-\lambda_1 I)Z_{10} = A-I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2}(A-\lambda_1 I)^2 Z_{10} = \frac{1}{2}(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{xA} = e^x \begin{pmatrix} 1 & -x & 2x - \frac{1}{2}x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & -xe^x & \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)e^x \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. Ο A έχει την τριπλή ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ και είναι τέτοιος ώστε $A-\lambda_1 I = A-I \neq 0$ ενώ $(A-\lambda_1 I)^2 = (A-I)^2 = 0$. Έτσι, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^2 = (\lambda-1)^2$. Επομένως (Θεώρημα 19) έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{xA} = e^x (Z_{10} + xZ_{11}),$$

όπου είναι

$$Z_{10} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$Z_{11} = (A-\lambda_1 I)Z_{10} = A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$e^{xA} = e^x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 2xe^x \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να εξετασθεί αν είναι φραγμένος ο πίνακας e^{xA} για $x \geq 0$ σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{(i)}\quad A=\begin{pmatrix}-1+i & 0 & 1\\ -1 & i & 1\\ 0 & 0 & -1+i\end{pmatrix}.\qquad \text{(ii)}\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -5 & -4\end{pmatrix}.$$

$$\text{(iii)}\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.\quad \text{(iv)}\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}.\quad \text{(v)}\ A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. (i) Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=-1+i$ (διπλή) και $\lambda_2=i$ (απλή). Παρατηρούμε ότι $Re\lambda_1=-1<0$ και ότι $Re\lambda_2=0$ αλλά η λ_2 είναι απλή ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου του A. Έτσι (Θεώρημα 20), e^{xA} είναι φραγμένος για $x\geqq 0$.

(ii) Ο πίνακας A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ (διπλή) και $\lambda_2=-3$ (απλή). Επειδή $Re\lambda_1=-1<0$ και $Re\lambda_2=-3<0$, το Θεώρημα 20 εξασφαλίζει ότι e^{xA} είναι φραγμένος για $x\geqq 0$.

(iii) Ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ (διπλή) και $\lambda_2=2$ (απλή). Σύμφωνα με το Θεώρημα 20, το γεγονός ότι $Re\lambda_2=2>0$ συνεπάγεται ότι e^{xA} δεν είναι φραγμένος για $x\geqq 0$.

(iv) Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=0$ (διπλή) και $\lambda_2=-1$ (απλή). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=A(A+I)\neq O$ και άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A συμπίπτει με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Είναι $Re\lambda_1=0$ και $Re\lambda_2=-1<0$. Ακόμα, η λ_1 είναι διπλή ρίζα του ελάχιστου πολυωνύμου. Έτσι (Θεώρημα 20), e^{xA} δεν είναι φραγμένος για $x\geqq 0$.

(v) Ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1=0$ (διπλή) και $\lambda_2=-1$ (απλή). Έχουμε $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)=A(A+I)=O$ και έτσι το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι $q(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$. Είναι $Re\lambda_1=0$, $Re\lambda_2<0$ και ακόμα λ_1 είναι απλή ρίζα του q. Άρα (Θεώρημα 20), e^{xA} είναι φραγμένος για $x\geqq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Να εξετασθεί αν ισχύει $\lim_{x\to\infty} e^{xA}=O$ σε καθεμιά απ' τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{(i)}\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -5 & -4\end{pmatrix}.\quad \text{(ii)}\ A=\begin{pmatrix}-1+i & 0 & 1\\ -1 & i & 1\\ 0 & 0 & -1+i\end{pmatrix}.\quad \text{(iii)}\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>Λύση</u>. (i) Ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ (διπλή) και $\lambda_2=-3$ (απλή). Επειδή $Re\lambda_1<0$ και $Re\lambda_2<0$, θα είναι (Θεώρημα 20) $\lim_{x\to\infty} e^{xA}=O$.

(ii) Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1+i$ (διπλή) και $\lambda_2 = i$ (απλή). Επειδή $\mathrm{Re}\lambda_2 = 0$, το θεώρημα 20 εξασφαλίζει ότι δεν ισχύει $\lim_{x\to\infty} e^{xA} = 0$.

(iii) Ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 2$ (απλή). Σύμφωνα με το Θεώρημα 20, δεν ισχύει $\lim_{x\to\infty} e^{xA} = 0$, γιατί $\mathrm{Re}\lambda_2 = 2 > 0$.

4.4. Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. (iii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Να βρεθεί ο πίνακας e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. (iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Να εξετασθεί αν e^{xA} είναι φραγμένος για $x \geq 0$ ή $\lim_{x\to\infty} e^{xA} = 0$ σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (iii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΠΑΛΕΙΦΗΣ

Στο Εδάφιο αυτό θ'αναπτυχθεί με παραδείγματα η μέθοδος της απαλειφής για την επίλυση γραμμικών διαφορικών συστημάτων. Θα δοθούν και μερικές ασκήσεις για λύση.

5.1. Η μέθοδος της απαλειφής

Η μέθοδος της απαλειφής είναι η πιο στοιχειώδης μέθοδος για την επίλυση του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S). Παρατηρούμε ότι, αν οι συναρτήσεις a_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ και b_i $(i=1,2,\dots,n)$ έχουν συνεχείς παραγώγους $(n-1)$-τάξης στο διάστημα I, τότε για κάθε λύση $y_1,y_2,\dots,y_n$ του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) οι συναρτήσεις y_i $(i=1,2,\dots,n)$ έχουν (συνεχείς) παραγώγους n-τάξης στο I.

Στη μέθοδο της απαλειφής, με κατάλληλες παραγωγίσεις και απαλειφές φθάνουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση m-τάξης, για κάποιο m με $1 \le m \le n$, ως προς μια απ'τις άγνωστες συναρτήσεις. Απ'αυτή τη γραμμική διαφορική εξίσωση προσδιορίζεται η μια άγνωστη συνάρτηση. Απ'τις υπόλοιπες $n-1$ άγνωστες συναρτήσεις, $n-m$ απ'αυτές προσδιορίζονται από ισάριθμες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (εφόσον $m<n$) και οι $m-1$ άλλες βρίσκονται απ'την επίλυση ενός γραμμικού αλγεβρικού συστήματος με $m-1$ εξισώσεις (εφόσον $m>1$). Έτσι, στη μέθοδο της απαλειφής η επίλυση ενός γραμμικού διαφορικού συστήματος ανάγεται ουσιαστικά στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος της απαλειφής θα γίνει κατανοητή με τα παρακάτω παραδείγματα.

5.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = y_1+12y_2,\quad y_2' = 3y_1+y_2.$$

Λύση. Έχουμε

$$y_1'' = y_1'+12y_2' = (y_1+12y_2)+12(3y_1+y_2) = 37y_1+24y_2.$$

Απαλείφοντας τη συνάρτηση y_2 απ'τις εξισώσεις

$$y_1' = y_1+12y_2,\quad y_1'' = 37y_1+24y_2,$$

παίρνουμε

$$y_1''-2y_1'-35y_1=0.$$

Οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης αυτής δίνονται απ'τον τύπο

$$y_1(x)=c_1e^{7x}+c_2e^{-5x},\quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Τώρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$y_2(x)=\frac{1}{12}[y_1'(x)-y_1(x)]=\frac{1}{12}[(7c_1e^{7x}-5c_2e^{-5x})-(c_1e^{7x}+c_2e^{-5x})]$$

$$=\frac{1}{2}(c_1e^{7x}-c_2e^{-5x}).$$

'Ετσι, οι λύσεις του γραμμικού διαφορικού συστήματος δίνονται απ' τους τύπους

$$y_1(x)=c_1e^{7x}+c_2e^{-5x},\ x\in\mathbb{R};\quad y_2(x)=\frac{1}{2}(c_1e^{7x}-c_2e^{-5x}),\ x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1'=y_1-2y_2,\quad y_2'=-y_2.$$

<u>Λύση</u>. Απ'τη δεύτερη εξίσωση του διαφορικού συστήματος βρίσκουμε αμέσως την άγνωστη συνάρτηση y_2. 'Ετσι, έχουμε

$$y_2(x)=c_2e^{-x},\quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_2 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Μετά απ'αυτό, η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται

$$y_1'-y_1=-2c_2e^{-x}$$

που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Απ'αυτή παίρνουμε

$$y_1(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x},\quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. 'Αρα, όλες οι λύσεις του διαφορικού συστήματος δίνονται απ'τους τύπους

$$y_1(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x},\ x\in\mathbb{R};\quad y_2(x)=c_2e^{-x},\ x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \quad y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3, \quad y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3.$$

<u>Λύση</u>. Έχουμε

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1' - y_2' - y_3' = (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3) \\ &= 3y_1 - 5y_2 - y_3. \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας μ'αυτό τον τρόπο, βρίσκουμε

$$y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3.$$

Απαλείφοντας τις άγνωστες συναρτήσεις y_2 και y_3 απ'τις εξισώσεις

$$y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \quad y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3, \quad y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3,$$

παίρνουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης

$$y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0,$$

απ'όπου έχουμε

$$y_1(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1, c_2 και c_3 είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι άγνωστες συναρτήσεις y_2 και y_3 προσδιορίζονται απ'το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \quad y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3,$$

απ'όπου βρίσκουμε

$$y_2 = \frac{1}{4}(-y_1'' + y_1' + 2y_1), \quad y_3 = \frac{1}{4}(y_1'' - 5y_1' + 2y_1).$$

Έτσι, είναι

$$y_2(x) = -c_1 e^{3x} - c_3 e^{-2x}, \ x \in \mathbb{R}; \quad y_3(x) = -c_1 e^{3x} - c_2 e^{2x} + 4c_3 e^{-2x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3, \quad y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3, \quad y_3' = 3y_1 + 3y_2 - y_3.$$

<u>Λύση</u>. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_1'' &= 3y_1' + y_2' - y_3' = 3(3y_1 + y_2 - y_3) + (y_1 + 3y_2 - y_3) - (3y_1 + 3y_2 - y_3) \\ &= 7y_1 + 3y_2 - 3y_3. \end{aligned}$$

Με απαλειφή των y_2 και y_3 απ'τις εξισώσεις

$$y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3, \quad y_1'' = 7y_1 + 3y_2 - 3y_3,$$

παίρνουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y_1''-3y_1'+2y_1=0,$$

απ'την οποία προκύπτει

$$y_1(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Απ'τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος απαλείφουμε την y_3 και παίρνουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y_2'-2y_2=y_1'-2y_1$$

ή

$$y_2'-2y_2=-c_1e^x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

'Ετσι, βρίσκουμε

$$y_2(x)=c_1e^x+c_3e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_3 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τέλος, απ'την πρώτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει

$$y_3=3y_1+y_2-y_1',$$

οπότε

$$y_3(x)=3c_1e^x+(c_2+c_3)e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1'=2y_1+y_2+3y_3, \quad y_2'=2y_2-y_3, \quad y_3'=2y_3.$$

<u>Λύση</u>. Απ'την τρίτη εξίσωση του συστήματος βρίσκουμε αμέσως

$$y_3(x)=c_3e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_3 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τότε, η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται

$$y_2'-2y_2=-y_3$$

ή

$$y_2'-2y_2=-c_3e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R}$$

που είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Αυτή δίνει

$$y_2(x)=(c_2-c_3x)e^{2x}, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_2 είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Τέλος, η πρώτη εξίσωση του συστήματος οδηγεί στη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης απ'την οποία βρίσκουμε

$$y_1(x) = [c_1+(c_2+3c_3)x-\frac{1}{2}c_3x^2]e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να επιλυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 2y_1+y_2+x, \quad y_2' = y_1+3y_2+1.$$

<u>Λύση</u>. Έχουμε

$$\begin{aligned} y_1'' &= 2y_1'+y_2'+1 = 2(2y_1+y_2+x)+(y_1+3y_2+1)+1 \\ &= 5y_1+5y_2+2x+2. \end{aligned}$$

Με απαλειφή της y_2 απ'τις εξισώσεις

$$y_1' = 2y_1+y_2+x, \quad y_1'' = 5y_1+5y_2+2x+2,$$

παίρνουμε

$$y_1''-5y_1'+5y_1 = -3x+2.$$

Απ'τη γραμμική διαφορική εξίσωση αυτή προκύπτει

$$y_1(x) = e^{5x/2}(c_1e^{\sqrt{5}x/2}+c_2e^{-\sqrt{5}x/2})-(1+3x)/5, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η άλλη άγνωστη συνάρτηση y_2 προκύπτει απ'την πρώτη εξίσωση του συστήματος· έτσι,

$$y_2(x) = e^{5x/2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1e^{\sqrt{5}x/2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2e^{-\sqrt{5}x/2}\right)+(x-1)/5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_1' = y_2+y_3+x, \quad y_2' = y_1+y_3+1, \quad y_3' = y_1+y_2-x^2; \quad y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0.$$

<u>Λύση</u>. Έχουμε

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_2'+y_3'+1 = (y_1+y_3+1)+(y_1+y_2-x^2)+1 = 2y_1+y_2+y_3-x^2+2 \\ &= 2y_1+y_1'-x-x^2+2, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y_1''-y_1'-2y_1 = -x-x^2+2,$$

απ'όπου προκύπτει

$$y_1(x) = c_1e^{2x}+c_2e^{-x} + \frac{1}{2}(x^2-1), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Απ'τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε

$$y_2'+y_2 = y_1'+y_1+1-x,$$

δηλαδή έχουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y_2'+y_2 = 3c_1e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2+1).$$

'Ετσι, βρίσκουμε

$$y_2(x) = c_3e^{-x}+c_1e^{2x} + \frac{1}{2}(x^2-2x+3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τέλος, η άγνωστη συνάρτηση y_3 προσδιορίζεται απ'την πρώτη εξίσωση του συστήματος· είναι

$$y_3(x) = c_1e^{2x}-(c_2+c_3)e^{-x} - \frac{1}{2}(x^2-2x+3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Οι αρχικές συνθήκες $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$ δίνουν

$$c_1+c_2 - \frac{1}{2} = 0, \quad c_3+c_1 + \frac{3}{2} = 0, \quad c_1-(c_2+c_3) - \frac{3}{2} = 0$$

και άρα

$$c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = -\frac{5}{3}.$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται απ'τους τύπους

$$y_1(x) = \frac{1}{6}e^{2x}+\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{2}(x^2-1), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$y_2(x) = \frac{1}{6}e^{2x}-\frac{5}{3}e^{-x}+\frac{1}{2}(x^2-2x+3), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$y_3(x) = \frac{1}{6}e^{2x}+\frac{4}{3}e^{-x}-\frac{1}{2}(x^2-2x+3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:
   (i) $y_1' = -y_1, \; y_2' = -y_2.$
   (ii) $y_1' = 3y_1-2y_2, \; y_2' = 2y_1-2y_2.$
   (iii) $y_1' = y_1-y_2, \; y_2' = -y_2.$
   (iv) $y_1' = -3y_1+2y_2, \; y_2' = -y_1-y_2.$

2. Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:

(i) $y_1' = 5y_1+2y_2+2y_3,\ y_2' = 2y_1+2y_2-4y_3,\ y_3' = 2y_1-4y_2+2y_3.$

(ii) $y_1' = 3y_1+2y_2+2y_3,\ y_2' = y_1+4y_2+y_3,\ y_3' = -2y_1-4y_2-y_3.$

(iii) $y_1' = y_1+y_2+y_3,\ y_2' = y_2-y_3,\ y_3' = -y_3.$

(iv) $y_1' = -2y_1+y_2,\ y_2' = y_1-2y_2,\ y_3' = y_1+y_2-5y_3,\ y_4' = 5y_3.$

(v) $y_1' = y_2-y_3+y_4,\ y_2' = -y_2+y_4,\ y_3' = y_3-y_4,\ y_4' = 2y_4.$

3. Να επιλυθούν τα μη ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα:

(i) $y_1' = y_1+y_2+e^x,\ y_2' = y_1-y_2-e^x.$

(ii) $y_1' = 2y_1-5y_2+\sin x,\ y_2' = y_1-2y_2+\cos x.$

(iii) $y_1' = 4y_1+5y_2+4e^x\cos x,\ y_2' = -2y_1-2y_2.$

(iv) $y_1' = y_2+y_3+x,\ y_2' = -y_2+y_3-1,\ y_3' = y_1+y_2-y_3+x^2.$

(v) $y_1' = -y_1+x^2,\ y_2' = y_1+y_3+1,\ y_3' = y_1-y_3-x.$

4. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y_1' = y_2,\ y_2' = -2y_1+3y_2;\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3.$

(ii) $y_1' = 3y_1-2y_2,\ y_2' = -2y_1,\ y_3' = y_1+2y_3;\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = = y_3(0) = 1.$

(iii) $y_1' = 3y_1-4y_2+e^x,\ y_2' = y_1-y_2+e^x;\ y_1(0) = y_2(0) = 1.$

6. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στο Εδάφιο αυτό μελετάται η ευστάθεια (ή ακριβέστερα η ευστάθεια, η ασυμπτωτική ευστάθεια, η ομοιόμορφη ευστάθεια και η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια) των λύσεων του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S) ή ισοδύναμα της μηδενικής λύσης του (αντίστοιχου) ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0), όπου υποτίθεται ότι $I = [x_0,\infty)$ για κάποιο x_0. Δίνονται (Θεώρημα 21) ικανές και αναγκαίες συνθήκες πάνω σ'έναν (οποιονδήποτε) βασικό πίνακα του (S_0) ώστε η μηδενική λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) να είναι ευσταθής ή ασυμπτωτικά ευσταθής ή ομοιόμορφα ευσταθής ή ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής. Στην ειδική περίπτωση που ο συντελεστής πίνακας A είναι σταθερός οι συνθήκες αυτές αναφέρονται στις ιδιοτιμές του πίνακα A (Θεώρημα 22). Τέλος, δύο παραδείγματα παρατίθενται και μια άσκηση προτείνεται για λύση.

6.1. Η ευστάθεια: Ορισμοί

Ας είναι $\tilde{y}$ μια λύση του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S). Θα λέμε ότι:

(i) Η λύση $\tilde{y}$ είναι ευσταθής αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S) τέτοια ώστε $|y(x_0) - \tilde{y}(x_0)| < \delta$, να είναι

$$|y(x)-\tilde{y}(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geq x_0.$$

(ii) Η λύση $\tilde{y}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν αυτή είναι ευσταθής και επιπλέον υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S) τέτοια ώστε $|y(x_0)-\tilde{y}(x_0)| < \delta_0$, να είναι

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)-\tilde{y}(x)| = 0.$$

(iii) Η λύση $\tilde{y}$ είναι ομοιόμορφα ευσταθής αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S) τέτοια ώστε $|y(x_1)-\tilde{y}(x_1)| < \delta$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$, να είναι

$$|y(x)-\tilde{y}(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geq x_1.$$

(iv) Η λύση $\tilde{y}$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν αυτή είναι ομοιόμορφα ευσταθής και επιπλέον υπάρχει $\delta_0 > 0$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\vartheta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S) τέτοια ώστε $|y(x_1)-\tilde{y}(x_1)| < \delta_0$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$, να είναι

$$|y(x)-\tilde{y}(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geq x_1+\vartheta.$$

Ακόμα, θα λέμε ότι το γραμμικό διαφορικό σύστημα (S) είναι ευσταθές ή ασυμπτωτικά ευσταθές ή ομοιόμορφα ευσταθές ή ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν όλες οι λύσεις αυτού είναι αντίστοιχα ευσταθείς ή ασυμπτωτικά ευσταθείς ή ομοιόμορφα ευσταθείς ή ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθείς.

Ας θεωρήσουμε μια λύση $\tilde{y}$ του γραμμικού διαφορικού συστήματος (S). Τότε (Θεώρημα 13) y είναι μια λύση του (S) αν και μόνο αν $y = y_0+\tilde{y}$ (και έτσι $|y-\tilde{y}|=|y_0|$) για κάποια λύση y_0 του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού συστήματος (S_0). Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Το γραμμικό διαφορικό σύστημα (S) είναι ευσταθές ή ασυμπτωτικά ευσταθές ή ομοιόμορφα ευσταθές ή ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν η μηδενική λύση του (αντίστοιχου) ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) είναι αντίστοιχα ευσταθής ή ασυμπτωτικά ευσταθής ή ομοιόμορφα ευσταθής ή ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

6.2. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια

Θα δώσουμε τώρα ένα συμπέρασμα που περιέχει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ευστάθεια ή την ασυμπτωτική ευστάθεια ή την ομοιόμορφη ευστάθεια ή την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Οι συνθήκες αυτές θ'αναφέρονται σ'ένα (τυχαίο) βασικό πίνακα του (S_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 21. Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0). Τότε η μηδενική λύση του (S_0) είναι:

(i) Ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $K>0$ έτσι ώστε

(1) $$|Y(x)| \leq K \text{ για όλα τα } x \geq x_0.$$

(ii) Ομοιόμορφα ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $K>0$ έτσι ώστε

(2) $$|Y(x)Y^{-1}(s)| \leq K \text{ για όλα τα } x,s \text{ με } x \geq s \geq x_0.$$

(iii) Ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν

(3) $$\lim_{x\to\infty} |Y(x)| = 0.$$

(iv) Ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $K>0$, $\mu>0$ έτσι ώστε

(4) $$|Y(x)Y^{-1}(s)| \leq Ke^{-\mu(x-s)} \text{ για όλα τα } x,s \text{ με } x \geq s \geq x_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν Y_1 και Y_2 είναι δύο βασικοί πίνακες του (S_0), τότε (Θεώρημα 9) θα είναι $Y_1 = Y_2C$ για κάποιον σταθερό n-τάξης τετραγωνικό πίνακα C με $\det C \neq 0$, οπότε για τυχόντα $x,s \geq x_0$ θα ισχύει

$$|Y_1(x)| \leq |Y_2(x)|\,|C| \quad \text{και} \quad |Y_1(x)Y_1^{-1}(s)| = |Y_2(x)Y_2^{-1}(s)|.$$

Επίσης, πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα 9, αν Y_0 είναι ένας βασικός πίνακας του (S_0), τότε $Y^* = Y_0Y_0^{-1}(x_0)$ είναι επίσης ένας βασικός πίνακας του (S_0) για τον οποίο είναι $Y^*(x_0) = I$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $Y(x_0) = I$, οπότε (Θεώρημα 11) για κάθε λύση y του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (S_0) θα είναι

$$y = Yy(x_0).$$

(i) Αν η (1) ισχύει για κάποια σταθερά $K > 0$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ θέτουμε $\delta = \varepsilon/K > 0$, οπότε κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_0)| < \delta$ είναι τέτοια ώστε

$$|y(x)| \leqq |Y(x)|\,|y(x_0)| < K\delta = \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geqq x_0$$

και άρα η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής. Τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλες τις λύσεις y του (S_0) με $|y(x_0)| < \delta$ να είναι

$$|y(x)| < 1 \text{ για κάθε } x \geqq x_0.$$

Έτσι, αν δ_1 είναι μια θετική σταθερά με $\delta_1 < \delta$ θα είναι

$$|Y(x)c| < 1 \text{ για κάθε } x \geqq x_0$$

για όλα τα n-διάστατα διανύσματα c με $|c| = \delta_1$. Οπότε για κάθε $x \geqq x_0$ παίρνουμε

$$|Y(x)| = \sup_{|\xi|=1} |Y(x)\xi| = \frac{1}{\delta_1} \sup_{|\xi|=1} |Y(x)\delta_1\xi| = \frac{1}{\delta_1} \sup_{|c|=\delta_1} |Y(x)c| \leqq \frac{1}{\delta_1}$$

και άρα η (1) ισχύει για $K = 1/\delta_1 > 0$.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (2), όπου K είναι μια θετική σταθερά. Αν ε είναι ένας θετικός αριθμός και $\delta = \varepsilon/K > 0$, τότε για κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_1)| < \delta$ για κάποιο $x_1 \geqq x_0$ έχουμε

$$|y(x)| = |Y(x)Y^{-1}(x_1)y(x_1)| \leqq |Y(x)Y^{-1}(x_1)|\,|y(x_1)| < K\delta = \varepsilon$$

για όλα τα $x \geqq x_1$. Άρα η μηδενική λύση του (S_0) είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

Αντίστροφα, ας είναι ομοιόμορφα ευσταθής ή μηδενική λύση του (S_0). Τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_1)| < \delta$ για κάποιο $x_1 \geqq x_0$ να είναι

$$|y(x)| < 1 \text{ για όλα τα } x \geqq x_1.$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα δ_1 με $0 < \delta_1 < \delta$, τότε

$$|Y(x)Y^{-1}(s)c| < 1 \text{ για κάθε } x, s \text{ με } x \geqq s \geqq x_0$$

για όλα τα n-διάστατα διανύσματα c με $|c| = \delta_1$. 'Αρα, για $x \geq s \geq x_0$

$$|Y(x)Y^{-1}(s)| = \sup_{|\xi|=1} |Y(x)Y^{-1}(s)\xi| = \frac{1}{\delta_1} \sup_{|\xi|=1} |Y(x)Y^{-1}(s)\delta_1\xi| =$$

$$= \frac{1}{\delta_1} \sup_{|c|=\delta_1} |Y(x)Y^{-1}(s)c| \leq \frac{1}{\delta_1},$$

δηλαδή η (2) ισχύει για $K = 1/\delta_1$.

(iii) Υποθέτουμε ότι ισχύει η (3). Τότε είναι φανερό ότι ισχύει και η (1) για κάποια σταθερά $K > 0$ και άρα η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής. Επιπλέον, για κάθε λύση y του (S_0) έχουμε

$$|y(x)| \leq |Y(x)|\,|y(x_0)| \quad \text{για όλα τα } x \geq x_0,$$

οπότε

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = 0.$$

Επομένως, η μηδενική λύση του (S_0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ έτσι ώστε για κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_0)| < \delta_0$ να είναι

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = 0.$$

'Αρα, αν θεωρήσουμε ένα δ_1 με $0 < \delta_1 < \delta_0$, τότε για όλα τα n-διάστατα διανύσματα c με $|c| = \delta_1$ θα έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} |Y(x)c| = 0.$$

'Ετσι, θα είναι

$$\lim_{x\to\infty} |Y(x)\delta_1 e_i| = 0 \quad (i = 1,\dots,n),$$

όπου, για κάθε $i \in \{1,\dots,n\}$, e_i είναι το n-διάστατο διάνυσμα που έχει τη μονάδα ως i-συντεταγμένη του και τις άλλες συντεταγμένες του ίσες με μηδέν (Χρησιμοποιείται εδώ η Ευκλείδεια στάθμη στον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων). Παραπέρα, για οποιοδήποτε n-διάστατο διάνυσμα c με συντεταγμένες $c_1,\dots,c_n$ και $|c| = 1$ και για κάθε $x \geq x_0$ παίρνουμε

$$|Y(x)c| = |Y(x)(c_1e_1+\dots+c_ne_n)| \leq |c_1|\,|Y(x)e_1|+\dots+|c_n|\,|Y(x)e_n|$$

$$\leq |Y(x)e_1|+\dots+|Y(x)e_n| = \frac{1}{\delta_1}\,[\,|Y(x)\delta_1e_1|+\dots+|Y(x)\delta_1e_n|\,].$$

Επομένως, για όλα τα $x \geq x_0$ έχουμε

$$|Y(x)| = \sup_{|c|=1} |Y(x)c| \leq \frac{1}{\delta_1} [|Y(x)\delta_1 e_1|+\ldots+|Y(x)\delta_1 e_n|],$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\infty} |Y(x)| = 0,$$

δηλαδή ότι η (3) ισχύει.

(iv) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές $K > 0$ και $\mu > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει η (4). Τότε ισχύει η (2) και έτσι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ομοιόμορφα ευσταθής. Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < K$ και θέσουμε $\vartheta = \left(-\log \frac{\varepsilon}{K}\right)/\mu > 0$, τότε για κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_1)| < 1$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$ έχουμε

$$|y(x)| = |Y(x)Y^{-1}(x_1)y(x_1)| \leq |Y(x)Y^{-1}(x_1)|\,|y(x_1)| < |Y(x)Y^{-1}(x_1)|$$
$$\leq Ke^{-\mu(x-x_1)} \leq Ke^{-\mu\vartheta} = \varepsilon$$

για κάθε $x \geq x_1+\vartheta$. Επομένως, η μηδενική λύση του (S_0) είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση του (S_0) είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής. Τότε υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε, αν ε είναι ένας αριθμός με $0 < \varepsilon < \delta_0$, να υπάρχει $\vartheta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε λύση y του (S_0) με $|y(x_1)| < \delta_0$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$, να είναι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x \geq x_1+\vartheta.$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα δ_1 με $\varepsilon < \delta_1 < \delta_0$, για όλα τα n-διάστατα διανύσματα c με $|c| = \delta_1$ και για $x_1 \geq x_0$, $x \geq x_1+\vartheta$ θα είναι

$$|Y(x)Y^{-1}(x_1)c| < \varepsilon.$$

Απ'αυτό προκύπτει ότι

$$|Y(x)Y^{-1}(x_1)| = \sup_{|\xi|=1} |Y(x)Y^{-1}(x_1)\xi| = \frac{1}{\delta_1} \sup_{|\xi|=1} |Y(x)Y^{-1}(x_1)\delta_1\xi|$$
$$\leq \frac{1}{\delta_1} \sup_{|c|=\delta_1} |Y(x)Y^{-1}(x_1)c| \leq \frac{\varepsilon}{\delta_1}$$

για όλα τα x_1, x με $x_1 \geq x_0$ και $x \geq x_1+\vartheta$. Άρα, θέτοντας $k = \frac{\varepsilon}{\delta_1} < 1$, έχουμε

$$|Y(x_1+\vartheta)Y^{-1}(x_1)| \leq k \text{ για όλα τα } x_1 \geq x_0.$$

Εξάλλου, επειδή η μηδενική λύση του (S_0) είναι ομοιόμορφα ευσταθής, θα υπάρχει μια σταθερά $K_1 > 0$ τέτοια ώστε να πληρούται η (2) και έτσι

$$|Y(x)Y^{-1}(x_1)| \leq K_1 \text{ για κάθε } x,x_1 \text{ με } x \geq x_1 \geq x_0.$$

Τώρα, θέτουμε $\mu = -\log k/\vartheta > 0$ και $K = K_1/k$ και θα δείξουμε ότι ισχύει η (4). Θεωρούμε δύο τυχόντα x και s με $x \geq s \geq x_0$. Τότε υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος ν έτσι ώστε

$$s+\nu\vartheta \leq x < s+(\nu+1)\vartheta,$$

οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}|Y(x)Y^{-1}(s)| &\leq |Y(x)Y^{-1}(s+\nu\vartheta)||Y(s+\nu\vartheta)Y^{-1}(s)| \leq K_1|Y(s+\nu\vartheta)Y^{-1}(s)| \\ &\leq K_1|Y(s+\nu\vartheta)Y^{-1}(s+(\nu-1)\vartheta)||Y(s+(\nu-1)\vartheta)Y^{-1}(s)| \\ &\leq K_1 k|Y(s+(\nu-1)\vartheta)Y^{-1}(s)| \leq \ldots \leq K_1 k^{\nu-1}|Y(s+\vartheta)Y^{-1}(s)| \\ &\leq K_1 k^{\nu} = Ke^{-(\nu+1)\mu\vartheta} < Ke^{-\mu(x-s)}.\end{aligned}$$

Άρα, πληρούται η (4) για τις σταθερές K και μ που έχουν θεωρηθεί.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) με σταθερό τον συντελεστή πίνακα A. Αν y είναι μια λύση του (S_0) και $x^* \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση u με $u(x) = y(x+x^*)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι επίσης μια λύση του (S_0), αφού

$$u'(x) = y'(x+x^*) = Ay(x+x^*) = Au(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα: Στα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές η έννοια της ευστάθειας είναι ισοδύναμη με την έννοια της ομοιόμορφης ευστάθειας και η έννοια της ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι ισοδύναμη με την έννοια της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας. Παραπέρα, συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 20 και 21, καταλήγουμε στο παρακάτω κριτήριο για την ευστάθεια ομογενών γραμμικών διαφορικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22. Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) όπου ο συντελεστής πίνακας A είναι σταθερός. Ας είναι $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A με πολλαπλότητες n_1, $n_2,\ldots,n_s$ $(n_1+n_2+\ldots+n_s = n)$ και ας είναι

$$q(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},$$

όπου $1 \leq m_i \leq n_i$ $(i = 1,2,\ldots,s)$, το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Τότε:

(I) Η μηδενική λύση του (S_0) είναι ευσταθής αν και μόνο αν, για κάθε $i = 1,2,\ldots,s$, είναι $\mathrm{Re}\lambda_i \leq 0$ και επιπλέον $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ συνεπάγεται $m_i = 1$.

(II) Η μηδενική λύση του (S_0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν $Re\lambda_i < 0$ $(i = 1,2,\ldots,s)$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η μελέτη της ευστάθειας ή της ασυμπτωτικής ευστάθειας της μηδενικής λύσης ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές ανάγεται στη μελέτη των προσήμων των πραγματικών μερών των ριζών ενός πολυωνύμου. Για ενημέρωση παραθέτουμε το παρακάτω συμπέρασμα:

Ας είναι

$$P(z) = z^r + c_1 z^{r-1} + \ldots + c_{r-1} z + c_r$$

ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Τότε:

(I) Αν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε αναγκαστικά όλοι οι συντελεστές $c_1,\ldots,c_{r-1}, c_r$ είναι θετικοί.

(II) Ας συμβολίσουμε με D_k $(k = 1,\ldots,r)$ τις ορίζουσες που ορίζονται ως εξής: $D_1 = c_1$ και για $k = 2,\ldots,r$

$$D_k = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \ldots c_{2k-1} \\ 1 & c_2 & c_4 \ldots c_{2k-2} \\ 0 & c_1 & c_3 \ldots c_{2k-3} \\ 0 & 1 & c_2 \ldots c_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ \ldots c_k \end{vmatrix}$$

όπου $c_j = 0$ για $j > r$. Αν $D_k > 0$ $(k = 1,\ldots,r)$, τότε όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$ έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

6.3. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να εξετασθεί αν είναι ή όχι ευσταθής η μηδενική λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $y' = Ay$ σε καθεμιά απ' τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\text{(i)}\ A = \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 1 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix}. \qquad \text{(ii)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(iii) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (iv) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. (v) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 22, διαπιστώνουμε ότι η μηδενική λύση του συστήματος είναι ευσταθής στις περιπτώσεις (i), (ii) και (v), ενώ αυτή δεν είναι ευσταθής στις περιπτώσεις (iii) και (iv) (πρβλ. Παράδειγμα 8, Εδάφιο 4).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να εξετασθεί αν είναι ή όχι ασυμπτωτικά ευσταθής η μηδενική λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $y' = Ay$ σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις:

(i) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$. (ii) $A=\begin{pmatrix} -1+i & 0 & 1 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix}$. (iii) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Λύση. Η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής μόνο στην περίπτωση (i) (πρβλ. Θεώρημα 22 και Παράδειγμα 9 του Εδαφίου 4).

6.4. Άσκηση

Να εξετασθεί ως προς την ευστάθεια και την ασυμπτωτική ευστάθεια η μηδενική λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $y' = Ay$ όπου:

(i) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (ii) $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(iii) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (iv) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(v) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (vi) $A=\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ν'αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in [0,1]$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε $x_0 \in [0,1]$ τα διανύσματα $f_1(x_0)$ και $f_2(x_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μπορεί οι f_1, f_2 να είναι λύσεις ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος;

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} e^x \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}.$$

Ν'αποδειχθεί ότι οι f_1, f_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, να βρεθεί ένα ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο άγνωστες συναρτήσεις το οποίο να έχει ως λύσεις τις f_1, f_2 και να βρεθεί η λύση y αυτού που πληροί την αρχική συνθήκη

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} y,$$

αφού βρεθεί ένας βασικός πίνακας Y αυτού της μορφής

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & e^{\mu x} & e^{\nu x} \\ e^{\lambda x} & 2e^{\mu x} & 7e^{\nu x} \\ e^{\lambda x} & e^{\mu x} & 11e^{\nu x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου λ, μ και ν είναι ακέραιοι. Στη συνέχεια, να βρεθεί ένας βασικός πίνακας Y^* με $Y^*(0) = I$.

4. Δεδομένου ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} t^{2\nu} = \cos t \quad \text{και} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!} t^{2\nu+1} = \sin t,$$

να επιλυθεί (χωρίς χρησιμοποίηση του θεωρήματος του Putzer) το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = Ay \text{ με } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Ν'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 3e^x & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας.

(ii) Να βρεθεί η λύση y με

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Να βρεθεί ένας βασικός πίνακας Y^* με $Y^*(0) = -2I$.

(iv) Να βρεθεί ο e^{xA}, $x \in \mathbb{R}$.

6. Ας είναι Y ένας βασικός πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$y' = Ay,$$

όπου A είναι ένας συνεχής πίνακας-συνάρτηση σ'ένα διάστημα I. Για τυχόντα $x,t \in I$ θέτουμε

$$E(x,t) = Y(x)Y^{-1}(t).$$

Ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x,t) = -E(x,t)A(t), \quad x,t \in I.$$

7. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} f & g \\ -g & f \end{pmatrix} y,$$

όπου f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις σ'ένα διάστημα I. Ας είναι x_0 ένα σημείο του I και για κάθε $x \in I$

$$h_1(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \quad \text{και} \quad h_2(x) = \exp\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right].$$

N'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} h_2(x)\cos h_1(x) & h_2(x)\sin h_1(x) \\ -h_2(x)\sin h_1(x) & h_2(x)\cos h_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

είναι ένας βασικός πίνακας. Να βρεθεί, στη συνέχεια, η λύση y με

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} y,$$

όπου a,b,c και d είναι σταθερές. N'αποδειχθεί ότι το διαφορικό αυτό σύστημα έχει τη λύση

$$y(x) = e^{rx}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(όπου r,p και q είναι σταθερές με $|p|+|q| > 0$) αν και μόνο αν $(a-r)\cdot(d-r)-cb = 0$ και $(a-r)p+bq = 0$, $cp+(d-r)q = 0$. Να επιλυθεί το

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} y, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Ας είναι y_1 η λύση του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} y \qquad (\varepsilon \text{ σταθερά})$$

και y_2 η λύση του διαφορικού συστήματος

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

με

$$y_1(0) = y_2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

N'αποδειχθεί ότι $y_1 \to y_2$ όταν $\varepsilon \to 0$.

10. Ας είναι

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να επιλυθούν τα ομογενή γραμμικά διαφορικά συστήματα $y' = A_1 y$, $y' = A_2 y$ και να χρησιμοποιηθούν οι λύσεις αυτών για να βρεθούν οι λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $y' = Ay$.

11. Να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) $$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) $$y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $$y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

13. (i) Ας θεωρήσουμε το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα $y' = Ay$, όπου A είναι ένας σταθερός n-τάξης πίνακας. Αν λ είναι μια σταθερά και c ένα n-διάστατο διάνυσμα, ν'αποδειχθεί ότι $y(x) = e^{\lambda x} c$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση του διαφορικού συστήματος αν και μόνο αν $Ac = \lambda c$. (ii) Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} y, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

<u>14</u>. Να βρεθεί ο σταθερός πίνακας A αν

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} 2e^{2x}-e^{x} & e^{2x}-e^{x} & e^{x}-e^{2x} \\ e^{2x}-e^{x} & 2e^{2x}-e^{x} & e^{x}-e^{2x} \\ 3e^{2x}-3e^{x} & 3e^{2x}-3e^{x} & 3e^{x}-2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>15</u>. Ν'αποδειχθεί ότι

$$Y(x) = \begin{pmatrix} -5\cos 2x & -5\sin 2x & 3e^{2x} \\ -2(\cos 2x+\sin 2x) & 2(\cos 2x-\sin 2x) & 0 \\ \cos 2x & \sin 2x & e^{2x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι ένας βασικός πίνακας ενός ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος $y' = Ay$ για κάποιον σταθερό πίνακα A. Να βρεθεί ο A.

<u>16</u>. Για το γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (r \text{ αυθαίρετο})$$

να βρεθεί μια λύση της μορφής $y(x) = e^{2x}(xq_1+q_2)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου q_1 και q_2 είναι σταθερά διανύσματα.

V. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Το Κεφάλαιο αυτό αναφέρεται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης και αφορά την εύρεση λύσεων που εκφράζονται με δυναμοσειρές. Το Εδάφιο 0 περιέχει μια εισαγωγή στο θέμα καθώς και μερικά στοιχεία απ'τη Θεωρία των δυναμοσειρών και τον ορισμό της έννοιας της αναλυτικής συνάρτησης. Στο Εδάφιο 1 δίνονται οι έννοιες του ομαλού και του (κανονικού ή μη κανονικού) ανώμαλου σημείου μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης. Τα Εδάφια 2 και 3 αναφέρονται επίσης σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης και αφορούν την εύρεση λύσεων εκφρασμένων με δυναμοσειρές γύρω από ομαλά σημεία (Εδάφιο 2) ή γύρω από κανονικά ανώμαλα σημεία (Εδάφιο 3). Στο Εδάφιο 4 γίνεται η μελέτη μερικών κλασσικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης (Διαφορικές εξισώσεις των Legendre, Chebyshev, Hermite, Laguerre και Bessel). Σε καθένα απ'τα Εδάφια 1-4 προτείνονται ασκήσεις για λύση, ενώ το Εδάφιο 5 περιέχει μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Στο προκαταρκτικό αυτό Εδάφιο θα γίνει μια εισαγωγή στο θέμα της εύρεσης λύσεων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης που εκφράζονται με τη βοήθεια δυναμοσειρών, θα δοθούν μερικά στοιχεία απ'τη Θεωρία των δυναμοσειρών που θα μας είναι απαραίτητα στα επόμενα Εδάφια και, τέλος, θα δοθεί η έννοια της αναλυτικής συνάρτησης.

0.1. Μια εισαγωγή

Σε προηγούμενο Κεφάλαιο έγινε η μελέτη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (αυθαίρετης τάξης) και φάνηκε ότι μόνο σε ειδικές περιπτώσεις μπορούν να βρεθούν οι λύσεις εκφρασμένες με τη βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων. Είναι λοιπόν φυσικό να αναζητηθούν άλλες μεθοδολογίες για την επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Μια τέτοια μέθοδος είναι εκείνη που βρίσκει λύσεις εκφρασμένες με δυναμοσειρές (δυναμοσειρές λύσεις). Θα περιορισθούμε εδώ στην ανάπτυξη της μεθόδου αυτής για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Επίσης, αν και η μέθοδος μπορεί ν'αναπτυχθεί για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αυθαίρετης τάξης, θα περιορισθούμε στην περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, επειδή οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που εμφανίζονται στις Εφαρμογές είναι συνήθως δεύτερης τάξης και δεδομένου ότι η ανάπτυξη της μεθόδου στην περίπτωση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης δεν περιέχει μεγάλη πολυπλοκότητα αλλά συνάμα περικλείει τα βασικά σημεία της μεθοδολογίας. Έτσι, θα θεωρούνται (ομογενείς) γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής

$$(E) \qquad a_2y''+a_1y'+a_0y=0,$$

όπου a_2, a_1 και a_0 είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας, και $a_2 \neq 0$ (δηλαδή $a_2(x) \neq 0$ για ένα τουλάχιστον $x \in I$). Ας τονισθεί ιδιαίτερα ότι εδώ δεν υποτίθεται ότι $a_2(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$.

Η μέθοδος της εύρεσης δυναμοσειρών λύσεων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης θα εφαρμοσθεί ιδιαίτερα για μερικές κλασσικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, οι οποίες εμφανίζονται πολύ συχνά στις Εφαρμογές. Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις είναι των μορφών

$$(E_1) \qquad (1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0 \qquad (p \text{ πραγματική σταθερά}),$$
$$(E_2) \qquad (1-x^2)y''-xy'+p^2y=0 \qquad (p \geq 0 \text{ σταθερά}),$$
$$(E_3) \qquad y''-2xy'+2py=0 \qquad (p \text{ πραγματική σταθερά}),$$
$$(E_4) \qquad xy''+(1-x)y'+py=0 \qquad (p \text{ πραγματική σταθερά}),$$
$$(E_5) \qquad x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \qquad (p \geq 0 \text{ σταθερά})$$

και είναι γνωστές ως διαφορικές εξισώσεις των Legendre, Chebyshev, Hermite, Laguerre, Bessel αντίστοιχα. Για τις διαφορικές αυτές εξισώσεις το διάστημα ορισμού είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Θα γίνει μια κάπως λεπτομερειακή μελέτη των λύσεων των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων.

0.2. Δυναμοσειρές. Αναλυτικές συναρτήσεις

Μια σειρά της μορφής

$$(S) \qquad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

λέμε ότι είναι μια δυναμοσειρά. Οι αριθμοί a_n $(n=0,1,\ldots)$ λέγονται συντελεστές της δυναμοσειράς και το σημείο x_0 καλείται κέντρο της δυναμοσειράς. Επίσης, λέμε ότι η δυναμοσειρά (S) είναι μια δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 ή ότι είναι μια δυναμοσειρά γύρω απ'το σημείο x_0.

Για τη δυναμοσειρά (S) ορίζουμε την ακτίνα σύγκλισης R $(0\leq R\leq \infty)$ με τόν τύπο

$$R = 1\Big/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(είναι $R=\infty$ για $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=0$ και $R=0$ όταν $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=\infty$).

Αποδεικνύεται ότι, αν το $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ υπάρχει στη γενικευμένη πραγματική ευθεία $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, τότε και το $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ υπάρχει επίσης στο $\mathbb{R}^*$ και επιπλέον τα δύο αυτά όρια είναι ίσα. Έτσι, μπορούμε να βρούμε την ακτίνα σύγλισης R της δυναμοσειράς (S) με τον τύπο

$$R = 1\Big/\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

όταν το σημειούμενο όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$. Μπορεί ν'αποδειχθεί ότι: Όταν $R=0$, η δυναμοσειρά (S) συγκλίνει μόνο γιά $x=x_0$· όταν $R=\infty$, η (S) συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$· όταν $0<R<\infty$, η δυναμοσειρά (S) συγκλίνει για κάθε x με $|x-x_0|<R$ και αποκλίνει για όλα τα x με $|x-x_0|>R$ (για $x=x_0-R$ ή $x=x_0+R$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει). Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς (S) ορίζεται να είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ όταν $R=\infty$ ή το ανοικτό διάστημα (x_0-R, x_0+R) όταν $0<R<\infty$.

Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς (S) είναι θετική (δηλαδή $0<R\leq\infty$). Τότε ο τύπος

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R$$

ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα σύγκλισης της (S). Αποδεικνύεται ότι η f είναι συνεχής. Ακόμα, η συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα (x_0-R, x_0+R) (για $R=\infty$ το διάστημα αυτό είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία) και μάλιστα, για κάθε $k \in \{0,1,\dots\}$, είναι

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \text{ για } |x-x_0| < R,$$

όπου η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς του δεύτερου μέλους είναι ακριβώς R. Για ένα οποιοδήποτε $k \in \{0,1,\dots\}$, ο παραπάνω τύπος για $x=x_0$ δίνει $f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\dots 1 a_k = k!a_k$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι για τους συντελεστές της δυναμοσειράς (S) ισχύει

$$a_n = f^{(n)}(x_0)/n! \quad (n=0,1,\dots).$$

Ας είναι τώρα f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τέτοιο ώστε η f να έχει παραγώγους κάθε τάξης σ'ένα ανοικτό διάστημα J που περιέχει το x_0. Τότε η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

λέμε ότι είναι η <u>σειρά</u> <u>Taylor</u> της συνάρτησης f στο σημείο x_0 (ειδικά, για $x_0=0$ λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ είναι η <u>σειρά</u> <u>Maclaurin</u> της f). Αποδεικνύεται ότι, αν r είναι ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{r^n}{n!} \sup_{x\in J} |f^{(n)}(x)|\right] = 0,$$

τότε είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ για } x \in J \cap [x_0-r, x_0+r]$$

(και μάλιστα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη).

Ας θεωρήσουμε τις δυναμοσειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \text{ και } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

με θετικές ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2 αντίστοιχα ($0 < R_1, R_2 \leq \infty$), και ας θέσουμε

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R_1 \text{ και } h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R_2.$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Για οποιεσδήποτε σταθερές α και β, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha b_n + \beta c_n)(x-x_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R με $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ και επιπλέον

$$\alpha g(x) + \beta h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha b_n + \beta c_n)(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}.$$

(ii) Αν θέσουμε $d_n = \sum_{r=0}^{n} b_r c_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} b_{n-r} c_r$ ($n = 0, 1, \ldots$), τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R με $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ και ακόμα

$$g(x) h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < \min\{R_1, R_2\}.$$

Ειδικά, αν α είναι μια σταθερά και k ένας θετικός ακέραιος, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha b_n (x-x_0)^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha b_n^* (x-x_0)^n$ (όπου θέσαμε $b_n^* = 0$ για $0 \leq n < k$ και $b_n^* = b_{n-k}$ για $n \geq k$) έχει ακτίνα σύγκλισης R με $R \geq R_1$ και

$$\alpha (x-x_0)^k g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha b_n (x-x_0)^{n+k} \text{ για } |x-x_0| < R_1.$$

(iii) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, όπου $0 < r \leq \min\{R_1, R_2\}$, τότε $b_n = c_n$ ($n = 0, 1, \ldots$). Ειδικά, αν υπάρχει r με $0 < r \leq R_1$ έτσι ώστε $f(x) = 0$ για όλα τα $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, τότε $b_n = 0$ ($n = 0, 1, \ldots$).

Ας είναι f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Λέμε ότι η f είναι <u>αναλυτική</u> στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ με μια θετική ακτίνα σύγκλισης R έτσι ώστε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι αναλυτική στο x_0 αν και μόνο αν ορίζεται η σειρά Taylor της f στο x_0 και έχει μια θετική ακτίνα σύγκλισης R, και

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{για } |x-x_0| < R.$$

Εύκολα διαπιστώνει κανένας ότι κάθε πολυώνυμο είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας. Πιο γενικά, μια ρητή συνάρτηση (πηλίκο δύο πολυωνύμων) είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της (δηλαδή σε κάθε σημείο που δεν είναι ρίζα του παρονομαστή). Επίσης, οι συναρτήσεις e^x, $x \in \mathbb{R}$; $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αναλυτικές σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.

1. ΟΜΑΛΑ ΚΑΙ (ΚΑΝΟΝΙΚΑ Η ΜΗ ΚΑΝΟΝΙΚΑ) ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Εδάφιο αυτό δίνονται οι έννοιες του ομαλού και του ανώμαλου σημείου της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (Ε). Τα ανώμαλα σημεία της διαφορικής εξίσωσης (Ε) διακρίνονται σε κανονικά ή μη κανονικά ανώμαλα σημεία αυτής. Μερικά παραδείγματα παρατίθενται για την καλύτερη κατανόηση αυτών των εννοιών· για τον ίδιο σκοπό προτείνονται και ορισμένες ασκήσεις για λύση.

1.1. Ομαλά και (κανονικά ή μη κανονικά) ανώμαλα σημεία

Ένα σημείο $x_0 \in I$ με $a_2(x_0) \neq 0$ λέμε ότι είναι ένα <u>ομαλό σημείο</u> της διαφορικής εξίσωσης (Ε) αν και μόνο αν οι συναρτήσεις a_1/a_2 και a_0/a_2 είναι αναλυτικές στο x_0. Απ'την άλλη μεριά, ένα σημείο $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε ή $a_2(x_0) = 0$ ή $a_2(x_0) \neq 0$ και μια τουλάχιστον απ'τις δύο συναρτήσεις a_1/a_2 και a_0/a_2 δεν είναι αναλυτική στο x_0 λέμε ότι είναι ένα <u>ανώμαλο σημείο</u> της (Ε).

Ένα ανώμαλο σημείο x_0 της διαφορικής εξίσωσης (Ε) λέμε ότι είναι ένα <u>κανονικό ανώμαλο σημείο</u> της (Ε) αν και μόνο αν υπάρχουν δύο συναρτήσεις A_1 και A_0 με πεδία ορισμού D_1 και D_0 αντίστοιχα (όπου

$x_0 \in D_1 \cap D_0$ και $D_1 \subseteq I$, $D_0 \subseteq I$), οι οποίες είναι αναλυτικές στο x_0 και τέτοιες ώστε

$$(x-x_0)a_1(x) = a_2(x)A_1(x),\ x \in D_1 \quad \text{και} \quad (x-x_0)^2 a_0(x) = a_2(x)A_0(x),\ x \in D_0.$$

Ένα ανώμαλο σημείο της (E) που δεν είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της λέμε ότι είναι ένα <u>μη κανονικό ανώμαλο σημείο</u> της διαφορικής εξίσωσης (E).

Στις Εφαρμογές εμφανίζονται συνήθως (ομογενείς) γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με συντελεστές πολυώνυμα. Έτσι, ας ασχοληθούμε εδώ ιδιαίτερα με την ειδική περίπτωση όπου οι συντελεστές a_2, a_1 και a_0 είναι πολυώνυμα και I είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Σ'αυτή την περίπτωση, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν μηδενίζουν το πολυώνυμο a_2 είναι ομαλά σημεία της διαφορικής εξίσωσης (E), ενώ οι ρίζες του a_2 είναι ανώμαλα σημεία της (E). Τώρα, ας υποθέσουμε ότι x_0 είναι μια ρίζα του πολυωνύμου a_2 με πολλαπλότητα k. Τότε το x_0 είναι ρίζα των πολυωνύμων P_1 και P_0, όπου $P_1(x) = (x-x_0)a_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $P_0(x) = (x-x_0)^2 a_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, με κάποιες πολλαπλότητες λ και μ αντίστοιχα. Είναι εύκολο να δούμε ότι για $\lambda \geq k$ και $\mu \geq k$ το x_0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της (E), ενώ στην αντίθετη περίπτωση (δηλαδή όταν $\lambda < k$ ή $\mu < k$) το x_0 είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο της (E).

<u>1.2. Παραδείγματα</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθούν τα ομαλά σημεία, τα κανονικά ανώμαλα σημεία και τα μη κανονικά ανώμαλα σημεία για καθεμιά απ'τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y'' + (\cos x)y' + e^x y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $(x-2)y'' + (\sin 2x)y' + (x^2+1)y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $y'' + |x|y' + (x+1)^{1/3}y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(iv) $(x^4-x^2)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>. (i) Οι συναρτήσεις $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ και e^x, $x \in \mathbb{R}$ είναι αναλυτικές σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας και επομένως κάθε πραγματικός αριθμός είναι ένα ομαλό σημείο.

(ii) Επειδή οι συναρτήσεις $(\sin 2x)/(x-2)$, $x \neq 2$ και $(x^2+1)/(x-2)$, $x \neq 2$ είναι αναλυτικές σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των, μπορούμε να πούμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός διαφορετικός απ'το

2 είναι ένα ομαλό σημείο· ο αριθμός 2 είναι ένα ανώμαλο σημείο. Το ανώμαλο σημείο 2 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο, γιατί οι συναρτήσεις $A_1(x) = \sin 2x, x \in \mathbb{R}$ και $A_0(x) = (x-2)(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αναλυτικές στο 2 και έχουμε

$$(x-2)\sin 2x = (x-2)A_1(x),\ x \in \mathbb{R} \text{ και } (x-2)^2(x^2+1) = (x-2)A_0(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Η συνάρτηση $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας εκτός απ'το 0. Επίσης, η συνάρτηση $(x+1)^{1/3}$ είναι αναλυτική σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -1$. Έτσι, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που είναι διαφορετικοί απ'το 0 και το -1 είναι ομαλά σημεία, ενώ οι αριθμοί 0 και 1 είναι ανώμαλα σημεία. Παραπέρα, επειδή η συνάρτηση $x|x|$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι αναλυτική στο 0, το 0 είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο. Επίσης, η μη αναλυτικότητα της συνάρτησης $(x+1)^{7/3}$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο -1 σημαίνει ότι το σημείο -1 είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο.

(iv) Κάθε πραγματικός αριθμός x με $x \neq 0$, $x \neq 1$ και $x \neq -1$ είναι ένα ομαλό σημείο, ενώ οι αριθμοί 0,1 και -1 είναι ανώμαλα σημεία. Για να συμπεράνουμε αν ένα ανώμαλο σημείο $x_0 \in \{0,1,-1\}$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο ή ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο, θεωρούμε τα πολυώνυμα P_{x_0} και Q_{x_0} με

$$P_{x_0}(x) = (x-x_0)(2x+1),\ x \in \mathbb{R} \text{ και } Q_{x_0}(x) = (x-x_0)^2 x^2 (x+1),\ x \in \mathbb{R},$$

και συμβολίζουμε με $\lambda(x_0)$ και $\mu(x_0)$ τις πολλαπλότητες του x_0 ως ρίζας των πολυωνύμων P_{x_0} και Q_{x_0} αντίστοιχα. Ακόμα, συμβολίζουμε με $k(x_0)$ την πολλαπλότητα του x_0 ως ρίζας του πολυωνύμου a_2 με $a_2(x) = x^4-x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, όπως είναι γνωστό, το σημείο $x_0 \in \{0,1,-1\}$ θα είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο στην περίπτωση όπου $\lambda(x_0) \geqq k(x_0)$ και $\mu(x_0) \geqq k(x_0)$, και θα είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο στην αντίθετη περίπτωση. Είναι $\lambda(0) = 1 < 2 = k(0)$ και άρα το 0 είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο. Επίσης, έχουμε $\lambda(1) = 1 = k(1)$ και $\mu(1) = 2 > 1 = k(1)$ που σημαίνει ότι το 1 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Τέλος, επειδή $\lambda(-1) = 1 = k(1)$ και $\mu(-1) = 3 > 1 = k(1)$, το -1 είναι επίσης ένα κανονικό ανώμαλο σημείο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθούν τα ομαλά σημεία, τα κανονικά ανώμαλα σημεία και τα μη κανονικά ανώμαλα σημεία για καθεμιά απ'τις διαφορικές εξισώσεις (E_1)-(E_5).

Λύση. Θ'ασχοληθούμε λεπτομερειακά μόνο με την περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης (E_1). Για καθεμιά απ'τις διαφορικές εξισώσεις (E_2)-(E_5) θα παραθέσουμε μόνο τα συμπεράσματα.

(E_1). Κάθε αριθμός $x \in \mathbb{R}-\{1,-1\}$ είναι ένα ομαλό σημείο, ενώ οι αριθμοί 1 και -1 είναι ανώμαλα σημεία. Το σημείο 1 είναι μια ρίζα καθενός των πολυωνύμων $a_2(x) = 1-x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $P_1(x) = (x-1)(-2x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $P_0(x) = (x-1)^2 p(p+1)$, $x \in \mathbb{R}$ με πολλαπλότητα 1, 1 και 2 αντίστοιχα. Έτσι, το 1 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι το -1 είναι επίσης ένα κανονικό ανώμαλο σημείο.

(E_2). Κάθε αριθμός $x \in \mathbb{R}-\{1,-1\}$ είναι ένα ομαλό σημείο, ενώ οι αριθμοί 1 και -1 είναι κανονικά ανώμαλα σημεία.

(E_3). Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι ομαλά σημεία.

(E_4). Κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ είναι ένα ομαλό σημείο, ενώ το 0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο.

(E_5). Κάθε $x \neq 0$ είναι ομαλό σημείο, ενώ το 0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο.

1.3. Ασκήσεις

1. Για καθεμιά απ'τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις να βρεθούν τα ομαλά σημεία, τα κανονικά ανώμαλα σημεία και τα μη κανονικά ανώμαλα σημεία:

(i)	$(1+x^2)y''+2xy'+y = 0$.	(iv)	$(x^2-5x+6)y''+e^x y'-7y = 0$.
(ii)	$xe^x y''-(x^2-2)y'+x^3 y = 0$.	(v)	$e^x y''+x(\sin x)y'+(x-1)y = 0$.
(iii)	$(e^x-1)y''+y = 0$.	(vi)	$(x-1)^4 y''-xy = 0$.

2. Να βρεθούν τα ομαλά σημεία, τα κανονικά ανώμαλα σημεία και τα μη κανονικά ανώμαλα σημεία καθεμιάς των διαφορικών εξισώσεων:

(i) $(x-1)^2 y''-(x^2-x)y'+y = 0$.
(ii) $x^3(1-x^2)y''+(2x-3)y'+xy = 0$.
(iii) $2x^2 y''+(x-x^2)y'-y = 0$.
(iv) $x^4(x+1)^3 y''+4x^2 y = 0$.
(v) $x^2(x^2+1)y''+x(x+1)y'+(x-1)y = 0$.
(vi) $(x-1)^2 y''+y'+x^2 y = 0$.
(vii) $x^2(2x+1)^3 y''+x(2x+1)y'+(2x+1)y = 0$.
(viii) $(x^4-1)y''+(x-1)y'+xy = 0$.

2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ - ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ

Στο Εδάφιο αυτό δίνεται η μέθοδος για την εύρεση δυναμοσειρών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (E) γύρω από ομαλά σημεία αυτής. Δίνεται ένα συμπέρασμα (Θεώρημα 1) που αποτελεί τη θεωρητική βάση αυτής της μεθόδου και παρατίθενται μερικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου. Ακόμα, προτείνονται για λύση ορισμένες ασκήσεις.

2.1. Δυναμοσειρές λύσεις γύρω από ομαλά σημεία

Το παρακάτω Θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη δυναμοσειρών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (E) γύρω από ομαλά σημεία αυτής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ας θεωρήσουμε ένα ομαλό σημείο x_0 της διαφορικής εξίσωσης (E) και ας είναι $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$ δύο δυναμοσειρές με θετικές ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2 αντίστοιχα έτσι ώστε

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R_1 \text{ και } \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R_2.$$

Ακόμα, ας είναι $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Ας είναι c_0 και c_1 δύο σταθερές. Τότε υπάρχουν αριθμοί c_n ($n = 2,3,\ldots$) έτσι ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ να έχει μια (θετική) ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση του R και η συνάρτηση

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R$$

να είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = c_0 \text{ και } y'(x_0) = c_1.$$

Σημείωση: Οι συντελεστές c_n $(n = 2,3,\ldots)$ προσδιορίζονται (εφόσον είναι δοσμένοι οι αριθμοί c_0 και c_1) μονοσήμαντα απ'τον αναγωγικό τύπο

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} [(k+1)p_{n-k}c_{k+1}+q_{n-k}c_k] \quad (n=0,1,\ldots).$$

Ο αναγωγικός αυτός τύπος προκύπτει απ'τη διαφορική εξίσωση (Ε) αφού πρώτα αυτή γραφεί στη μορφή $y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = 0$ και αντικατασταθούν έπειτα οι τιμές $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ και $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ (για $|x-x_0| < R$) με τις αντίστοιχες σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-x_0)^{n-1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1 θα κάνουμε μια παρατήρηση. Εφόσον οι αριθμοί p_n και q_n $(n=0,1,\ldots)$ είναι δοσμένοι (γιατί είναι δοσμένες οι συναρτήσεις a_1/a_2 και a_0/a_2), οι συντελεστές c_n $(n=2,3,\ldots)$ βρίσκονται συναρτήσει των σταθερών c_0 και c_1. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ως αυθαίρετες σταθερές τις c_0 και c_1, τότε ο τύπος

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R$$

δίνει όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (Ε) γύρω απ'το σημείο x_0 (πιο συγκεκριμμένα, στο διάστημα (x_0-R, x_0+R) το οποίο είναι δοσμένο, αφού δοσμένοι είναι οι αριθμοί R_1 και R_2). Ειδικά, για $c_0 = 1$ και $c_1 = 0$ και για $c_0 = 0$ και $c_1 = 1$, ο παραπάνω τύπος δίνει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2 της διαφορικής εξίσωσης (Ε) των μορφών

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n'(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R \text{ και } y_2(x) = (x-x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n''(x-x_0)^n$$
$$\text{για } |x-x_0| < R,$$

και μάλιστα θα είναι

$$y(x) = c_0y_1(x) + c_1y_2(x) \text{ για } |x-x_0| < R.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 1. (i) Ας είναι $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά με μια ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση του R και τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R$$

να είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E). Τότε η λύση αυτή θα πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = c_0$ και $y'(x_0) = c_1$. Πραγματικά, για κάθε x με $|x-x_0| < R$ έχουμε

$$y(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ και } y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}=c_1+\sum_{n=2}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$$

και έτσι για $x = x_0$ παίρνουμε $y(x_0) = c_0$ και $y'(x_0) = c_1$.

(ii) Ας θεωρήσουμε μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ με μια ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση του R και ας θέσουμε

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R.$$

Τότε η συνάρτηση y είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) αν και μόνο αν οι συντελεστές c_n $(n = 0,1,\dots)$ πληρούν τον αναγωγικό τύπο

$$(*) \qquad (n+2)(n+1)c_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} [(k+1)p_{n-k}c_{k+1}+q_{n-k}c_k] \quad (n = 0,1,\dots).$$

Πραγματικά, για κάθε x με $|x-x_0| < R$ έχουμε

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(x-x_0)^n$$

και

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-x_0)^n$$

και επομένως

$$y''(x) + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y'(x) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-x_0)^n +$$

$$+\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(x-x_0)^n\right]+\left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)p_{n-k}c_{k+1}\right](x-x_0)^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}c_k\right](x-x_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)p_{n-k}c_{k+1}+\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}c_k\right](x-x_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)c_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}c_{k+1}+q_{n-k}c_k]\right\}(x-x_0)^n.$$

Έτσι, θα είναι

$$y''(x) + \frac{a_1(x)}{a_2(x)} y'(x) + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y(x) = 0 \text{ για κάθε } x \text{ με } |x-x_0| < R$$

αν και μόνο αν

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} [(k+1)p_{n-k}c_{k+1} + q_{n-k}c_k] = 0$$

για όλα τα $n = 0,1,\ldots$.

(iii) Ο αναγωγικός τύπος (*) ορίζει (και μάλιστα μονοσήμαντα) τους αριθμούς c_n $(n = 2,3,\ldots)$ συναρτήσει των αριθμών c_0 και c_1. Έτσι, αν είναι γνωστοί οι αριθμοί c_0 και c_1, τότε απ' τον τύπο (*) ορίζονται ακριβώς οι αριθμοί c_n $(n = 2,3,\ldots)$.

(iv) Αν οι αριθμοί c_n $(n = 0,1,\ldots)$ πληρούν τον αναγωγικό τύπο (*), τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει τουλάχιστον για τα x με $|x-x_0| < R$ (και έτσι έχει μια ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση του R). Πραγματικά· ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ πληρούν τον τύπο (*) και ας θεωρήσουμε ένα τυχόν σημείο x με $0 < |x-x_0| < R$. Θέτουμε $r_0 = |x-x_0|$ και θ' αποδείξουμε ότι η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_0^n$ συγκλίνει. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα αριθμό r με $r_0 < r < R$. Επειδή $r < R = \min\{R_1, R_2\}$, οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n r^n$ συγκλίνουν. Άρα, υπάρχει ένας θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε

$$|p_n|r^n \leqq M \text{ και } |q_n|r^n \leqq M \quad (n = 0,1,\ldots).$$

Απ' τον τύπο (*) παίρνουμε τότε

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)|c_{n+2}| &\leqq \sum_{k=0}^{n} [(k+1)|p_{n-k}||c_{k+1}| + |q_{n-k}||c_k|] \\
&\leqq \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\frac{M}{r^{n-k}}|c_{k+1}| + \frac{M}{r^{n-k}}|c_k|\right] \\
&= \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^{n} [(k+1)|c_{k+1}| + |c_k|]r^k \\
&\leqq \frac{M}{r^n} \sum_{k=0}^{n} [(k+1)|c_{k+1}| + |c_k|]r^k + M|c_{n+1}|r
\end{aligned}$$

για $n = 0,1,\ldots$. Έτσι, αν θεωρήσουμε τους αριθμούς C_n $(n = 0,1,\ldots)$

με

$$C_0=|c_0|,\ C_1=|c_1| \quad \text{και} \quad (n+2)(n+1)C_{n+2}=\frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)C_{k+1}+C_k]r^k+MC_{n+1}r$$

$$(n=0,1,\dots),$$

μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$|c_n|\leqq C_n \quad (n=0,1,\dots).$$

Οπότε, για τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_0^n$ είναι αρκετό ν'αποδείξουμε ότι συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} C_n r_0^n$. Για κάθε ακέραιο $n\geqq 2$ έχουμε

$$(n+1)nC_{n+1}=\frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)C_{k+1}+C_k]r^k+MC_nr$$

και

$$n(n-1)C_n=\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)C_{k+1}+C_k]r^k+MC_{n-1}r$$

και επομένως

$$\begin{aligned} r(n+1)nC_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)C_{k+1}+C_k]r^k+(nC_n+C_{n-1})r^{n-1}\right\}+MC_nr^2 \\ &= \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)C_{k+1}+C_k]r^k+M(nC_n+C_{n-1})r+MC_nr^2 \\ &= \left\{\frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)C_{k+1}+C_k]r^k+MC_{n-1}r\right\}+(Mnr+Mr^2)C_n \\ &= n(n-1)C_n+(Mnr+Mr^2)C_n=[n(n-1)+Mnr+Mr^2]C_n\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή, έχουμε

$$r(n+1)nC_{n+1}=[n(n-1)+Mnr+Mr^2]C_n \quad (n=2,3,\dots).$$

Αν $C_2=0$, τότε παρατηρούμε ότι $C_n=0$ $(n=2,3,\dots)$ και έτσι σ'αυτή την περίπτωση η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} C_n r_0^n$ συγκλίνει. Υποθέτουμε τώρα ότι $C_2>0$, οπότε $C_n>0$ $(n=2,3,\dots)$. Τότε

$$\frac{C_{n+1}r_0^{n+1}}{C_nr_0^n}=\frac{n(n-1)+Mnr+Mr^2}{(n+1)n}\cdot\frac{r_0}{r} \quad (n=2,3,\dots)$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}r_0^{n+1}}{C_nr_0^n}=\frac{r_0}{r}<1,$$

το οποίο εξασφαλίζει ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_0^n$ συγκλίνει.

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει η εύρεση λύσεων, μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (Ε), ορισμένων σε μια περιοχή του ∞ ή του $-\infty$. Τότε, με την αντικατάσταση $w = 1/x$, μετασχηματίζουμε τη διαφορική εξίσωση σε μια άλλη διαφορική εξίσωση της ίδιας μορφής και βρίσκουμε τις λύσεις αυτής γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$, εφόσον αυτό είναι ένα <u>ομαλό σημείο</u>. Θέτοντας $w = 1/x$, βρίσκουμε τις λύσεις της αρχικής διαφορικής εξίσωσης που είναι ορισμένες για τα μεγάλα $|x|$. Ας σημειώσουμε ότι με την αντικατάσταση $w = 1/x$ έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx}\frac{dy}{dw} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw} = -w^2\frac{dy}{dw}$$

και

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dw}{dx}\frac{d}{dw}\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right) = -w^2\left(-w^2\frac{d^2y}{dw^2} - 2w\frac{dy}{dw}\right) = w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw},$$

δηλαδή

$$\frac{dy}{dx} = -w^2\frac{dy}{dw} \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = w^4\frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\frac{dy}{dw}.$$

2.2. <u>Παραδείγματα</u>

Σε καθένα απ'τα παρακάτω Παραδείγματα 1-4 έχουμε να επιλύσουμε μια διαφορική εξίσωση της μορφής (Ε) γύρω από ένα ομαλό σημείο x_0 αυτής. Με R_1 και R_2 θα συμβολίζουμε τις θετικές ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$ αντίστοιχα που είναι τέτοιες ώστε

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n \text{ για } |x-x_0| < R_1 \text{ και } \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$$
$$\text{για } |x-x_0| < R_2.$$

Στο Παράδειγμα 5 θα βρούμε τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (Ε) που ορίζονται για τα μεγάλα $|x|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - xy = 0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως διαφορική εξίσωση του Airy. Έχουμε εδώ $a_2(x)=1$, $a_1(x)=0$ και $a_0(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έτσι το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης και $R_1=R_2=\infty$. Οι λύσεις της εξίσωσης γύρω απ' το σημείο $x_0=0$ είναι

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ για } x\in\mathbb{R}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n=2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

και

$$xy(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n$$

και επομένως

$$\begin{aligned}y''(x)-xy(x)&=2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n\\&=2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}-c_{n-1}]x^n.\end{aligned}$$

Έτσι, θα είναι $y''(x)-xy(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$c_2=0 \text{ και } (n+2)(n+1)c_{n+2}-c_{n-1}=0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Τότε για κάθε $n=1,2,\ldots$ είναι

$$3n(3n-1)c_{3n}=c_{3(n-1)},\quad (3n+1)3nc_{3n+1}=c_{3(n-1)+1} \text{ και}$$

$$(3n+2)(3n+1)c_{3n+2}=c_{3(n-1)+2}.$$

Οπότε, μπορούμε εύκολα να βρούμε

$$c_{3n}=\frac{1}{3^n n![2\cdot5\ldots(3n-1)]}c_0=\frac{1\cdot4\ldots(3n-2)}{(3n)!}c_0,$$

$$c_{3n+1}=\frac{1}{3^n n![4\cdot7\ldots(3n+1)]}c_1=\frac{2\cdot5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}c_1$$

και

$$c_{3n+2}=0$$

για $n=1,2,\ldots$. Άρα, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$y(x)=c_0+c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}c_{3n}x^{3n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{3n+1}x^{3n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{3n+2}x^{3n+2}$$

$$=c_0+c_1x+c_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}+c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}$$

$$=c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}\right]+c_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right].$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{(3n)!}x^{3n},\quad x\in\mathbb{R}$$

και

$$y_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1},\quad x\in\mathbb{R}.$$

'Ολες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_0 και c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''-2(x-1)y'+2y=0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0=1$.

<u>Λύση</u>. 'Εχουμε $a_2(x)=1$, $a_1(x)=-2(x-1)$ και $a_0(x)=2$ για $x\in\mathbb{R}$. Το σημείο $x_0=1$ είναι ένα ομαλό της διαφορικής εξίσωσης και $R_1=R_2=\infty$. Οι λύσεις γύρω απ'το σημείο $x_0=1$ θα ορίζονται σ'ολόκληρη την πραγματική ευθεία, δηλαδή θα είναι της μορφής

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n \text{ για } x\in\mathbb{R}.$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$y''(x)-2(x-1)y'(x)+2y(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n(x-1)^{n-2}-2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-1)^{n-1}+$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n-\sum_{n=1}^{\infty}2nc_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(x-1)^n$$

$$=(2c_2+2c_0)+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}-2nc_n+2c_n](x-1)^n.$$

'Αρα, $y''(x)-2(x-1)y'(x)+2y(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$c_2 = -c_0 \text{ και } (n+2)(n+1)c_{n+2} = 2(n-1)c_n \quad (n=1,2,\dots).$$

Είναι

$$(2n+1)2nc_{2n+1} = 2(2n-2)c_{2n-1} \quad (n=1,2,\dots),$$

$$2n(2n-1)c_{2n} = 2(2n-3)c_{2(n-1)} \quad (n=2,3,\dots)$$

και έτσι μπορούμε να βρούμε ότι

$$c_{2n+1} = 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

και

$$c_{2n} = \frac{1}{n!(2n-1)}c_2 = -\frac{2^n[1\cdot 3\dots(2n-3)]}{(2n)!}c_0 \quad (n=2,3,\dots).$$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$y(x) = c_0+c_1(x-1)-c_0(x-1)^2+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}(x-1)^{2n+1}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{2n}(x-1)^{2n}$$

$$= c_0+c_1(x-1)-c_0(x-1)^2-c_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n[1\cdot 3\dots(2n-3)]}{(2n)!}(x-1)^{2n},$$

δηλαδή οι λύσεις γύρω απ'το σημείο $x_0=1$ δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1(x-1)+c_0\left[1-(x-1)^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n[1\cdot 3\dots(2n-3)]}{(2n)!}(x-1)^{2n}\right], \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου c_0 και c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$y_1(x) = x-1, \quad x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad y_2(x) = 1-(x-1)^2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n[1\cdot 3\dots(2n-3)]}{(2n)!}(x-1)^{2n}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(1-x)y''-y'+xy=0; \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$$

<u>Λύση</u>. Εδώ είναι $a_2(x)=1-x$, $a_1(x)=-1$ και $a_0(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \text{για } |x|<1 \quad \text{και} \quad \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{x}{1-x} = x\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$\text{για } |x|<1$$

και άρα το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της εξίσωσης και ακόμα $R_1=R_2=1$. Η ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς που είναι λύση γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$ θα είναι τουλάχιστον 1. Η λύση y θα είναι της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ για } |x| < 1.$$

Έχουμε για κάθε x με $|x| < 1$

$$(1-x)y''(x)-y'(x)+xy(x) = (1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nc_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$$

$$=(2c_2-c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)nc_{n+1} - (n+1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n$$

$$=(2c_2-c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2(n+1)c_{n+2} - (n+1)^2 c_{n+1} + c_{n-1}]x^n$$

και έτσι πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$2c_2 - c_1 = 0 \text{ και } (n+2)(n+1)c_{n+2} = (n+1)^2 c_{n+1} - c_{n-1} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Επειδή η λύση y θα πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0)=1$, παίρνουμε $c_0 = 1$ και $c_1 = 1$. Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$c_n = \frac{1}{n!} \quad (n = 0,1,\ldots).$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \text{ για } |x| < 1.$$

Παρατηρούμε όμως ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης το ∞ καί μάλιστα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μπορούμε, έτσι, να πούμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που δόθηκε είναι

$$y(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y''-xy'+y = 0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$. Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0) = 2 \text{ και } y_0'(0) = 1.$$

Λύση. Είναι $a_2(x) = 1-x^2$, $a_1(x) = -x$ και $a_0(x) = 1$ για $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{-x}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \text{ και } \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \text{ για } |x| < 1.$$

Έτσι $R_1 = R_2 = 1$ και το σημείο $x_0 = 0$ είναι ένα ομαλό σημείο. Οι δυναμοσειρές γύρω απ' το $x_0 = 0$ που είναι λύσεις θα έχουν ακτίνες σύγκλισης μεγαλύτερες ή ίσες του 1. Θα βρούμε τις λύσεις της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ για } |x| < 1.$$

Για $|x| < 1$ έχουμε

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= (2c_2+c_0) + 6c_3x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - nc_n + c_n]x^n$$

$$= (2c_2+c_0) + 6c_3x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)[(n+2)c_{n+2} - (n-1)c_n]x^n.$$

Έτσι, η y θα είναι μια λύση αν και μόνο αν

$$2c_2+c_0 = 0, \quad c_3 = 0 \text{ και } (n+2)c_{n+2} = (n-1)c_n \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι

$$c_{2n+1} = 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

και

$$c_{2n} = \frac{3\cdot 5 \ldots (2n-3)}{4\cdot 6 \ldots (2n)} c_2 = -\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-3)}{2\cdot 4 \ldots (2n)} c_0 = -\frac{[1\cdot 3 \ldots (2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!} c_0$$

$$(n = 2,3,\ldots).$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$ είναι

$$y(x) = c_0 + c_1x - \frac{1}{2}c_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n}x^{2n}$$

$$=c_0+c_1x-\frac{1}{2}c_0x^2-c_0\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[1\cdot3\ldots(2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!}x^{2n},$$

δηλαδή οι λύσεις είναι

$$y(x)=c_1x+c_0\left[1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[1\cdot3\ldots(2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!}x^{2n}\right]$$

$$=c_1y_1(x)+c_0y_2(x)\quad \text{για } |x|<1,$$

όπου c_1 και c_0 είναι αυθαίρετες σταθερές και

$$y_1(x)=x,\quad |x|<1 \quad \text{και}\quad y_2(x)=1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[1\cdot3\ldots(2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!}x^{2n},$$
$$|x|<1$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Τέλος, η λύση y_0 που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0)=2$ και $y_0'(0)=1$ προκύπτει για $c_0=2$ και $c_1=1$ και είναι η

$$y_0(x)=2+x-x^2-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[1\cdot3\ldots(2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!}x^{2n}\quad \text{για } |x|<1.$$

Ας τονίσουμε ότι η λύση y_1 μπορεί να ορισθεί σ'ολόκληρη την πραγματική ευθεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να βρεθούν οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2(x^2-1)y''+x(2x^2-1)y'+y=0$$

που ορίζονται για τα μεγάλα $|x|$.

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $w=1/x$, οπότε

$$y'=\frac{dy}{dx}=-w^2\frac{dy}{dw}\quad \text{και}\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw},$$

και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{w^2}-1\right)\left(w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw}\right)+\frac{1}{w}\left(\frac{2}{w^2}-1\right)\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right)+y=0$$

ή, μετά απ'τις πράξεις,

$$(*)\qquad (1-w^2)\frac{d^2y}{dw^2}-w\frac{dy}{dw}+y=0.$$

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 4, $w_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης (*) και δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις αυτής είναι

$$y_1(w) = w, \quad |w| < 1 \quad \text{και} \quad y_2(w) = 1 - \frac{w^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[1\cdot 3\ldots(2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!} w^{2n},$$
$$|w| < 1.$$

Έτσι, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής μας εξίσωσης είναι

$$y_1(x) = \frac{1}{x}, \ |x| > 1 \quad \text{και} \quad y_2(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[1\cdot 3\ldots(2n-3)]^2(2n-1)}{(2n)!} \frac{1}{x^{2n}},$$
$$|x| > 1.$$

Ας σημειωθεί ότι η λύση y_1 μπορεί να ορισθεί για όλα τα $x \neq 0$.

2.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
(ii) $y''-2xy'+2y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
(iii) $(-x^2+4x-3)y''-2(x-2)y'+6y=0$; $y(2)=1$, $y'(2)=0$.
(iv) $(x^2+2)y''-3y'+(x-1)y=0$; $y(1)=-1$, $y'(1)=2$.

2. Να επιλυθούν γύρω απ'το σημειούμενο σημείο οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y''-x^2y'-y=0$; $x_0=0$.
(ii) $(1+x^2)y''+2xy'=0$; $x_0=0$.
(iii) $(x+1)y''+(x-2)y'+y=0$; $x_0=0$.
(iv) $(x+2)y''-y=0$; $x_0=-1$.

3. Με την αντικατάσταση $t=x-\alpha$ (όπου α κατάλληλος αριθμός) να επιλυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $(2x-x^2)y''-5(x-1)y'+3y=0$; $y(1)=0$, $y'(1)=1$.
(ii) $y''-(x^2+2x+1)y'-(2x+2)y=0$; $y(-1)=y'(-1)=2$.
(iii) $(x^2-2x+2)y''+(2x-2)y'=0$; $y(1)=1$, $y'(1)=-1$.

4. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις γύρω απ'το σημειούμενο σημείο για καθεμιά απ'τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(i) $y''-x^3y=0$, $x_0=0$.
(ii) $y''+x^3y'+3x^2y=0$; $x_0=0$.
(iii) $y''-xy=0$; $x_0=1$.

5. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ορισμένες για τα μεγάλα $|x|$ για καθεμιά απ'τις διαφορικές εξισώσεις:

(i) $x^2(x^2+4)y''+2x(x^2+4)y'-8y=0$.

(ii) $x^2(x^2+1)y''+2x(x^2-4)y'+20y=0$.

(iii) $x^6y''+2x^5y'+y=0$.

3. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ

Το Εδάφιο αυτό αφορά την εύρεση δυναμοσειρών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (Ε) γύρω από κανονικά ανώμαλα σημεία αυτής. Δίνεται ένα Θεώρημα (το Θεώρημα 2) και ακολουθούν παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου που περιγράφει θεωρητικά το Θεώρημα 2. Επίσης,προτείνονται για λύση μερικές ασκήσεις.

3.1. Δυναμοσειρές λύσεις γύρω από κανονικά ανώμαλα σημεία

Το Θεώρημα 2 εξασφαλίζει την ύπαρξη δύο γραμμικά ανεξάρτητων δυναμοσειρών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (Ε) γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο αυτής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Ας θεωρήσουμε ένα κανονικό ανώμαλο σημείο x_0 της διαφορικής εξίσωσης (Ε) και δύο συναρτήσεις A_1 και A_0 με πεδία ορισμού D_1 και D_0 (όπου $x_0 \in D_1 \cap D_0$ και $D_1 \subseteq I$, $D_0 \subseteq I$) που είναι αναλυτικές στο x_0 και τέτοιες ώστε*

$$(x-x_0)a_1(x)=a_2(x)A_1(x),\ x\in D_1 \ \text{και}\ (x-x_0)^2a_0(x)=a_2(x)A_0(x),\ x\in D_2.$$

Ας είναι $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n$ *δύο δυναμοσειρές με θετικές ακτίνες σύγκλισης* R_1 *και* R_2 *αντίστοιχα και τέτοιες ώστε*

$$A_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n \ \text{για}\ |x-x_0|<R_1 \ \text{και}\ A_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n \ \text{για}\ |x-x_0|<R_2.$$

Ας είναι ακόμα $R=\min\{R_1,R_2\}$ *και* λ_1,λ_2 *οι ρίζες της εξίσωσης (που* καλείται ενδεικτική εξίσωση της (E) στο x_0)

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0 = 0$$

με $Re\lambda_1 \geq Re\lambda_2$.

Τότε: Η διαφορική εξίσωση (E) έχει μια λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ για } 0 < |x-x_0| < R$$

με $c_0 = 1$. Μια άλλη λύση y_2 της (E), τέτοια ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, μπορεί να βρεθεί ως εξής:

(i) Αν $\lambda_1-\lambda_2$ δεν είναι ακέραιος, τότε

$$y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n \text{ για } 0 < |x-x_0| < R$$

με $d_0 = 1$.

(ii) Αν $\lambda_1 = \lambda_2$, τότε

$$y_2(x) = y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n \text{ για } 0 < |x-x_0| < R$$

με $d_0 = 0$.

(iii) Αν $\lambda_1-\lambda_2$ είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$y_2(x) = Cy_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n \text{ για } 0 < |x-x_0| < R$$

με $d_0 = 1$ και για κάποια σταθερά C (που μπορεί να είναι και ίση με μηδέν).

Οι συντελεστές c_n και d_n $(n = 1,2,\ldots)$ καθώς και η σταθερά C προσδιορίζονται με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση (E) των τιμών $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $A_1(x)$ και $A_0(x)$ (για $0 < |x-x_0| < R$) με τις αντίστοιχες εκφράσεις αυτών με τη βοήθεια των σειρών, αφού πρώτα η (E) γραφεί στη μορφή $(x-x_0)^2y''(x)+(x-x_0)A_1(x)y'(x)+A_0(x)y(x) = 0$, $0 < |x-x_0| < R$.

Η μέθοδος για την εύρεση δυναμοσειρών λύσεων της μορφής y_1 ή, εφόσον $\lambda_1-\lambda_2$ δεν είναι ακέραιος, της μορφής y_2 είναι γνωστή ως μέθοδος του Frobenius.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2, θα παρατηρήσουμε ότι είναι αρκετό να προσδιορισθούν οι λύσεις y_1 και y_2 στο διάστημα (x_0,x_0+R), δεδομένου ότι τότε η λύση y_1 επεκτείνεται και στο (x_0-R,x_0) αρκεί ν' αντικατασταθεί το $(x-x_0)^{\lambda_1}$ με $|x-x_0|^{\lambda_1}$ και η λύση y_2 επεκτείνεται και στο (x_0-R,x_0) αρκεί ν' αντικατασταθεί το $(x-x_0)^{\lambda_2}$ με $|x-x_0|^{\lambda_2}$ καθώς και, για τις περιπτώσεις (ii) και (iii), το $\log(x-x_0)$ με $\log|x-x_0|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2. Θεωρούμε τον τελεστή L, ο οποίος απεικονίζει κάθε συνάρτηση φ που έχει παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\{x:\ 0<|x-x_0|<R\}$ στη συνάρτηση $L(\varphi)$ με

$$L(\varphi)(x) = (x-x_0)^2\varphi''(x)+(x-x_0)A_1(x)\varphi'(x)+A_0(x)\varphi(x),\quad 0<|x-x_0|<R.$$

Θεωρούμε ένα τυχόντα αριθμό r τέτοιον ώστε

$$P(r+n)\neq 0 \text{ για κάθε } n=1,2,\ldots$$

και εκλέγουμε αυθαίρετα μια σταθερά $C_0(r)$. Τότε ο αναγωγικός τύπος

$$(*)\qquad P(r+n)C_n(r)+\sum_{k=0}^{n-1}[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]C_k(r)=0\quad (n=1,2,\ldots)$$

ορίζει μονοσήμαντα τους αριθμούς $C_n(r)$ $(n=1,2,\ldots)$ (συναρτήσει του $C_0(r)$). Θ'αποδείξουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(r)(x-x_0)^n$ συγκλίνει (τουλάχιστον) για $|x-x_0|<R$ και ότι η συνάρτηση

$$\Phi(x;r)=|x-x_0|^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n(r)(x-x_0)^n,\quad 0<|x-x_0|<R$$

είναι τέτοια ώστε

$$(**)\qquad L(\Phi)(x;r)=C_0(r)P(r)|x-x_0|^r,\quad 0<|x-x_0|<R.$$

Ας είναι x ένα οποιοδήποτε σημείο με $0<|x-x_0|<R$ και ας θέσουμε $\vartheta_0=|x-x_0|$. Θέλουμε ν'αποδείξουμε ότι η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(r)\vartheta_0^n$ συγκλίνει. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε ένα αριθμό ϑ με $\vartheta_0<\vartheta<R$ και παρατηρούμε ότι οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}p_n\vartheta^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty}q_n\vartheta^n$ συγκλίνουν, αφού $\vartheta<R=\min\{R_1,R_2\}$. Επομένως, για κάποιο θετικό αριθμό M έχουμε

$$|p_n|\vartheta^n\le M \text{ και } |q_n|\vartheta^n\le M\quad (n=0,1,\ldots)$$

και έτσι για $n=1,2,\ldots$ παίρνουμε

$$|P(r+n)||C_n(r)|\le\sum_{k=0}^{n-1}[(|r|+k)|p_{n-k}|+|q_{n-k}|]|C_k(r)|$$

$$\le\frac{M}{\vartheta^n}\sum_{k=0}^{n-1}(|r|+k+1)\vartheta^k|C_k(r)|.$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία μη αρνητικών αριθμών $(\gamma_n(r))_{n=0,1,\ldots}$ που ορίζεται ως εξής

$$\gamma_0(r)=|c_0(r)| \quad \text{και} \quad |P(r+n)|\gamma_n(r)=\frac{M}{\vartheta^n}\sum_{k=0}^{n-1}(|r|+k+1)\vartheta^k\gamma_k(r) \quad (n=1,2,\ldots),$$

οπότε θα είναι

$$|c_n(r)| \leq \gamma_n(r) \quad (n=0,1,\ldots).$$

Άρα, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(r)\vartheta_0^n$ συγκλίνει, τότε το ίδιο θα συμβαίνει και για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(r)\vartheta_0^n$. Για $n=1,2,\ldots$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}|P(r+n+1)|\gamma_{n+1}(r) &= \frac{M}{\vartheta^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(|r|+k+1)\vartheta^k\gamma_k(r)\\ &= \frac{M}{\vartheta^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(|r|+k+1)\vartheta^k\gamma_k(r)+(|r|+n+1)\vartheta^n\gamma_n(r)\right]\\ &= \frac{1}{\vartheta}\left[|P(r+n)|+M(|r|+n+1)\right]\gamma_n(r).\end{aligned}$$

Αν $\gamma_1(r)=0$, τότε $\gamma_n(r)=0$ $(n=1,2,\ldots)$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(r)\vartheta_0^n$ συγκλίνει. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\gamma_1(r)>0$, οπότε θα είναι $\gamma_n(r)>0$ $(n=1,2,\ldots)$. Τότε για κάθε $n=1,2,\ldots$ παίρνουμε

$$\frac{\gamma_{n+1}(r)\vartheta_0^{n+1}}{\gamma_n(r)\vartheta_0^n}=\frac{|P(r+n)|+M(|r|+n+1)}{|P(r+n+1)|}\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta}=\left(\left|\frac{P(r+n)}{P(r+n+1)}\right|+M\left|\frac{|r|+n+1}{P(r+n+1)}\right|\right)\cdot\frac{\vartheta_0}{\vartheta}.$$

Αλλά, για τυχόντα θετικό ακέραιο n είναι

$$P(r+n)=(r+n)^2+(p_0-1)(r+n)+q_0=n^2+(2r+p_0-1)n+[r^2+(p_0-1)r+q_0]$$

και

$$\begin{aligned}P(r+n+1) &= (r+n+1)^2+(p_0-1)(r+n+1)+q_0\\ &= n^2+[2(r+1)+p_0-1]n+[(r+1)^2+(p_0-1)(r+1)+q_0],\end{aligned}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(r+n)}{P(r+n+1)}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|r|+n+1}{P(r+n+1)}=0.$$

Έτσι, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_{n+1}(r)\vartheta_0^{n+1}}{\gamma_n(r)\vartheta_0^n}=\frac{\vartheta_0}{\vartheta}<1,$$

που εξασφαλίζει τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(r)\vartheta_0^n$.

Για κάθε x με $0 < x-x_0 < R$ έχουμε

$$(x-x_0)\Phi'(x;r) = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n(r)(x-x_0)^n,$$

$$(x-x_0)^2\Phi''(x;r) = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n(r)(x-x_0)^n$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
L(\Phi)(x;r) &= (x-x_0)^2\Phi''(x;r)+(x-x_0)A_1(x)\Phi'(x;r)+A_0(x)\Phi(x;r)\\
&= (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n(r)(x-x_0)^n +\\
&\quad +(x-x_0)^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n(r)(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n\right]+\\
&\quad +(x-x_0)^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n\right]\\
&= (x-x_0)^r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)c_n(r)(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(r+k)p_{n-k}c_k(r)\right](x-x_0)^n\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}c_k(r)\right](x-x_0)^n\right\}\\
&= (x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(r+n)(r+n-1)c_n(r)+\sum_{k=0}^{n}[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]c_k(r)\right\}(x-x_0)^n\\
&= (x-x_0)^r\left\{[r^2+(p_0-1)r+q_0]c_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left([(r+n)^2+(p_0-1)(r+n)+q_0]c_n(r)+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sum_{k=0}^{n-1}[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]c_k(r)\right)(x-x_0)^n\right\}\\
&= (x-x_0)^r\left\{P(r)c_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(P(r+n)c_n(r)+\sum_{k=0}^{n-1}[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]c_k(r)\right)(x-x_0)^n\right\}\\
&= (x-x_0)^rP(r)c_0(r).
\end{aligned}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί ν' ακολουθηθεί και για $-R < x-x < 0$ με το $[-(x-x_0)]^r = |x-x_0|^r$ στη θέση του $(x-x_0)^r$. Τελικά, βρίσκουμε ότι

$$L(\Phi)(x;r) = P(r)c_0(r)|x-x_0|^r, \quad 0 < |x-x_0| < R.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$P(\lambda_1+n) \neq 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

καθώς επίσης ότι $P(\lambda_1)=0$. Έτσι, παίρνοντας

$$c_0=C_0(\lambda_1)=1 \text{ και } c_n=C_n(\lambda_1) \quad (n=1,2,\dots),$$

έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει (τουλάχιστον) για $|x-x_0|<R$ και ότι η συνάρτηση

$$y_1(x)=\Phi(x;\lambda_1)=|x-x_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E).

Για να βρούμε μια άλλη λύση $y_2(x)$, $0<|x-x_0|<R$ της διαφορικής εξίσωσης (E), έτσι ώστε οι y_1,y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση I</u>: <u>$\lambda_1-\lambda_2$ δεν είναι ακέραιος</u>. Τότε είναι

$$P(\lambda_2+n)\neq 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

και $P(\lambda_2)=0$. Επομένως, για

$$d_0=C_0(\lambda_2)=1 \text{ και } d_n=C_n(\lambda_2) \quad (n=1,2,\dots),$$

η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει (τουλάχιστον) για $|x-x_0|<R$ και η συνάρτηση

$$y_2(x)=\Phi(x;\lambda_2)=|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n, \quad 0<|x-x_0|<R$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E).

<u>Περίπτωση II</u>: <u>Είναι $\lambda_1=\lambda_2$</u>. Τότε έχουμε

$$P(\lambda_1)=P'(\lambda_1)=0$$

και για κάθε αριθμό r με $|r-\lambda_1|<1$ είναι

$$P(r+n)\neq 0 \quad (n=1,2,\dots).$$

Θέτουμε $C_0(r)=1$ για όλα τα r με $|r-\lambda_1|<1$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n\in\{0,1,\dots\}$, $C_n'(r)$ υπάρχει για όλα τα r με $|r-\lambda_1|<1$. Ειδικά, είναι $C_0'(\lambda_1)=0$. Τώρα, για κάθε x με $0<|x-x_0|<R$ και για όλα τα r με $|r-\lambda_1|<1$ έχουμε

$$L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)(x;r)=\frac{\partial}{\partial r}L(\Phi)(x;r)=\frac{\partial}{\partial r}\left[C_0(r)P(r)|x-x_0|^r\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left[P(r)|x-x_0|^r\right]=\left[P'(r)+P(r)\log|x-x_0|\right]|x-x_0|^r.$$

Έτσι, για όλα τα x με $0<|x-x_0|<R$ είναι

$$L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)(x;\lambda_1) = [P'(\lambda_1)+P(\lambda_1)\log|x-x_0|]|x-x_0|^r = 0,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$y_2(x) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}(x;\lambda_1),\quad 0<|x-x_0|<R$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (Ε). Αλλά, για $0<|x-x_0|<R$ και $|r-\lambda_1|<1$, έχουμε

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(x;r) = \frac{\partial}{\partial r}\left[|x-x_0|^r\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)(x-x_0)^n\right]$$

$$= |x-x_0|^r\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)(x-x_0)^n\right]\log|x-x_0|+|x-x_0|^r\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r)(x-x_0)^n.$$

Έτσι, για κάθε x με $0<|x-x_0|<R$ παίρνουμε

$$y_2(x)=\left[|x-x_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_1)(x-x_0)^n\right]\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(\lambda_1)(x-x_0)^n$$

$$=\left[|x-x_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\right]\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n,$$

όπου

$$d_0 = c_0'(\lambda_1) = 0 \text{ και } d_n = c_n'(\lambda_1)\quad (n=1,2,\ldots).$$

Άρα, έχουμε

$$y_2(x) = y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n,\quad 0<|x-x_0|<R.$$

<u>Περίπτωση III</u>: $\lambda_1-\lambda_2=m$, <u>όπου</u> m <u>είναι ένας θετικός ακέραιος</u>. Θεωρούμε ένα αριθμό r με $|r-\lambda_2|<1$ και θέτουμε $c_0(r)=r-\lambda_2$. Αν $m>1$, τότε είναι $P(r+n)\neq 0$ για $n=1,2,\ldots,m-1$ και έτσι απ'τον αναγωγικό τύπο (*) προσδιορίζονται μονοσήμαντα οι αριθμοί $c_n(r)$ $(n=1,2,\ldots,m-1)$. Οι αριθμοί $c_n(r)$ $(n=0,1,\ldots,m-1)$ έχουν ως παράγοντα το $r-\lambda_2$. Επίσης, είναι $P(r+m) = (r+m-\lambda_1)(r+m-\lambda_2) = (r-\lambda_2)(r+m-\lambda_2)$, όπου $r+m-\lambda_2\neq 0$. Έτσι, στον τύπο (*) με $n=m$ μπορούμε ν'απλοποιήσουμε απ'τα δύο μέλη τον παράγοντα $r-\lambda_2$ και να προκύψει έπειτα μονοσήμαντα ο αριθμός $c_m(r)$. Επειδή $P(r+n)\neq 0$ για $n=m+1,\ldots$, οι αριθμοί $c_n(r)$ $(n=m+1,m+2,\ldots)$ ορίζονται μονοσήμαντα απ'τον αναγωγικό τύπο (*). Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)(x-x_0)^n$ συγκλίνει (τουλάχιστον) για $|x-x_0|<R$. Η απόδειξη του γεγονότος αυτού δεν διαφέρει ουσιαστικά απ'αυτή που δόθηκε προηγούμενα [αρκεί να περιορισθεί κανένας στη $\sum_{n=m}^{\infty} c_n(r)(x-x_0)^n$]. Εδώ ο τύπος (*) δίνει

$$L(\Phi)(x;r) = (r-\lambda_2)P(r)|x-x_0|^r, \quad 0 < |x-x_0| < R.$$

'Ετσι, για όλα τα x, r με $0 < |x-x_0| < R$ και $|r-\lambda_2| < 1$ έχουμε

$$L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)(x;r) = \frac{\partial}{\partial r} L(\Phi)(x;r) = \frac{\partial}{\partial r}[(r-\lambda_2)P(r)|x-x_0|^r]$$

$$= \{P(r)+(r-\lambda_2)[P'(r)+P(r)\log|x-x_0|]\}|x-x_0|^r.$$

'Αρα, για κάθε x με $0 < |x-x_0| < R$ είναι

$$L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)(x;\lambda_2) = 0,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$y_2(x) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}(x;\lambda_2), \quad 0 < |x-x_0| < R$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E). Για όλα τα x με $0 < |x-x_0| < R$ έχουμε

$$y_2(x) = \left[|x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_2)(x-x_0)^n\right]\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(\lambda_2)(x-x_0)^n.$$

Θέτουμε

$$d_0 = c_0'(\lambda_2) = 1 \text{ και } d_n = c_n'(\lambda_2) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$c_n(\lambda_2) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, \lambda_2).$$

'Αρα, για $0 < |x-x_0| < R$ είναι

$$y_2(x) = \left[|x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=m}^{\infty} c_n(\lambda_2)(x-x_0)^n\right]\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$$

$$= (-1)^m\left[|x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(\lambda_2)(x-x_0)^n\right]\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^r$$

Αλλά, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$|x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(\lambda_2)(x-x_0)^n = cy_1(x), \quad 0 < |x-x_0| < R$$

για κάποια σταθερά c. 'Ετσι, θέτοντας $C = (-1)^m c$, παίρνουμε

$$y_2(x) = Cy_1(x)\log|x-x_0| + |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n, \quad 0 < |x-x_0| < R,$$

όπου $d_0 = 1$.

Τέλος, αφήνουμε ως άσκηση την απόδειξη ότι, σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις (I),(II) και (III), οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

'Οταν ενδιαφερόμαστε για λύσεις της (Ε) ορισμένες σε μια περιοχή του ∞ ή του −∞, μετασχηματίζουμε την (Ε) με την αντικατάσταση $w=1/x$, οπότε

$$\frac{dy}{dx}=-w^2\frac{dy}{dw} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2}=w^4\frac{d^2y}{dw^2}+2w^3\frac{dy}{dw},$$

και βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης που προκύπτει γύρω απ'το σημείο $x_0=0$, εφόσον αυτό είναι ένα <u>κανονικό</u> <u>ανώμαλο</u> <u>σημείο</u> αυτής.

3.2. Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

Σε καθένα απ'τα παρακάτω Παραδείγματα 1-3 θα βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (Ε) γύρω από ένα κανονικό ανώμαλο σημείο αυτής. Θα υποτίθεται ότι A_1, $A_0, R_1, R_2, R, p_0, q_0, \lambda_1, \lambda_2$ είναι όπως στην υπόθεση του Θεωρήματος 2. Στο Παράδειγμα 4 θα βρούμε τις λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής (Ε) που ορίζονται για τα μεγάλα $|x|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2x^2y''+(x-x^2)y'-y=0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0=0$.

<u>Λύση</u>. Είναι $a_2(x)=2x^2$, $a_1(x)=x-x^2$ και $a_0(x)=-1$ για $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $a_2(0)=0$, το 0 είναι ένα ανώμαλο σημείο. 'Εχουμε $A_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$, $x\in\mathbb{R}$ και $A_0(x)=-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ και άρα το $x_0=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Ακόμα, $R_1=R_2=\infty$ και άρα $R=\infty$. Επειδή $p_0=\frac{1}{2}$, $q_0=-\frac{1}{2}$, θα είναι $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1/2$.

Μια λύση y_1 θα είναι της μορφής

$$y_1(x)=|x|\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ για } x\neq 0,$$

όπου $c_0=1$. Επειδή $\lambda_1-\lambda_2=3/2$ που δεν είναι ακέραιος, μια δεύτερη λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη με την y_1 θα είναι της μορφής

$$y_2(x)=|x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \text{ για } x\neq 0$$

με $d_0=1$. Αρκεί λοιπόν να προσδιορισθούν οι συντελεστές c_n, d_n $(n=1,2,\ldots)$. Για κάθε $x>0$ παίρνουμε

$$y_1(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1},\quad y_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^n$$

και

$$y_1''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^{n-1}$$

και άρα

$$2x^2y_1''(x)+(x-x^2)y_1'(x)-y_1(x)=$$

$$=x\left[2x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^{n-1}+(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]$$

$$=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}2n(n+1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]$$

$$=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}2n(n+1)c_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_{n-1}x^n\right]=x\sum_{n=1}^{\infty}n[(2n+3)c_n-c_{n-1}]x^n.$$

Έτσι, καταλήγουμε στον αναγωγικό τύπο

$$(2n+3)c_n-c_{n-1}=0\qquad(n=1,2,\ldots)$$

απ' τον οποίο παίρνουμε (για $c_0=1$)

$$c_n=\frac{1}{5\cdot 7\ldots(2n+3)}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Επομένως, η λύση y_1 είναι

$$y_1(x)=|x|\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 7\ldots(2n+3)}x^n\right]=|x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{3\cdot 5\ldots(2n+3)}x^n \text{ για } x\neq 0.$$

Για όλα τα $x>0$ έχουμε

$$y_2(x)=x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n,$$

$$y_2'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n+x^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1}=-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n+x^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^n$$

$$=-\frac{1}{2}x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n+x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}nd_nx^n=x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n,$$

και

$$y_2''(x)=-\frac{3}{2}x^{-5/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n+x^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^{n-1}$$

$$=-\frac{3}{2}x^{-5/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n+x^{-5/2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n$$

$$=-\frac{3}{2}x^{-5/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n+x^{-5/2}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n=x^{-5/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)d_nx^n$$

και έτσι παίρνουμε

$$2x^2y_2''(x)+(x-x^2)y_2'(x)-y_2(x)=$$

$$=x^{-1/2}[2x^{5/2}y_2''(x)+x^{3/2}(1-x)y_2'(x)-x^{1/2}y_2(x)]$$

$$=x^{-1/2}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)d_nx^n+(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n\right]$$

$$=x^{-1/2}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)d_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)d_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n\right]$$

$$=x^{-1/2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}2n\left(n-\frac{3}{2}\right)d_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{3}{2}\right)d_{n-1}x^n\right]$$

$$=x^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{3}{2}\right)(2nd_n-d_{n-1})x^n.$$

Επομένως, καταλήγουμε στον αναγωγικό τύπο

$$2nd_n-d_{n-1}=0 \quad (n=1,2,\ldots),$$

ο οποίος δίνει

$$d_n=\frac{1}{2^nn!}\,d_0=\frac{1}{2^nn!} \quad (n=1,2,\ldots).$$

'Αρα, η λύση y_2 είναι

$$y_2(x)=|x|^{-1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nn!}x^n\right]=|x|^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \text{ για } x\neq 0,$$

δηλαδή

$$y_2(x)=|x|^{-1/2}e^{x/2} \text{ για } x\neq 0.$$

'Ολες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1|x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{3.5\ldots(2n+3)}x^n+c_2|x|^{-1/2}e^{-x/2} \text{ για } x\neq 0,$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''-(x^2+x)y'+y=0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0=0$.

<u>Λύση</u>. Είναι $a_2(x)=x^2$, $a_1(x)=-x^2-x$ και $a_0(x)=1$ για $x\in\mathbb{R}$ και έτσι το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ανώμαλο σημείο αφού $a_2(0)=0$. Έχουμε ότι $A_1(x)=-1-x$, $x\in\mathbb{R}$ και $A_0(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$ και άρα το σημείο $x_0=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο. Επιπλέον, $R_1=R_2=\infty$ και έτσι $R=\infty$. Ακόμα, είναι $p_0=-1$ και $q_0=1$ και επομένως $\lambda_1=\lambda_2=1$.

Θα έχουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις των μορφών

$$y_1(x)=|x|\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ για } x\neq 0 \text{ με } c_0=1$$

και

$$y_2(x)=y_1(x)\log|x|+|x|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \text{ για } x\neq 0 \text{ με } d_0=0.$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές c_n $(n=1,2,\dots)$. Για $x>0$ έχουμε

$$x^2y_1''(x)-(x^2+x)y_1'(x)+y_1(x)=x\left[xy_1''(x)-(x+1)y_1'(x)+\frac{1}{x}y_1(x)\right]$$

$$=x\left[x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^{n-1}-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]$$

$$=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)c_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]$$

$$=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^2c_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_{n-1}x^n\right]=x\sum_{n=1}^{\infty}n(nc_n-c_{n-1})x^n$$

και άρα για κάθε $n=1,2,\dots$

$$nc_n-c_{n-1}=0, \text{ οπότε } c_n=\frac{1}{n!}c_0=\frac{1}{n!}.$$

Επομένως

$$y_1(x)=|x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=|x|e^x \text{ για } x\neq 0.$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε τους συντελεστές d_n $(n=1,2,\dots)$. Είναι

$$y_2(x)=|x|e^x\log|x|+|x|\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \text{ για } x\neq 0.$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$y_2(x)=xe^x\log x+x\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n,$$

$$y_2'(x)=e^x(\log x+x\log x+1)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_nx^n$$

και

$$y_2''(x) = e^x\left(2\log x + x\log x + \frac{1}{x} + 2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)d_n x^{n-1}$$

και έτσι

$$x^2y_2''(x) - (x^2+x)y_2'(x) + y_2(x) = x\left[xy_2''(x) - (x+1)y_2'(x) + \frac{1}{x}y_2(x)\right]$$

$$= x\Big[e^x(2x\log x + x^2\log x + 1 + 2x) + x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)d_n x^{n-1} -$$

$$-(x+1)e^x(\log x + x\log x + 1) - (x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_n x^n + e^x\log x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\Big]$$

$$= x\left[xe^x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)d_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right]$$

$$= x\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(nd_n - d_{n-1})x^n\right] = x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(nd_n - d_{n-1})x^n\right]$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\left[n(nd_n - d_{n-1}) + \frac{1}{(n-1)!}\right]x^n .$$

'Αρα έχουμε

$$(*) \qquad d_n = \frac{1}{n}d_{n-1} - \frac{1}{nn!} \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Ο αναγωγικός αυτός τύπος δεν μπορεί να οδηγήσει σε απευθείας έκφραση του d_n συναρτήσει του n. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση των n πρώτων συντελεστών d_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ για οποιοδήποτε n. Για παράδειγμα,

$$d_1 = -\frac{1}{1\cdot 1!} = -1,\ d_2 = \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2\cdot 2!} = -\frac{3}{4},\ d_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{3.3!} = -\frac{11}{36} \text{ κ.λ.π..}$$

'Ολες οι λύσεις της εξίσωσης θα δίνονται απ'τον τύπο

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1|x|e^x + c_2|x|e^x\log|x| + c_2|x|\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

$$= |x|\left[(c_1 + c_2\log|x|)e^x + c_2\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right] \text{ για } x \neq 0,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και οι συντελεστές d_n $(n = 0,1,\ldots)$ προσδιορίζονται απ'τον αναγωγικό τύπο (*) με $d_0 = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' - xy' + 8(x^2-1)y = 0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$.

<u>Λύση</u>. 'Εχουμε $a_2(x) = x^2$, $a_1(x) = -x$ και $a_0(x) = 8(x^2-1)$ για $x \in \mathbb{R}$

και έτσι είναι $A_1(x)=-1$ και $A_0(x)=-8+8x^2$ για $x\in\mathbb{R}$. Το σημείο άρα $x_0=0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και μάλιστα $R_1=R_2=R=\infty$. Ακόμα, $p_0=-1$ και $q_0=-8$ και άρα $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$.

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις θα είναι οι

$$y_1(x)=x^4\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ για } x\neq 0$$

και

$$y_2(x)=Cy_1(x)\log|x|+\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \text{ για } x\neq 0,$$

όπου $c_0=d_0=1$ και C είναι μια σταθερά. Για τους συντελεστές c_n $(n=1,2,\ldots)$ βρίσκουμε εύκολα ότι

$$c_1=0 \text{ και } n(n+6)c_n=-8c_{n-2} \quad (n=2,3,\ldots).$$

Έτσι, θα είναι

$$c_{2n-1}=0 \text{ και } c_{2n}=\frac{2^{n+1}\cdot 3(-1)^n}{n!(n+3)!} \quad (n=1,2,\ldots)$$

και άρα

$$y_1(x)=x^4\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\cdot 3(-1)^n}{n!(n+3)!}x^{2n}\right]=x^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}\cdot 3(-1)^n}{n!(n+3)!}x^{2n} \text{ για } x\neq 0.$$

Για να βρούμε τη λύση y_2, θέτουμε

$$z(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n \text{ για } x\neq 0.$$

Τότε θα έχουμε για $x>0$

$$y_2(x)=Cy_1(x)\log x+\frac{1}{x^2}z(x),$$

$$y_2'(x)=Cy_1'(x)\log x+\frac{C}{x}y_1(x)-\frac{2}{x^3}z(x)+\frac{1}{x^2}z'(x)$$

και

$$y_2''(x)=Cy_1''(x)\log x+\frac{2C}{x}y_1'(x)-\frac{C}{x^2}y_1(x)+\frac{6}{x^4}z(x)-\frac{4}{x^3}z'(x)+\frac{1}{x^2}z''(x)$$

και έτσι (μετά από πράξεις και αφού λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι η y_1 είναι μια λύση της εξίσωσης) θα πάρουμε

$$x^2y_2''(x)-xy_2'(x)+8(x^2-1)y_2(x)=z''(x)-\frac{5}{x}z'(x)+8z(x)+2C[xy_1'(x)-y_1(x)]$$

$$=\frac{1}{x}\{xz''(x)-5z'(x)+8xz(x)+2C[x^2y_1'(x)-xy_1(x)]\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nx^{n-2}-5\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1}+8x\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n+\right.$$

$$+2C\left[x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)c_nx^{n+3}-x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+4}\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{x}\Bigg\{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nx^{n-1}-5\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^{n-1}+8\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{n+1}+$$

$$+2C\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)c_nx^{n+5}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+5}\right]\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{x}\Bigg\{\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)d_{n+1}x^n-5\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}x^n+8\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}x^n+2C\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)c_nx^{n+5}\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{x}\Bigg\{-5d_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n-5)d_{n+1}+8d_{n-1}]x^n+2C\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)c_nx^{n+5}\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{x}\Bigg\{-5d_1+8(-d_2+d_0)x+(-9d_3+8d_1)x^2+8(-d_4+d_2)x^3+(-5d_5+8d_3)x^4+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}[n(n+6)d_{n+6}+8d_{n+4}+2C(n+3)c_n]x^{n+5}\Bigg\}.$$

'Ετσι, θα έχουμε

$$d_1=d_3=d_5=0 \text{ και } d_0=d_2=d_4=1$$

και

$$n(n+6)d_{n+6}+8d_{n+4}+2C(n+3)c_n=0 \quad (n=0,1,\ldots).$$

Θέτοντας $n=0$, παίρνουμε $8d_4+6C\,c_0=0$ και άρα

$$C=-\frac{4}{3}.$$

Επειδή $c_{2n-1}=0$ $(n=1,2,\ldots)$, βρίσκουμε εύκολα ότι

$$d_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Επίσης, είναι

$$2n(n+3)d_{2n+6}+4d_{2n+4}=-C(2n+3)\frac{2^{n+1}\cdot 3(-1)^n}{n!(n+3)!} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Ο συντελεστής d_6 είναι φανερό ότι μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. 'Ετσι, θέτουμε $d_6=0$ και βλέπουμε ότι η λύση y_2 είναι

$$y_2(x)=x^4\log|x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+3}(-1)^{n+1}}{n!(n+3)!}x^{2n}+\frac{1}{x^2}\left(1+x^2+x^4+\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n+6}x^{2n+6}\right),x\neq 0,$$

όπου οι συντελεστές d_{2n+6} $(n=1,2,\ldots)$ προσδιορίζονται απ'τον αναγωγικό τύπο

$$2n(n+3)d_{2n+6}+4d_{2n+4} = (2n+3)\ \frac{2^{n+3}(-1)^n}{n!\,(n+3)!}\quad (n=1,2,\dots)$$

με $d_6 = 0$. Ας σημειώσουμε ότι δεν μπορούμε να επιλέξουμε $C=0$ στο παράδειγμά μας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$2x^2y''+(3x+1)y'-y=0$$

ορισμένες για τα μεγάλα $|x|$.

Λύση. Θέτοντας $w=1/x$, έχουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = -w^2\ \frac{dy}{dw}\ \text{και}\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = w^4\ \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\ \frac{dy}{dw}$$

και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$2\ \frac{1}{w^2}\left(w^4\ \frac{d^2y}{dw^2} + 2w^3\ \frac{dy}{dw}\right)+\left(3\ \frac{1}{w}+1\right)\left(-w^2\ \frac{dy}{dw}\right)-y=0$$

ή

$$2w^2\ \frac{d^2y}{dw^2} + (w-w^2)\ \frac{dy}{dw} - y = 0.$$

Για τη διαφορική εξίσωση αυτή το σημείο $w_0 = 0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο και δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι (Παράδειγμα 1)

$$y_1(w) = |w|\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3\cdot 5\cdots(2n+3)}\ w^n,\ w\neq 0\ \text{και}\ y_2(w) = |w|^{-1/2}e^{w/2},\ w\neq 0.$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωσή μας έχει τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$y_1(x) = \frac{1}{|x|}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{3\cdot 5\cdots(2n+3)}\ \frac{1}{x^n},\ x\neq 0\ \text{και}\ y_2(x) = |x|^{1/2}e^{1/2x},\ x\neq 0.$$

3.3. Ασκήσεις

1. Για καθεμιά απ'τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις να βρεθεί μια λύση γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$:

(i) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$.

(ii) $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$.

(iii) $xy''+(1-x)y'+y=0$.

(iv) $x^2y''-x(2+x^2)y+x^2y=0$.

2. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις γύρω απ'το σημείο x_0 για καθεμιά απ'τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(i) $2x^2y''-xy'+(1-x^2)y=0;\ x_0=0.$

(ii) $4xy''+2y'+y=0;\ x_0=0.$

(iii) $x^2y''-x(2+x^2)y+x^2y=0;\ x_0=0.$

(iv) $(x-1)y''-3y'+y=0;\ x_0=1.$

(v) $xy''+xy'+y=0;\ x_0=0.$

(vi) $(x-1)^2y''+(2-x)y'+y=0;\ x_0=1.$

3. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$xy''-y'+4x^3y=0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0=0$. Να διαπιστωθεί ότι η σταθερά C του θεωρήματος 2 είναι ίση με μηδέν στο παράδειγμα αυτό.

4. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0.$

(ii) $x^2y''+x^2y'-y=0.$

5. Να βρεθούν οι λύσεις που ορίζονται για τα μεγάλα $|x|$ για καθεμιά απ'τις διαφορικές εξισώσεις:

(i) $2x^2(x-1)y''+x(5x-3)y'+(x+1)y=0.$

(ii) $x(1+x)y''+(1+5x)y'+3y=0.$

(iii) $x(1-x)y''+(1-4x)y'-2y=0.$

4. ΜΕΡΙΚΕΣ ΚΛΑΣΣΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Το Εδάφιο αυτό είναι αφιερωμένο στη μελέτη των λύσεων μερικών κλασσικών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, οι οποίες εμφανίζονται πολύ συχνά στις Εφαρμογές. Αυτές οι εξισώσεις είναι οι διαφορικές εξισώσεις των Legendre, Chebyshev, Hermite, Laguerre και Bessel. Για την ειδική περίπτωση, όπου η σταθερά που εμφανίζεται στις τέσσερις πρώτες απ'αυτές τις εξισώσεις είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, θα μελετηθούν ιδιαίτερα ορισμένες λύσεις: Τα πολυώνυμα

<u>του Legendre</u> για τις διαφορικές εξισώσεις του Legendre, τα <u>πολυώνυμα του Chebyshev</u> για τις διαφορικές εξισώσεις του Chebyshev, τα <u>πολυώνυμα του Hermite</u> για τις διαφορικές εξισώσεις του Hermite, τα <u>πολυώνυμα του Laguerre</u> για τις διαφορικές εξισώσεις του Laguerre. Επίσης, θα μελετηθούν οι <u>συναρτήσεις του Bessel</u> ως λύσεις των διαφορικών εξισώσεων του Bessel. Τέλος, θα δοθούν μερικά συμπεράσματα για τις απλές ορθογώνιες ακολουθίες πολυωνύμων και θα θιγεί κάπως το θέμα των (γενικευμένων) σειρών Fourier ως προς μια ορθοκανονική ακολουθία συναρτήσεων. Ακόμα, θα προταθούν για λύση μερικές ασκήσεις.

4.1. <u>Διαφορικές εξισώσεις του Legendre. Τα πολυώνυμα του Legendre</u>

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E_1) \qquad (1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0 \quad (p \text{ πραγματική σταθερά})$$

θα λέμε ότι είναι η <u>διαφορική εξίσωση του Legendre τάξης</u> p.

Τα σημεία 1 και -1 είναι δύο κανονικά ανώμαλα σημεία της διαφορικής εξίσωσης (E_1), ενώ όλα τα άλλα σημεία της πραγματικής ευθείας είναι ομαλά σημεία αυτής. Το παρακάτω θεώρημα δίνει δύο γραμμικά ανεξάρτητες δυναμοσειρές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (E_1) γύρω απ' το ομαλό σημείο $x_0=0$ αυτής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. <u>Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Legendre</u> (E_1) <u>είναι</u>:

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-2)\dots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\dots(p+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}, \quad |x|<1$$

<u>και</u>

$$y_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\dots(p+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$|x|<1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαφορική εξίσωση (E_1) είναι της μορφής (E) με $a_2(x)=1-x^2$, $a_1(x)=-2x$ και $a_0(x)=p(p+1)$ για $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=-\frac{2x}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}-2x^{2n+1} \text{ για } |x|<1 \text{ και } \frac{a_0(x)}{a_2(x)}=\frac{p(p+1)}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}p(p+1)x^{2n}$$

$$\text{για } |x|<1.$$

Το σημείο $x_0 = 0$ είναι λοιπόν ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης (E_1) και οι λύσεις αυτής γύρω απ'το x_0 είναι

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ για } |x| < 1,$$

όπου η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1.

Για κάθε x με $|x| < 1$ έχουμε

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \text{ και } y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

και επομένως

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + p(p+1)y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$-2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + (p-n)(p+n+1)c_n]x^n.$$

Έτσι,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (p-n)(p+n+1)c_n = 0 \quad (n = 0,1,\ldots)$$

ή

$$c_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (n = 0,1,\ldots).$$

Απ'τον αναγωγικό αυτό τύπο παίρνουμε για $n = 1,2,\ldots$

$$c_{2n} = -\frac{(p-2n+2)(p+2n-1)}{2n(2n-1)} c_{2(n-1)} \text{ και } c_{2n+1} = -\frac{(p-2n+1)(p+2n)}{(2n+1)2n} c_{2(n-1)+1}$$

απ'όπου προκύπτει εύκολα

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(2n)!} c_0$$

και

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\ldots(p+2n)}{(2n+1)!} c_1$$

για $n=1,2,\dots$. Είναι

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-2)\dots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\dots(p+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}\right]$$

$$+c_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\dots(p+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$$

για $|x|<1$, όπου c_0 και c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για $c_0=1$ και $c_1=0$ προκύπτει η λύση y_1, ενώ για $c_0=0$ και $c_1=1$ παίρνουμε τη λύση y_2. Οι λύσεις y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θ'ασχοληθούμε τώρα ιδιαίτερα με την ειδική περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre τάξης m, όπου m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Η ειδική αυτή περίπτωση παρουσιάζει ιδιάιτερο ενδιαφέρον, γιατί η διαφορική εξίσωση του Legendre τάξης m δέχεται πολυωνυμικές λύσεις βαθμού m. Έχουμε, πιο συγκεκριμένα, το παρακάτω θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4</u>. <u>Ας είναι m ένας μη αρνητικός ακέραιος και ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση του Legendre τάξης</u> m

$$(E_1')\qquad (1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0.$$

(i) <u>Η διαφορική εξίσωση</u> (E_1') <u>έχει την m βαθμού πολυωνυμική λύση</u>

$$y_0(x)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k(2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!}x^{m-2k},\quad x\in\mathbb{R}.$$

<u>Επιπλέον, y είναι μια πολυωνυμική λύση της</u> (E_1') <u>αν και μόνο αν</u> $y=cy_0$ <u>για κάποια σταθερά</u> c.

(ii) <u>Η διαφορική εξίσωση</u> (E_1') <u>έχει τη λύση</u> $\tilde y$ <u>που ορίζεται για</u> $|x|<1$ <u>με τον τύπο</u>

$$\tilde y(x)=\begin{cases} x+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)(m+2)(m+4)\dots(m+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, & \text{για άρτιο } m\\[2ex] 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-2)\dots(m-2n+2)(m+1)(m+3)\dots(m+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}, & \text{για περιττό } m,\end{cases}$$

όπου σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις άρτιου m ή περιττού m η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση $\tilde{y}$ έχει όλους τους συντελεστές της διάφορους απ'το μηδέν.

(iii) Οι λύσεις y_0 και $\tilde{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (στο διάστημα $(-1,1)$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, η διαφορική εξίσωση (E_1') έχει (στο διάστημα $(-1,1)$) τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\tilde{y}$ και y^*, όπου για $|x| < 1$ είναι

$$y^*(x) = \begin{cases} 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{m(m-2)\ldots(m-2n+2)(m+1)(m+3)\ldots(m+2n-1)}{(2n)!} x^{2n}, & \text{για άρτιο } m \\ x+\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)(m+2)(m+4)\ldots(m+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, & \text{για περιττό } m. \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι σε καθεμιά απ'τις δύο περιπτώσεις (άρτιου m ή περιττού m) η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση $\tilde{y}$ έχει όλους τους συντελεστές της μη μηδενικούς.

Ας υποθέσουμε ότι $m > 1$. Τότε για κάθε x με $|x| < 1$ έχουμε

$$y^*(x) = \begin{cases} 1+\sum\limits_{n=1}^{r} (-1)^n \dfrac{2r(2r-2)\ldots(2r-2n+2)(2r+1)(2r+3)\ldots(2r+2n-1)}{(2n)!} x^{2n}, & \text{για } m=2r \\ x+\sum\limits_{n=1}^{r} (-1)^n \dfrac{2r(2r-2)\ldots(2r-2n+2)(2r+3)(2r+5)\ldots(2r+2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+\dfrac{(r!)^2}{(2r)!}\sum\limits_{n=1}^{r} (-1)^n \dfrac{(2r+2n)!}{(r-n)!(r+n)!(2n)!} x^{2n}, & \text{για } m=2r \\ x+\dfrac{(r!)^2}{(2r+1)!}\sum\limits_{n=1}^{r} (-1)^n \dfrac{(2r+2n+1)!}{(r-n)!(r+n)!(2n+1)!} x^{2n+1}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(r!)^2}{(2r)!}\sum\limits_{n=0}^{r} (-1)^n \dfrac{(2r+2n)!}{(r-n)!(r+n)!(2n)!} x^{2n}, & \text{για } m=2r \\ \dfrac{(r!)^2}{(2r+1)!}\sum\limits_{n=0}^{r} (-1)^n \dfrac{(2r+2n+1)!}{(r-n)!(r+n)!(2n+1)!} x^{2n+1}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^r (r!)^2}{(2r)!} \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k \dfrac{(2\cdot 2r-2k)!}{k!(2r-k)!(2r-2k)!} x^{2r-2k}, & \text{για } m=2r \\ \dfrac{(-1)^r (r!)^2}{2(2r+1)!} \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k \dfrac{[2(2r+1)-2k]!}{k![(2r+1)-k]![(2r+1)-2k]!} x^{2r+1-2k}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^r (r!)^2}{(2r)!} \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k \dfrac{(2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!} x^{m-2k}, & \text{για } m=2r \\ \dfrac{(-1)^r (r!)^2}{2(2r+1)!} \sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k \dfrac{(2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!} x^{m-2k}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$= d_m \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{(2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!} x^{m-2k},$$

όπου έχουμε θέσει

$$d_m = \frac{2^m (-1)^{[m/2]} ([m/2]!)^2}{m!} \quad \text{για άρτιο } m,$$

$$d_m = \frac{2^{m-1} (-1)^{[m/2]} ([m/2]!)^2}{m!} \quad \text{για περιττό } m.$$

'Εχουμε λοιπόν αποδείξει ότι, όταν $m > 1$, ισχύει

$$(*) \qquad y^*(x) = d_m y_0(x) \quad \text{για } |x| < 1.$$

Αυτό ισχύει επίσης όταν $m = 0$, αφού στην περίπτωση αυτή είναι $y^*(x) = 1$, $|x| < 1$ και $y_0(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ καθώς και $d_0 = 1$. Επίσης, αμέσως βρίσκουμε ότι για $m = 1$ είναι $y^*(x) = x$, $|x| < 1$ και $y_0(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ και ακόμα $d_1 = 1$, δηλαδή ότι η (*) ισχύει και όταν $m = 1$. 'Αρα, η (*) αληθεύει για οποιοδήποτε m.

Απ'τον τύπο (*) παίρνουμε ότι $y_0(x) = d_m^{-1} y^*(x)$ για $|x| < 1$ και άρα ο περιορισμός της y_0 στο διάστημα $(-1,1)$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E_1'). 'Ετσι, θα είναι $(1-x^2)y_0''(x) - 2xy_0'(x) + m(m+1)y_0(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επειδή, το πρώτο μέλος της ισότητας αυτής είναι πολυώνυμο, η υπόψη ισότητα θα ισχύει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, y_0 είναι μια λύση της εξίσωσης (E_1') σ'ολόκληρη την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$.

Ας είναι τώρα y μια πολυωνυμική λύση της διαφορικής εξίσωσης (E_1'). Τότε υπάρχουν σταθερές $\tilde{c}$ και c^* έτσι ώστε $y = \tilde{c}\tilde{y} + c^* y^*$ στο διάστημα $(-1,1)$. Είναι φανερό ότι θα πρέπει να είναι $\tilde{c}=0$ και έτσι, με τη βοήθεια του τύπου (*), παίρνουμε $y(x)=cy_0(x)$ για $|x|<1$, όπου $c=c^*d_m$. Επειδή y και y_0 είναι πολυώνυμα, θα έχουμε $y(x)=cy_0(x)$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

Ας είναι m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Το πολυώνυμο βαθμού m

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k(2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!}x^{m-2k},\quad x\in\mathbb{R}$$

λέμε ότι είναι το πολυώνυμο του Legendre βαθμού m. Για παράδειγμα, είναι

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\ P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\ \text{για}\ x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι $P_m(-x)=(-1)^mP_m(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και άρα το πολυώνυμο P_m περιέχει ή μόνο άρτιες δυνάμεις του x για άρτιο m ή μόνο περιττές δυνάμεις του x για περιττό m. Όπως θ'αποδείξουμε παρακάτω, είναι

$$P_m(1)=1$$

και έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4, το πολυώνυμο του Legendre βαθμού m είναι η μοναδική πολυωνυμική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Legendre τάξης m που παίρνει την τιμή 1 στο σημείο $x=1$.

Θα δώσουμε, τώρα, μερικά συμπεράσματα για τα πολυώνυμα του Legendre.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m,\quad x\in\mathbb{R}\quad (\text{Τύπος του Rodrigues}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(2m-2k)!}{(m-2k)!}x^{m-2k}=\frac{1}{2^m m!}\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k m!}{k!(m-k)!}\frac{d^m}{dx^m}x^{2m-2k}.$$

Αλλά, αν r είναι ένας ακέραιος με $[m/2]<r\leq m$, τότε $\frac{d^m}{dx^m}x^{2m-2r}=0$. Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k m!}{k!(m-k)!}\frac{d^m}{dx^m}x^{2m-2k}=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(x^2)^{m-k}(-1)^k$$

$$=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m.$$

Τώρα, με τον τύπο του Rodrigues, μπορούμε ν'αποδείξουμε ότι $P_m(1)=1$, όπου m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Πραγματικά· για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}[(x+1)^m(x-1)^m]=\frac{1}{2^m m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{d^k(x+1)^m}{dx^k}\cdot\frac{d^{m-k}(x-1)^m}{dx^{m-k}}$$

$$=\frac{1}{2^m m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{m!}{(m-k)!}(x+1)^{m-k}\frac{m!}{k!}(x-1)^k=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2(x+1)^{m-k}(x-1)^k$$

$$=\frac{1}{2^m}\left[(x+1)^m+(x-1)\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}^2(x+1)^{m-k}(x-1)^{k-1}\right]$$

απ'όπου προκύπτει αμέσως ότι $P_m(1)=\frac{1}{2^m}(1+1)^m=1$. Υποθέσαμε στα παραπάνω ότι $m>0$. Για $m=0$ είναι $P_0(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2</u>. <u>Για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους</u> m <u>και</u> n <u>με</u> $m\neq n$ <u>ισχύει</u>

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το πολυώνυμο P_m πληροί τη διαφορική εξίσωση του Legendre τάξης m, δηλαδή για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0$$

ή ισοδύναμα

$$[(1-x^2)P_m'(x)]'+m(m+1)P_m(x)=0.$$

Όμοια, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$[(1-x^2)P_n'(x)]'+n(n+1)P_n(x)=0.$$

Έτσι, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$P_n(x)[(1-x^2)P_m'(x)]'-P_m(x)[(1-x^2)P_n'(x)]'+[m(m+1)-n(n+1)]P_m(x)P_n(x)=0$$

ή

$$\{(1-x^2)[P_m'(x)P_n(x)-P_m(x)P_n'(x)]\}'+(m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x)=0.$$

Με ολοκλήρωση από -1 μέχρι 1, παίρνουμε

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0,$$

απ'όπου προκύπτει ό τύπος μας, αφού $m \neq n$.

Ας είναι I ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις f και g, ορισμένες στο I, καλούνται <u>ορθογώνιες</u> <u>στο</u> I αν και μόνο αν

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Επίσης, μια ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $(f_m)_{m\geq 0}$, ορισμένων στο I, θα λέγεται <u>ορθογώνια</u> <u>στο</u> I όταν και μόνο όταν, για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m και n με $m \neq n$, οι συναρτήσεις f_m και f_n είναι ορθογώνιες στο I. Σύμφωνα με την Πρόταση 2, έχουμε:

<u>Η ακολουθία</u> $(P_m)_{m\geq 0}$ <u>των πολυωνύμων του Legendre είναι ορθογώνια στο διάστημα</u> [-1,1].

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 3</u>. <u>Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο</u> m <u>ισχύει</u>

$$\int_{-1}^{1} [P_m(x)]^2 dx = \frac{2}{2m+1}\ .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $m = 0$, τότε είναι προφανές, αφού $P_0(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m \geq 1$. Θέτουμε $f(x) = (x^2-1)^m$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$I \equiv \int_{-1}^{1} [f^{(m)}(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} f^{(m)}(x) f^{(m)}(x)\,dx$$

$$= f^{(m)}(x) f^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(m+1)}(x) f^{(m-1)}(x)\,dx.$$

Αλλά, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$f^{(m)}(x) f^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

και έτσι έχουμε

$$I = -\int_{-1}^{1} f^{(m+1)}(x) f^{(m-1)}(x)\,dx.$$

Συνεχίζοντας μ'αυτό τον τρόπο, τελικά βρίσκουμε ότι

$$I = (-1)^m \int_{-1}^{1} f^{(2m)}(x) f(x)\,dx.$$

Επειδή, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, είναι

$$f^{(2m)}(x) = (2m)!,\ x \in \mathbb{R},$$

έχουμε

$$I = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^m dx = 2(2m)! \int_0^1 (1-x^2)^m dx.$$

Η αντικατάσταση $x = \cos t$ οδηγεί στη σχέση

$$\int_0^1 (1-x^2)^m dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} t\, dt.$$

Έτσι, με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης (που μπορεί εύκολα ν'αποδειχθεί)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} t\, dt = \frac{2m(2m-2)\ldots 2}{(2m+1)(2m-1)\ldots 3\cdot 1},$$

παίρνουμε

$$I = \frac{2\cdot 2^{2m}(m!)^2}{2m+1}.$$

Επομένως, η Πρόταση 1 δίνει

$$\int_{-1}^{1} [P_m(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} \int_{-1}^{1} [f^{(m)}(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\, I = \frac{2}{2m+1}.$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 4</u>. <u>Για κάθε ακέραιο</u> $m \geq 1$ <u>ισχύει</u>

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

(*) $$P'_{m+1}(x) = xP'_m(x) + (m+1)P_m(x)$$

και

(**) $$P'_{m+1}(x) = (2m+1)P_m(x) + P'_{m-1}(x).$$

Πραγματικά· με τη βοήθεια του τύπου του Rodrigues (Πρόταση 1), για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$P_{m+1}(x) = \frac{1}{2^{m+1}(m+1)!} \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{d}{dx}(x^2-1)^{m+1}\right] = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m}[x(x^2-1)^m]$$

και άρα

$$P'_{m+1}(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x(x^2-1)^m].$$

Τώρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P'_{m+1}(x) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{d^k x}{dx^k} \cdot \frac{d^{m+1-k}}{dx^{m+1-k}} (x^2-1)^m$$

$$= \frac{1}{2^m m!}\, x\, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} (x^2-1)^m + (m+1) \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m$$

$$= x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m\right] + (m+1) \left[\frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m\right]$$

$$= x\, P'_m(x) + (m+1) P_m(x)$$

και

$$P'_{m+1}(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} \left\{\frac{d}{dx} [x(x^2-1)^m]\right\}$$

$$= \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2-1)^m + 2mx^2(x^2-1)^{m-1}]$$

$$= \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(2m+1)(x^2-1)^m + 2m(x^2-1)^{m-1}]$$

$$= (2m+1) \left[\frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m\right] + \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2-1)^{m-1}\right]$$

$$= (2m+1) P_m(x) + P'_{m-1}(x).$$

Έχουν λοιπόν αποδειχθεί οι τύποι (*) και (**). Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (*) με $2m+1$ και τα δύο μέλη της (**) με m και αφαιρώντας τις ισότητες που προκύπτουν κατά μέλη, βρίσκουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(m+1) P'_{m+1}(x) = (2m+1) P_m(x) + (2m+1) x P'_m(x) - m P'_{m-1}(x)$$
$$= (2m+1) [x P_m(x)]' - m P'_{m-1}(x).$$

Έτσι, για τυχόν $x \in \mathbb{R}$ ολοκληρώνουμε από 1 μέχρι x και παίρνουμε

$$(m+1)[P_{m+1}(x) - P_{m+1}(1)] = (2m+1)[x P_m(x) - P_m(1)] - m[P_{m-1}(x) - P_{m-1}(1)],$$

απ'όπου προκύπτει ο τύπος μας, αφού $P_{m+1}(1) = P_m(1) = P_{m-1}(1) = 1$.

4.2. Διαφορικές εξισώσεις του Chebyshev. Τα πολυώνυμα του Chebyshev

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E_2) \qquad (1-x^2)y''-xy'+p^2y=0 \quad (p \geq 0 \text{ σταθερά})$$

θα λέμε ότι είναι η διαφορική εξίσωση του Chebyshev τάξης p.

Τα σημεία 1 και −1 είναι κανονικά ανώμαλα σημεία της (E_2), ενώ όλα τα άλλα σημεία είναι ομαλά. Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης (E_2) και το παρακάτω Θεώρημα δίνει τις (δυναμοσειρές) λύσεις αυτής γύρω απ'το σημείο αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Chebyshev (E_2) είναι:

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p^2(p^2-2^2)\ldots[p^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}x^{2n}, \quad |x|<1$$

και

$$y_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots[p^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad |x|<1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σημείο $x_0=0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης (E_2) και οι λύσεις αυτής γύρω απ'το σημείο αυτό είναι

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad \text{για } |x|<1,$$

όπου η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1. Για κάθε x με $|x|<1$ έχουμε

$$\begin{aligned}(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+p^2y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}\\ &\quad -x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+p^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2}+(p^2-n^2)c_n]x^n.\end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε

$$c_{n+2}=-\frac{p^2-n^2}{(n+2)(n+1)}c_n \quad (n=0,1,\ldots),$$

απ'όπου βρίσκουμε για $n=1,2,\ldots$

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{p^2(p^2-2^2)\ldots[p^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} c_0$$

και

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots[p^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!} c_1.$$

Άρα, για κάθε x με $|x| < 1$ είναι

$$y(x) = \left(c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}x^{2n}\right) + \left(c_1x+\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}\right)$$

$$= c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p^2(p^2-2^2)\ldots[p^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} x^{2n}\right]+$$

$$+c_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots[p^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right],$$

όπου c_0 και c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για $c_0 = 1$ και $c_1 = 0$ έχουμε τη λύση y_1, ενώ για $c_1 = 0$ και $c_2 = 1$ προκύπτει η λύση y_2. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για την ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση όπου η σταθερά που εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση του Chebyshev (E_2) είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6</u>. <u>Ας είναι</u> m <u>ένας μη αρνητικός ακέραιος και ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση του Chebyshev τάξης</u> m

$$(E_2') \qquad (1-x^2)y''-xy'+m^2y = 0.$$

(i) <u>Η διαφορική εξίσωση</u> (E_2') <u>έχει την</u> m <u>βαθμού πολυωνυμική λύση</u>

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{(2k)!(m-2k)!} (1-x^2)^k x^{m-2k},\ x \in \mathbb{R}.$$

<u>Επιπλέον,</u> y <u>είναι μια πολυωνυμική λύση της</u> (E_2') <u>αν και μόνο αν</u> $y = cy_0$ <u>για κάποια σταθερά</u> c.

(ii) <u>Η διαφορική εξίσωση</u> (E_2') <u>έχει τη λύση</u> $\tilde{y}$ <u>που ορίζεται για</u> $|x| < 1$ <u>με τον τύπο</u>

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, & \text{για άρτιο } m \\[2ex] 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{m^2(m^2-2^2)\ldots[m^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}\, x^{2n}, & \text{για περιττό } m, \end{cases}$$

όπου σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις άρτιου m ή περιττού m η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση $\tilde{y}$ έχει όλους τους συντελεστές της διάφορους απ'το μηδέν.

(iii) Οι λύσεις y_0 και $\tilde{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες (στο διάστημα $(-1,1)$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απ'το Θεώρημα 5 προκύπτει ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (E_2') (στο διάστημα $(-1,1)$) είναι οι $\tilde{y}$ και y^*, όπου για $|x| < 1$ είναι

$$y^*(x) = \begin{cases} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{m^2(m^2-2^2)\ldots[m^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}\, x^{2n}, & \text{για άρτιο } m \\[2ex] x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots[m^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, & \text{για περιττό } m. \end{cases}$$

Η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση $\tilde{y}$ έχει, όπως είναι φανερό, όλους τους συντελεστές της διάφορους απ'το μηδέν. Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις άρτιου m ή περιττού m, η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση y^* "τερματίζει" έτσι ώστε y^* να είναι μια πολυωνυμική λύση βαθμού m της διαφορικής εξίσωσης (E_2') στο διάστημα $(-1,1)$.

Τώρα, εκτελούμε τον μετασχηματισμό $x = \cos\vartheta$ για $|x| < 1$. Είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dy}{d\vartheta} \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\frac{dy}{d\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d^2y}{d\vartheta^2},$$

οπότε η διαφορική εξίσωση (E_2') μετασχηματίζεται στην

$$(E_2')^* \qquad \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + m^2 y = 0,$$

της οποίας όλες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο $y = d_1\cos m\vartheta + d_2\sin m\vartheta$ για $m > 0$, όπου d_1 και d_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Για κάθε ϑ ισχύει

$$(*)\qquad \cos m\vartheta = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{(2k)!\,(m-2k)!}\,(1-\cos^2\vartheta)^k(\cos\vartheta)^{m-2k}.$$

Πραγματικά· σύμφωνα με τον τύπο του De Moivre, είναι

$$\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^m = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!\,(m-r)!}\,(\cos\vartheta)^{m-r}(i\sin\vartheta)^r.$$

Οι πραγματικοί όροι στο άθροισμα του δεξιού μέλους της παραπάνω ισότητας λαμβάνονται ακριβώς για $r=2k$, όπου $k=0,1,\dots,[m/2]$. Έτσι, είναι

$$\cos m\vartheta = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{(2k)!\,(m-2k)!}\,(\cos\vartheta)^{m-2k}(-1)^k(\sin\vartheta)^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{(2k)!\,(m-2k)!}\,(1-\cos^2\vartheta)^k(\cos\vartheta)^{m-2k}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, σύμφωνα με τον τύπο (*), ισχύει

$$y_0(\cos\vartheta) = \cos m\vartheta \quad \text{για όλα τα } \vartheta.$$

Έτσι η συνάρτηση $y_0(\cos\vartheta)$, $\vartheta\in(0,\pi)$ είναι μια λύση της εξίσωσης $(E_2')^*$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση y_0 είναι μια λύση της (E_2') στο διάστημα $(-1,1)$. Άρα, η πολυωνυμική συνάρτηση y_0 είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E_2') σ' ολόκληρη την πραγματική ευθεία.

Τέλος, παρατηρούμε ότι $y_0=\lambda y^*$ στο διάστημα $(-1,1)$, όπου $\lambda\neq 0$ είναι μια σταθερά. Έτσι, οι λύσεις y_0 και $\tilde{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $(-1,1)$. Ακόμα, για τυχούσα πολυωνυμική λύση y της εξίσωσης (E_2'), έχουμε $y=\mu y^*$ στο $(-1,1)$ για κάποια σταθερά μ και άρα $y=cy_0$ στο διάστημα $(-1,1)$ (και άρα και σ' ολόκληρη την πραγματική ευθεία), όπου $c=\mu/\lambda$.

Ας θεωρήσουμε ένα <u>μη αρνητικό ακέραιο</u> m. Θα λέμε ότι το πολυώνυμο βαθμού m

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{(2k)!\,(m-2k)!}\,(1-x^2)^k x^{m-2k},\quad x\in\mathbb{R}$$

είναι το <u>πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού</u> m. Εύκολα βρίσκουμε

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x \text{ και } T_2(x)=2x^2-1 \text{ για } x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο T_m περιέχει ή μόνο άρτιες δυνάμεις του x για άρτιο m ή μόνο περιττές δυνάμεις του x για περιττό m. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$T_m(1) = 1$$

και έτσι το Θεώρημα 6 εξασφαλίζει ότι: <u>Το πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού m είναι η μοναδική πολυωνυμική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Chebyshev τάξης m που παίρνει την τιμή 1 στο σημείο x = 1.</u>

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 5</u>. <u>Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι</u>

$$T_m(x) = \cos(m\,\mathrm{Arcos}\, x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε ϑ έχουμε

$$T_m(\cos\vartheta) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{(2k)!\,(m-2k)!} (\sin\vartheta)^{2k} (\cos\vartheta)^{m-2k}$$

$$= \mathrm{Re}\left[\sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!\,(m-r)!} (i\sin\vartheta)^r (\cos\vartheta)^{m-r}\right] = \mathrm{Re}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^m$$

$$= \mathrm{Re}(\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta) = \cos m\vartheta\,,$$

απ'όπου προκύπτει ο τύπος μας.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 6</u>. <u>Για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m και n με</u> $m \neq n$ <u>ισχύει</u>

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} T_m(x)\, T_n(x)\, dx = 0.$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 7</u>. <u>Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m ισχύει</u>

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} [T_m(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi/2, & \underline{\text{αν}}\ m > 0 \\ \pi, & \underline{\text{αν}}\ m = 0. \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ 6 ΚΑΙ 7. Με την αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\vartheta$, παίρνουμε

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} T_m(x)\, T_n(x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin\vartheta} T_m(\cos\vartheta)\, T_n(\cos\vartheta)\, (-\sin\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos m\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(m+n)\vartheta\, d\vartheta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(m-n)\vartheta\, d\vartheta,$$

απ'όπου προκύπτουν αμέσως τα συμπεράσματα των Προτάσεων 6 και 7.

Ας είναι I ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, και w μια θετική και συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (a,b). Δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις f και g, ορισμένες στο I, θα καλούνται <u>ορθογώνιες στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους</u> w αν και μόνο αν

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Επίσης, μια ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $(f_m)_{m\geq 0}$, ορισμένων στο διάστημα I, καλείται <u>ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους</u> w στην περίπτωση όπου, για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς ακεραίους m και n με $m \neq n$, οι συναρτήσεις f_m και f_n είναι ορθογώνιες στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w. Έτσι, η Πρόταση 6 εξασφαλίζει ότι:

<u>Η ακολουθία $(T_m)_{m\geq 0}$ των πολυωνύμων του Chebyshev είναι ορθογώνια στο [-1,1] ως προς τη συνάρτηση βάρους</u> $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $x \in (-1,1)$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 8</u>. <u>Για κάθε ακέραιο</u> $m \geq 1$ <u>ισχύει</u>

$$T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε ϑ είναι

$$T_{m+1}(\cos\vartheta) + T_{m-1}(\cos\vartheta) = \cos(m+1)\vartheta + \cos(m-1)\vartheta = 2\cos\vartheta\cos m\vartheta =$$
$$= 2\cos\vartheta\, T_m(\cos\vartheta),$$

απ'όπου προκύπτει ο τύπος μας.

<u>4.3. Διαφορικές εξισώσεις του Hermite. Τα πολυώνυμα του Hermite.</u>

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

(E_3) $\quad y''-2xy'+2py=0$ (p πραγματική σταθερά)

λέμε ότι είναι η <u>διαφορική εξίσωση του Hermite τάξης</u> p. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_3) δίνονται στο παρακάτω Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 7</u>. <u>Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Hermite</u> (E_3) <u>είναι</u>:

$$y_1(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n p(p-2)\dots(p-2n+2)}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$y_2(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n (p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R};$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σημείο $x_0 = 0$ είναι ένα ομαλό σημείο της διαφορικής εξίσωσης (E_3) και οι λύσεις αυτής ορίζονται σ'ολόκληρη την πραγματική ευθεία και είναι της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$y''(x)-2xy'(x)+2py(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2}+2(p-n)c_n]x^n$$

και έτσι παίρνουμε τον αναγωγικό τύπο

$$c_{n+2} = -\frac{2(p-n)}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (n=0,1,\dots).$$

'Αρα, για $n = 1,2,\dots$ είναι

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{2^n p(p-2)\dots(p-2n+2)}{(2n)!} c_0$$

και

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{2^n (p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)}{(2n+1)!} c_1 .$$

'Ετσι, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}x^{2n}\right)+\left(c_1+\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}\right) \\ &= c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n p(p-2)\dots(p-2n+2)}{(2n)!} x^{2n}\right]+ \\ &\quad +c_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n (p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right], \end{aligned}$$

όπου c_0 και c_1 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για $c_0 = 1$ και $c_1 = 0$ προκύπτει η λύση y_1, ενώ για $c_0 = 0$ και $c_1 = 1$ παίρνεται η λύση y_2. Οι λύσεις αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για την ειδική περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης m, όπου m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Ας είναι m ένας μη αρνητικός ακέραιος και ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση του Hermite τάξης m

$$(E_3') \qquad y''-2xy'+2my=0.$$

(i) Η διαφορική εξίσωση (E_3') έχει την m βαθμού πολυωνυμική λύση

$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!}(2x)^{m-2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, y είναι μια πολυωνυμική λύση της (E_3') αν και μόνο αν $y = cy_0$ για κάποια σταθερά c.

(ii) Η διαφορική εξίσωση (E_3') έχει τη λύση $\tilde{y}$ που ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με τον τύπο

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, & \text{για άρτιο } m \\[2ex] 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n m(m-2)\dots(m-2n+2)}{(2n)!}x^{2n+1}, & \text{για περιττό } m, \end{cases}$$

όπου σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις άρτιου m ή περιττού m η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση $\tilde{y}$ έχει όλους τους συντελεστές της μη μηδενικούς.

(iii) Οι λύσεις y_0 και $\tilde{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαφορική εξίσωση (E_3') έχει (Θεώρημα 7) τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\tilde{y}$ και y^*, όπου για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$y^*(x) = \begin{cases} 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n m(m-2)\dots(m-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}, & \text{για άρτιο } m \\[2ex] x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^n(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, & \text{για περιττό } m. \end{cases}$$

Σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις άρτιου m ή περιττού m είναι φανερό ότι η δυναμοσειρά που ορίζει τη λύση $\tilde{y}$ έχει μόνο μη μηδενικούς συντελεστές.

Αν $m=0$, τότε $y^*=y_0=1$, ενώ για $m=1$ είναι $y^*(x)=x=\frac{1}{2}y_0(x)$ για $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m>1$ και, για τυχόν $x \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$y^*(x)=\begin{cases} 1+\sum_{n=1}^{r}(-1)^n \dfrac{2^n(2r)(2r-2)\dots(2r-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}, & \text{για } m=2r \\[2ex] x+\sum_{n=1}^{r}(-1)^n \dfrac{2^n(2r)(2r-2)\dots(2r-2n+2)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1+\sum_{n=1}^{r}(-1)^n \dfrac{r!}{(r-n)!(2n)!}(2x)^{2n}, & \text{για } m=2r \\[2ex] x+\sum_{n=1}^{r}(-1)^n \dfrac{r!}{2(r-n)!(2n+1)!}(2x)^{2n+1}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1+\dfrac{(-1)^r r!}{(2r)!}\sum_{k=0}^{r-1}\dfrac{(-1)^k(2r)!}{k!(2r-2k)!}(2x)^{2r-2k}, & \text{για } m=2r \\[2ex] x+\dfrac{(-1)^r r!}{2(2r+1)!}\sum_{k=0}^{r-1}\dfrac{(-1)^k(2r+1)!}{k!(2r+1-2k)!}(2x)^{2r+1-2k}, & \text{για } m=2r+1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(-1)^r r!}{(2r)!}\sum_{k=0}^{r}\dfrac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!}(2x)^{m-2k}, & \text{για } m=2r \\[2ex] \dfrac{(-1)^r r!}{2(2r+1)!}\sum_{k=0}^{r}\dfrac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!}(2x)^{m-2k}, & \text{για } m=2r \end{cases}$$

$$= d_m \sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!}(2x)^{m-2k} = d_m y_0(x),$$

όπου έχουμε θέσει

$$d_m=\frac{(-1)^r r!}{m!} \text{ για } m=2r \text{ και } d_m=\frac{(-1)^r r!}{2m!} \text{ για } m=2r+1.$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει ότι $y^*=d_m y_0$, όταν $m>1$. Το ίδιο όμως ισχύει και στις περιπτώσεις $m=0$ και $m=1$. Άρα, $y_0=d_m^{-1}y^*$ που σημαίνει ότι y_0 είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E_3'). Επίσης, για τυχούσα πολυωνυμική λύση y της (E_3') θα είναι $y=c^*y^*$ για κάποια σταθερά c^* και επομένως $y=cy_0$, όπου $c=c^*d_m$. Τέλος, οι λύσεις y_0 και $\tilde{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ας είναι m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε το πολυώνυμο βαθμού m

$$H_m(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!} (2x)^{m-2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

λέμε ότι είναι το <u>πολυώνυμο</u> <u>του</u> <u>Hermite</u> <u>βαθμού</u> m. Για παράδειγμα, είναι

$$H_0(x) = 1, \; H_1(x) = 2x, \; H_2(x) = 4x^2-2 \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Το πολυώνυμο H_m περιέχει ή μόνο άρτιες δυνάμεις του x για άρτιο m ή μόνο περιττές δυνάμεις του x για περιττό m. Επίσης, ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του H_m είναι ίσος με 2^m και επομένως, λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 8, καταλήγουμε αμέσως στο **συμπέρασμα**: <u>Το πολυώνυμο του Hermite βαθμού m είναι η μοναδική πολυωνυμική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης m που έχει το 2^m ως συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου</u>.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 9</u>. <u>Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι</u>

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{Τύπος του Rodrigues}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} w^{(m+2)}(x) &= (-2x\, e^{-x^2})^{(m+1)} = -2x(e^{-x^2})^{(m+1)} - 2(m+1)(e^{-x^2})^{(m)} \\ &= -2x\, w^{(m+1)}(x) - 2(m+1)w^{(m)}(x), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$w^{(m+2)}(x) + 2x\, w^{(m+1)}(x) + 2(m+1)w^{(m)}(x) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε τώρα

$$Q_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και παρατηρούμε ότι Q_m είναι ένα πολυώνυμο. Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= (-1)^m e^{x^2} w^{(m)}(x), \\ Q_m'(x) &= (-1)^m e^{x^2} [w^{(m+1)}(x) + 2x\, w^{(m)}(x)], \\ Q_m''(x) &= (-1)^m e^{x^2} [w^{(m+2)}(x) + 4x\, w^{(m+1)}(x) + (4x^2+2)w^{(m)}(x)] \end{aligned}$$

και έτσι

$$Q_m''(x) - 2xQ_m'(x) + 2mQ_m(x) = (-1)^m e^{x^2} [w^{(m+2)}(x) + 2xw^{(m+1)}(x) + 2(m+1)w^{(m)}(x)] = 0.$$

Δηλαδή, Q_m είναι μια πολυωνυμική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης m. Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του Q_m είναι 2^m, θα έχουμε αναγκαστικά $Q_m = H_m$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Η ακολουθία $(H_m)_{m\geq 0}$ των πολυωνύμων του Hermite είναι ορθογώνια στο $(-\infty,\infty)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m και n με $m \neq n$ είναι</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\,dx = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το πολυώνυμο H_m είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης m, δηλαδή για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$[e^{-x^2} H_m'(x)]' = e^{-x^2}[H_m''(x) - 2xH_m(x)]$$

και επομένως

$$[e^{-x^2} H_m'(x)]' = -2m\, e^{-x^2} H_m(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ανάλογα έχουμε

$$[e^{-x^2} H_n'(x)]' = -2n\, e^{-x^2} H_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες με $H_n(x)$ και $H_m(x)$ αντίστοιχα και αφαιρώντας στη συνέχεια κατά μέλη, παίρνουμε

$$\{e^{-x^2}[H_m'(x)H_n(x) - H_m(x)H_n'(x)]\}' = -2(m-n)e^{-x^2}H_m(x)H_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, έχουμε

$$-2(m-n)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)\,dx = \left\{e^{-x^2}[H_m'(x)H_n(x) - H_m(x)H_n'(x)]\right\}_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

αφού για κάθε πολυώνυμο Q είναι

$$\lim_{|x|\to\infty} e^{-x^2} Q(x) = 0.$$

Επειδή $m \neq n$, έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\,dx = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_m(x)]^2 dx = 2^m m!\sqrt{\pi}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$C_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_m(x)]^2 dx$$

και θα δείξουμε επαγωγικά ότι $C_m = 2^m m!\sqrt{\pi}$. Είναι

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο k είναι

$$C_k = 2^k k!\sqrt{\pi}.$$

Το πολυώνυμο H_{k+1} είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης k+1. Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι

$$[e^{-x^2}H'_{k+1}(x)]' = -2(k+1)e^{-x^2}H_{k+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

και επομένως

$$-2(k+1)C_{k+1} = -2(k+1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_{k+1}(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}[e^{-x^2}H'_{k+1}(x)]'H_{k+1}(x)dx$$

$$= \Big[e^{-x^2}H'_{k+1}(x)H_{k+1}(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H'_{k+1}(x)]^2 dx.$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H'_{k+1}(x)]^2 dx.$$

Αλλά, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$H'_{k+1}(x) = \left[\sum_{r=0}^{[(k+1)/2]} \frac{(-1)^r (k+1)!}{r!(k+1-2r)!}(2x)^{k+1-2r}\right]'$$

$$= 2(k+1)\sum_{r=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^r k!}{r!(k-2r)!}(2x)^{k-2r} = 2(k+1)H_k(x).$$

Άρα

$$-2(k+1)C_{k+1} = -4(k+1)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_k(x)]^2 = -4(k+1)^2 C_k$$

και επομένως

$$C_{k+1} = 2(k+1)C_k = 2(k+1)2^k k!\sqrt{\pi} = 2^{k+1}(k+1)!\sqrt{\pi}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 12. Για κάθε ακέραιο $m \geq 1$ ισχύει

$$H_{m+1}(x) = 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με τη βοήθεια της Πρότασης 9, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$H_{m+1}(x) = (-1)^{m+1} e^{x^2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} e^{-x^2} = (-1)^{m+1} e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(-2x\, e^{-x^2})$$

$$= (-1)^{m+1} e^{x^2}\left(-2x \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2} - 2m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2}\right)$$

$$= 2x\left[(-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}\right] - 2m\left[(-1)^{m-1} e^{x^2} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2}\right]$$

$$= 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x).$$

4.4. Διαφορικές εξισώσεις του Laguerre. Τα πολυώνυμα του Laguerre

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

(E_4) $\quad xy'' + (1-x)y' + py = 0$ (p πραγματική σταθερά)

θα λέμε ότι είναι η διαφορική εξίσωση του Laguerre τάξης p.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. Μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laguerre (E_4) είναι

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(n!)^2} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μια άλλη λύση αυτής, γραμμικά ανεξάρτητη με την y_1, είναι της μορφής

$$y_2(x) = y_1(x)\log|x| + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \neq 0$$

με $d_0 = 0$. Ειδικά, στην περίπτωση που $p = m$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο m, είναι

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k m!}{(k!)^2(m-k)!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>και, ακόμα, οι πολυωνυμικές λύσεις της</u> (E_4) <u>είναι ακριβώς οι</u> cy_1 <u>για τις διάφορες τιμές της σταθεράς</u> c.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαφορική εξίσωση (E_4) είναι της μορφής (E) με $a_2(x)=x$, $a_1(x)=1-x$ και $a_0(x)=p$ για $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$xa_1(x)=a_2(x)A_1(x) \text{ και } x^2a_0(x)=a_2(x)A_0(x) \text{ για } x\in\mathbb{R},$$

όπου $A_1(x)=1-x$, $x\in\mathbb{R}$ και $A_0(x)=px$, $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, x_0 είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της (E_4) και η ενδεικτική εξίσωση της (E_4) στο $x_0=0$ είναι $\lambda^2=0$ με ρίζες $\lambda_1=\lambda_2=0$. Άρα, η εξίσωση (E_4) έχει δύο λύσεις

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \text{ για } x\in\mathbb{R}, \text{ με } c_0=1$$

και

$$y_2(x)=y_1(x)\log|x|+\sum_{n=0}^{\infty} d_nx^n \text{ για } x\neq 0, \text{ με } d_0=0,$$

οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες (σε καθένα απ'τα διαστήματα $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$). Εύκολα βρίσκουμε

$$(n+1)^2c_{n+1}=-(p-n)c_n \quad (n=0,1,\ldots),$$

απ'όπου προκύπτει

$$c_n=(-1)^n\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(n!)^2} \quad (n=1,2,\ldots),$$

αφού $c_0=1$. Άρα, είναι

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{(n!)^2}x^n, \; x\in\mathbb{R}.$$

Στην ειδική περίπτωση, όπου $p=m$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο m, αμέσως βρίσκουμε ότι

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k m!}{(k!)^2(m-k)!}x^k, \; x\in\mathbb{R}$$

και παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή οι πολυωνυμικές λύσεις της (E_4) θα είναι της μορφής cy_1, όπου c είναι μια σταθερά.

Ας θεωρήσουμε ένα <u>μη αρνητικό ακέραιο</u> m. Το m βαθμού πολυώνυμο

$$L_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k m!}{(k!)^2(m-k)!}x^k, \; x\in\mathbb{R}$$

θα λέμε ότι είναι το πολυώνυμο του Laguerre βαθμού m. Αμέσως μπορούμε, για παράδειγμα, να βρούμε $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1-x$, $L_2(x) = 1-2x-\frac{1}{2}x^2$ για $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του L_m είναι $(-1)^m/m!$ και, σύμφωνα με το Θεώρημα 9, έχουμε: Το πολυώνυμο του Laguerre βαθμού m είναι η μοναδική πολυωνυμική λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laguerre τάξης m που έχει συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου τον $(-1)^m/m!$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$L_m(x) = \frac{1}{m!} e^x \frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(Τύπος του Rodrigues)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$L_m(x) = \frac{1}{m!} e^x \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}\left(\frac{m!}{k!} x^k\right)[(-1)^k e^{-x}]$$

$$= \frac{1}{m!} e^x \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{d^{m-k}(x^m)}{dx^{m-k}} \cdot \frac{d^k(e^{-x})}{dx^k} = \frac{1}{m!} e^x \frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x}).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 14. Η ακολουθία $(L_m)_{m \geq 0}$ των πολυωνύμων του Laguerre είναι ορθογώνια στο $[0,\infty)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x}$, $x \in (0,\infty)$, δηλαδή για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m και n με $m \neq n$ ισχύει

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το πολυώνυμο L_m είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laguerre τάξης m και επομένως

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0, \quad x \geq 0.$$

Απ'τη σχέση αυτή προκύπτει εύκολα ότι

$$[xe^{-x}L_m'(x)]' = -me^{-x}L_m(x), \quad x \geq 0.$$

Όμοια, είναι

$$[xe^{-x}L_n'(x)]' = -ne^{-x}L_n(x), \quad x \geq 0.$$

Έτσι, για κάθε $x \geq 0$ παίρνουμε

$$-(m-n)e^{-x}L_m(x)L_n(x) = [xe^{-x}L_m'(x)]'L_n(x) - [xe^{-x}L_n'(x)]'L_m(x)$$

$$= \{xe^{-x}[L_m'(x)L_n(x)-L_m(x)L_n'(x)]\}'$$

και επομένως

$$-(m-n)\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx = \left\{xe^{-x}[L_m'(x)L_n(x)-L_m(x)L_n'(x)]\right\}_0^{\infty} = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 15. Για κάθε ακέραιο $m \geq 1$ ισχύει

$$(m+1)L_{m+1}(x) = (2m+1-x)L_m(x)-mL_{m-1}(x)\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ παίρνουμε

$$(m+1)L_{m+1}(x)=\frac{1}{m!}e^x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^{m+1}e^{-x})=\frac{1}{m!}e^x\frac{d^m}{dx^m}[(m+1)x^me^{-x}-x^{m+1}e^{-x}]$$

$$=\frac{1}{m!}(m+1)e^x\frac{d^m}{dx^m}(x^me^{-x})-\frac{1}{m!}e^x\frac{d^m}{dx^m}(x^{m+1}e^{-x})$$

$$=(m+1)L_m(x)-\frac{1}{m!}e^x\frac{d^m}{dx^m}[x(x^me^{-x})]$$

$$=(m+1)L_m(x)-\frac{1}{m!}e^x\left[x\frac{d^m}{dx^m}(x^me^{-x})+m\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^me^{-x})\right]$$

$$=(m+1)L_m(x)-xL_m(x)-\frac{1}{(m-1)!}e^x\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^me^{-x})$$

και

$$L_m(x)=\frac{1}{m!}e^x\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(mx^{m-1}e^{-x}-x^me^{-x})$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}e^x\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^{m-1}e^{-x})-\frac{1}{m!}e^x\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^me^{-x})$$

$$=L_{m-1}(x)-\frac{1}{m!}e^x\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^me^{-x})$$

και επομένως

$$(m+1)L_{m+1}(x) = (m+1)L_m(x)-xL_m(x)+m[L_m(x)-L_{m-1}(x)]$$

$$= (2m+1-x)L_m(x)-mL_{m-1}(x).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 16. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m ισχύει

$$\int_0^{\infty} e^{-x}[L_m(x)]^2dx = 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα ακέραιο $n \geq 1$. Τότε η Πρόταση 15 δίνει

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)L_n(x) - xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

και

$$xL_{n+1}(x) = (2n+3)L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x) - (n+2)L_{n+2}(x)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και το συμπέρασμα της Πρότασης 14, παίρνουμε

$$(n+1)\int_0^\infty e^{-x}[L_{n+1}(x)]^2dx = \int_0^\infty e^{-x}[(2n+1)L_n(x) - xL_n(x) - nL_{n-1}(x)]L_{n+1}(x)dx$$

$$= -\int_0^\infty e^{-x}xL_n(x)L_{n+1}(x)dx$$

$$= -\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)[(2n+3)L_{n+1}(x) - (n+1)L_n(x) - $$

$$- (n+2)L_{n+2}(x)]dx$$

$$= (n+1)\int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2dx.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_{n+1}(x)]^2dx = \int_0^\infty e^{-x}[L_n(x)]^2dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Αλλά είναι

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_0(x)]^2dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

και

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_1(x)]^2dx = \int_0^\infty e^{-x}(1-x)^2dx = 1.$$

Άρα έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-x}[L_m(x)]^2dx = 1 \quad (m = 0,1,\ldots).$$

4.5. Διαφορικές εξισώσεις του Bessel. Οι συναρτήσεις του Bessel

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(E_5) \qquad x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y = 0 \quad (p \geq 0 \text{ σταθερά})$$

λέμε ότι είναι η <u>διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης</u> p. Το σημείο $x_0 = 0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της εξίσωσης αυτής. Πρίν προχωρήσουμε στο να δώσουμε τις εκφράσεις των δυναμοσειρών λύσεων γύρω απ'το $x_0 = 0$ για τη διαφορική εξίσωση (E_5), θα ορίσουμε τη γάμμα συνάρτηση.

Για κάθε $s > 0$ θέτουμε

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Επίσης, για τυχόν $s < 0$ με $s \neq -1,-2,\ldots$ ορίζουμε

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+N)}{s(s+1)\ldots(s+N-1)},$$

όπου $N = -[s]$ (δηλαδή $-N \leq s \leq -N+1$). Έτσι, ορίζεται η <u>γάμμα συνάρτηση</u> Γ στο σύνολο $\mathbb{R} - \{0,-1,-2,\ldots\}$. Αποδεικνύεται ότι για όλα τα s με $s \neq 0,-1,-2,\ldots$ ισχύει

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

και, πιο γενικά,

$$\Gamma(s+n) = s(s+1)\ldots(s+n-1)\Gamma(s) \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Ακόμα, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$\Gamma(m+1) = m!$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 10</u>. <u>Η διαφορική εξίσωση του Bessel</u> (E_5) <u>έχει τη λύση</u>

$$y_0(x) = \left(\frac{|x|}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Μια άλλη λύση</u> $\tilde{y}$ <u>αυτής, η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη προς την</u> y_0, <u>ορίζεται ως εξής</u>:

(i) <u>Αν ο</u> p <u>δεν είναι ακέραιος, τότε</u>

$$\tilde{y}(x) = \left(\frac{|x|}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x \neq 0.$$

(ii) <u>Αν</u> $p = 0$, <u>τότε</u>

$$\tilde{y}(x) = y_0(x)\log|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x \neq 0.$$

(iii) <u>Αν ο</u> p <u>είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε</u>

$$\tilde{y}(x) = y_0(x)\log|x| - \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} -$$

$$- \frac{1}{2}\frac{1}{p!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{|x|}{2}\right)^{p} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x \neq 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η διαφορική εξίσωση (E_5) είναι της μορφής (E) με $a_2(x) = x^2$, $a_1(x) = x$ και $a_0(x) = x^2 - p^2$ για $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$x a_1(x) = a_2(x)A_1(x) \quad \text{και} \quad x^2 a_0(x) = a_2(x)A_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $A_1(x) = 1$ και $A_2(x) = x^2 - p^2$ για $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, το σημείο $x_0 = 0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της διαφορικής εξίσωσης (E_5) και η ενδεικτική εξίσωση της (E_5) στο $x_0 = 0$ είναι $\lambda^2 - p^2 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = p$ και $\lambda_2 = -p$. Επομένως, η εξίσωση (E_5) έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2, όπου

$$y_1(x) = |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ με } c_0 = 1$$

και η y_2 βρίσκεται ως εξής:

(i) Αν η σταθερά p δεν είναι ακέραιος, τότε

$$y_2(x) = |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \neq 0, \text{ με } d_0 = 1.$$

(ii) Αν $p = 0$, τότε

$$y_2(x) = y_1(x)\log|x| + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \neq 0, \text{ με } d_0 = 0.$$

(iii) Αν p είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$y_2(x) = Cy_1(x)\log|x| + |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \neq 0, \text{ με } d_0 = 1$$

για κάποια σταθερά C (που μπορεί να είναι και ίση με μηδέν).

Θα βρούμε πρώτα τη λύση y_1. Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x y_1'(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)c_n x^n \quad \text{και} \quad x^2 y_1''(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1)c_n x^n$$

και άρα

$$x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) + (x^2 - p^2)y_1(x) = x^p \left\{(2p+1)c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n+2p)c_n + c_{n-2}]x^n\right\}.$$

'Ετσι, παίρνουμε

$$c_1 = 0 \text{ και } c_n = -\frac{1}{n(n+2p)} c_{n-2} \quad (n=2,3,\dots),$$

απ'όπου προκύπτει ότι $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$ και για $n=1,2,\dots$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(p+1)(p+2)\dots(p+n)} = \frac{(-1)^n\Gamma(p+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+p+1)} .$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$y_1(x) = |x|^p\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\Gamma(p+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+p+1)} x^{2n}\right] = |x|^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\Gamma(p+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+p+1)} x^{2n}$$

$$= 2^p\Gamma(p+1)\left(\frac{|x|}{2}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 2^p\Gamma(p+1)y_0(x) .$$

'Ετσι, είναι $y_1 = 2^p\Gamma(p+1)y_0$.

Στη συνέχεια, θα βρούμε τη λύση y_2. Διακρίνουμε τις παρακάτω τρείς περιπτώσεις:

(i) p <u>δεν είναι ακέραιος</u>: Με την ίδια διαδικασία όπως παραπάνω (για την εύρεση της y_1) με το $-p$ στη θέση του p, βρίσκουμε για $x \neq 0$

$$y_2(x) = 2^{-p}\Gamma(-p+1)\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 2^{-p}\Gamma(-p+1)\tilde{y}(x) ,$$

δηλαδή $y_2 = 2^{-p}\Gamma(-p+1)\tilde{y}$.

(ii) p <u>ισούται με μηδέν</u>: Θέτουμε

$$z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \neq 0$$

και έχουμε για $x > 0$

$$y_2(x) = y_1(x)\log x + z(x) , \quad y_2'(x) = y_1'(x)\log x + \frac{1}{x} y_1(x) + z'(x) ,$$

$$y_2''(x) = y_1''(x)\log x + \frac{2}{x} y_1'(x) - \frac{1}{x^2} y_1(x) + z''(x)$$

και έτσι

$$x^2y_2''(x) + xy_2'(x) + x^2y_2(x) = [x^2y_1''(x) + xy_1'(x) + x^2y_1(x)]\log x +$$
$$+2xy_1'(x) + [x^2z''(x) + xz'(x) + x^2z(x)]$$

$$= 2xy_1'(x) + [x^2z''(x) + xz'(x) + (x^2-0^2)z(x)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_nx^n + \left[d_1x + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2d_n + d_{n-2})x^n\right]$$

$$= (d_1+2c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 d_n + d_{n-2} + 2nc_n)x^n.$$

'Αρα, είναι

$$d_1 = -2c_1 \quad \text{και} \quad n^2 d_n + d_{n-2} + 2nc_n = 0 \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Αλλά $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = 0$, και επομένως $d_1 = d_3 = d_5 = \ldots = 0$. Εξάλλου στην περίπτωσή μας όπου $p = 0$ έχουμε

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(1)}{2^{2n} n! \Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

και έτσι παίρνουμε

$$(2n)^2 d_{2n} + d_{2n-2} = \frac{4(-1)^{n+1} n}{2^{2n}(n!)^2} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

απ'όπου (όπως αποδεικνύεται με επαγωγή) προκύπτει ότι

$$d_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,2,\ldots).$$

'Αρα, για όλα τα $x \neq 0$ είναι

$$y_2(x) = y_1(x)\log|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)x^{2n}$$

$$= y_0(x)\log|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

δηλαδή $y_2 = \tilde{y}$.

(iii) p <u>είναι ένας θετικός ακέραιος</u>. Θέτουμε

$$z(x) = |x|^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad x \neq 0$$

και τότε για κάθε $x > 0$ παίρνουμε

$$x^2 y_2''(x) + xy_2'(x) + (x^2-p^2)y_2(x) = 2Cy_1'(x) + [x^2 z''(x) + xz'(x) + (x^2-p^2)z(x)]$$

$$= 2Cx^p \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)c_n x^n + x^{-p}\left\{(-2p+1)d_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-2p)d_n + d_{n-2}]x^n\right\}$$

$$= x^{-p}\left\{2C\sum_{n=0}^{\infty} (n+p)c_n x^{n+2p} + (-2p+1)d_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-2p)d_n + d_{n-2}]x^n\right\}$$

$$= x^{-p}\left\{2Cp!\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{2^{2n} n!(n+p)!} x^{2(n+p)} + \sum_{n=1}^{\infty} [2n(2n-2p)d_{2n} + d_{2n-2}]x^{2n} + \right.$$

$$\left. + (-2p+1)d_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)(2n+1-2p)d_{2n+1} + d_{2n-1}]x^{2n+1}\right\}.$$

Αμέσως προκύπτει ότι $d_1 = d_3 = d_5 = \ldots = 0$, αφού

$$d_1 = 0 \text{ και } (2n+1)(2n+1-2p)d_{2n+1} + d_{2n-1} = 0 \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Επίσης, έχουμε

$$2n(2n+2p)d_{2p+2n} + d_{2p+2n-2} = -2Cp!\,\frac{(-1)^n(2n+p)}{2^{2n}n!(n+p)!}, \quad (n = 0,1,\ldots)$$

και, εφ'όσον $p > 1$,

$$2n(2n-2p)d_{2n} + d_{2n-2} = 0 \quad (n = 1,\ldots,p-1).$$

Αμέσως βρίσκουμε

$$d_{2n} = \frac{1}{2^{2n}n!(p-1)(p-2)\ldots(p-n)} = \frac{(p-n-1)!}{2^{2n}n!(p-1)!} \quad (n = 0,1,\ldots,p-1).$$

Ακόμα, είναι

$$d_{2p-2} = -2Cp = \frac{1}{2^{2(p-1)}[(p-1)!]^2}$$

και έτσι έχουμε

$$C = -\frac{1}{2^{2p-1}p!(p-1)!},$$

οπότε

$$2n(2n+2p)d_{2p+2n} + d_{2p+2n-2} = \frac{1}{2^{2p-2}(p-1)!}\cdot\frac{(-1)^n(2n+p)}{2^{2n}n!(n+p)!} \quad (n = 0,1,\ldots).$$

Εκλέγουμε στη συνέχεια

$$d_{2p} = \frac{1}{2^{2p}p!(p-1)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right)$$

και βρίσκουμε επαγωγικά ότι

$$d_{2p+2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2p+2n}(p-1)!n!(n+p)!}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right)\right]$$

για $n = 1,2,\ldots$. Μετά απ'τα παραπάνω, για κάθε $x \neq 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= Cy_1(x)\log|x| + |x|^{-p}\sum_{n=0}^{p-1} d_{2n}x^{2n} + |x|^{-p}d_{2p}x^{2p} + |x|^{-p}\sum_{n=1}^{\infty} d_{2p+2n}x^{2p+2n} \\
&= Cy_1(x)\log|x| + |x|^{-p}\sum_{n=0}^{p-1} d_{2n}x^{2n} + |x|^{p}d_{2p} + |x|^{p}\sum_{n=1}^{\infty} d_{2p+2n}x^{2n} \\
&= Cy_1(x)\log|x| + \left(\frac{|x|}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1} 2^{2n-p}d_{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{|x|}{2}\right)^{p} 2^{p}d_{2p} \\
&\quad + \left(\frac{|x|}{2}\right)^{p}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n+p}d_{2p+2n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}\,y_0(x)\log|x| + \frac{1}{2^p(p-1)!}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} +$$

$$+\frac{1}{2^p p!(p-1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{|x|}{2}\right)^p +$$

$$+\frac{1}{2^p(p-1)!}\left(\frac{|x|}{2}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$= -\frac{1}{2^{p-1}(p-1)!}\left\{y_0(x)\log|x| - \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{|x|}{2}\right)^p - \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{2}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right\}$$

και άρα έχουμε $y_2 = -\dfrac{1}{2^{p-1}(p-1)!}\,\tilde{y}$.

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι $y_1 = \lambda_1 y_0$ και $y_2 = \lambda_2\tilde{y}$, όπου λ_1 και λ_2 είναι μη μηδενικές σταθερές, και έτσι η απόδειξη του Θεωρήματός μας έχει τελειώσει.

Αν ϑ είναι ένας πραγματικός αριθμός με $\vartheta \neq -1,-2,\ldots$, θα λέμε ότι η συνάρτηση

$$J_\vartheta(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\vartheta+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x>0$$

είναι η <u>συνάρτηση του Bessel τάξης</u> ϑ <u>πρώτου είδους</u>. Ειδικά, η συνάρτηση του Bessel τάξης 0 πρώτου είδους δίνεται απ'τον τύπο

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x>0.$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 17. Για κάθε θετικό αριθμό</u> ϑ <u>είναι</u>

$$J_{\vartheta+1}(x) = \frac{2\vartheta}{x}J_\vartheta(x) - J_{\vartheta-1}(x), \quad x>0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για όλα τα $x>0$ έχουμε

$$[x^\vartheta J_\vartheta(x)]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+\vartheta}n!\Gamma(n+\vartheta+1)}x^{2n+2\vartheta}\right]'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+\vartheta)}{2^{2n+\vartheta} n!\Gamma(n+\vartheta+1)} x^{2n+2\vartheta-1}$$

$$= x^{\vartheta}\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\vartheta)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Δηλαδή

$$[x^{\vartheta}J_{\vartheta}(x)]' = x^{\vartheta}J_{\vartheta-1}(x), \quad x > 0.$$

Αλλά, για κάθε $x > 0$ είναι

$$[x^{\vartheta}J_{\vartheta}(x)]' = \vartheta x^{\vartheta-1}J_{\vartheta}(x) + x^{\vartheta}J'_{\vartheta}(x).$$

Έτσι, παίρνουμε

$$(*) \qquad J'_{\vartheta}(x) = J_{\vartheta-1}(x) - \frac{\vartheta}{x} J_{\vartheta}(x), \quad x > 0.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι για $x > 0$

$$[x^{-\vartheta}J_{\vartheta}(x)]' = -x^{-\vartheta}J_{\vartheta+1}(x)$$

και

$$[x^{-\vartheta}J_{\vartheta}(x)]' = -\vartheta x^{-\vartheta-1}J_{\vartheta}(x) + x^{-\vartheta}J'_{\vartheta}(x)$$

και επομένως

$$(**) \qquad J'_{\vartheta}(x) = -J_{\vartheta+1}(x) + \frac{\vartheta}{x} J_{\vartheta}(x), \quad x > 0.$$

Συνδυάζοντας τις (*) και (**), καταλήγουμε στον τύπο μας.

Η παραπάνω Πρόταση μιας λέει ότι μπορούν να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης J_{ϑ} για οποιοδήποτε $\vartheta \geq 2$, αρκεί να είναι γνωστές οι τιμές των J_{ϑ} για $0 \leq \vartheta < 2$. Ειδικά, οι συναρτήσεις J_m ($m = 2,3,\ldots$) μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει των J_0 και J_1, όπου

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x > 0.$$

Ορίζουμε τώρα

$$K_0(x) = J_0(x)\log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x > 0$$

και για $m = 1,2,\ldots$

$$K_m(x) = J_m(x)\log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{m}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+m}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad x \neq 0$$

και λέμε ότι, αν m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, η συνάρτηση K_m είναι η συνάρτηση του Bessel τάξης m δεύτερου είδους.

Έτσι, το Θεώρημα 10 δίνει: Για τη διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης p ($p \geq 0$) έχουμε ως δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις στο διάστημα $(0,\infty)$ τις συναρτήσεις J_p και J_{-p}, όταν p δεν είναι ακέραιος, ή τις συναρτήσεις J_p και K_p, όταν p είναι ακέραιος. Οι λύσεις αυτές μπορούν να επεκταθούν και στο διάστημα $(-\infty,0)$ με αντικατάσταση του x με $|x|$.

Δίνουμε τώρα, χωρίς απόδειξη, την παρακάτω Πρόταση που αναφέρεται στις ρίζες της συνάρτησης του Bessel τάξης p πρώτου είδους, όπου p είναι μια μη αρνητική σταθερά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 18. Η συνάρτηση του Bessel τάξης p πρώτου είδους J_p, όπου $p \geq 0$, έχει άπειρες ρίζες· οι ρίζες αυτές είναι ακριβώς οι όροι μιας ακολουθίας $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε ένα σημαντικό συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 19. Ας είναι $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ η ακολουθία των ριζών της συνάρτησης του Bessel τάξης p πρώτου είδους J_p, όπου $p \geq 0$. Τότε:

(i) Για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m και n με $m \neq n$ ισχύει

$$\int_0^1 xJ_p(\lambda_m x)J_p(\lambda_n x)\,dx = 0.$$

(ii) Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$\int_0^1 x[J_p(\lambda_m x)]^2 dx = \frac{1}{2}\,[J_p'(\lambda_m)]^2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση J_p είναι μια λύση στο διάστημα $(0,\infty)$ της διαφορικής εξίσωσης του Bessel τάξης p, δηλαδή

$$x^2J_p''(x)+xJ_p'(x)+(x^2-p^2)J_p(x) = 0, \quad x > 0.$$

Η ισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα

$$J_p''(x) + \frac{1}{x}\,J_p'(x)+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)J_p(x) = 0, \quad x > 0.$$

Αν λ είναι μια θετική σταθερά και $u(x) = J_p(\lambda x)$, $x > 0$, τότε αμέσως διαπιστώνουμε ότι

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(\lambda^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u(x) = 0, \quad x > 0.$$

(i) Ας είναι m και n μη αρνητικοί ακέραιοι με $m \neq n$. Τότε, θέτοντας

$$u_m(x) = J_p(\lambda_m x), \quad x > 0 \quad \text{και} \quad u_n(x) = J_p(\lambda_n x), \quad x > 0,$$

έχουμε για όλα τα $x > 0$

$$u_m''(x) + \frac{1}{x}u_m'(x) + \left(\lambda_m^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u_m(x) = 0 \quad \text{και} \quad u_n''(x) + \frac{1}{x}u_n'(x) + \left(\lambda_n^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u_n(x) = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των παραπάνω ισοτήτων με $u_n(x)$ και $u_m(x)$, για $x > 0$, αντίστοιχα και αφαιρώντας κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν, παίρνουμε για $x > 0$

$$[u_m'(x)u_n(x) - u_m(x)u_n'(x)]' + \frac{1}{x}[u_m'(x)u_n(x) - u_m(x)u_n'(x)] +$$
$$+ (\lambda_m^2 - \lambda_n^2)u_m(x)u_n(x) = 0$$

ή ακόμα

$$\{x[u_m'(x)u_n(x) - u_m(x)u_n'(x)]\}' = (\lambda_n^2 - \lambda_m^2)xu_m(x)u_n(x).$$

'Ετσι, έχουμε

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)\int_0^1 xu_m(x)u_n(x)\,dx = x[u_m'(x)u_n(x) - u_m(x)u_n'(x)]\Big|_0^1$$
$$= u_m'(1)u_n(1) - u_m(1)u_n'(1)$$
$$= u_m'(1)J_p(\lambda_n) - J_p(\lambda_m)u_n'(1) = 0.$$

'Αρα, επειδή $\lambda_n \neq \lambda_m$, θα είναι

$$\int_0^1 xu_m(x)u_n(x)\,dx = 0.$$

(ii) Ας είναι m ένας μη αρνητικός ακέραιος και ας θέσουμε

$$u_m(x) = J_p(\lambda_m x), \quad x > 0.$$

Τότε για όλα τα $x > 0$ είναι

$$u_m''(x) + \frac{1}{x}u_m'(x) + \left(\lambda_m^2 - \frac{p^2}{x^2}\right)u_m(x) = 0$$

ή

$$2x^2u_m'(x)u_m''(x) + 2x[u_m'(x)]^2 + 2\lambda_m^2x^2u_m(x)u_m'(x) - 2p^2u_m(x)u_m'(x) = 0$$

ή ακόμα

$$\{x^2[u_m'(x)]^2\}'+\{\lambda_m^2x^2[u_m(x)]^2\}'-2\lambda_m^2x[u_m(x)]^2-\{p^2[u_m(x)]^2\}'=0.$$

Έτσι, έχουμε

$$2\lambda_m^2\int_0^1 x[u_m(x)]^2dx = \{x^2[u_m'(x)]^2+(\lambda_m^2x^2-p^2)[u_m(x)]^2\}\Big|_0^1$$
$$= [u_m'(1)]^2+(\lambda_m^2-p^2)[u_m(1)]^2$$
$$= [\lambda_m J_p'(\lambda_m)]^2+(\lambda_m^2-p^2)[J_p(\lambda_m)]^2$$
$$= \lambda_m^2[J_p'(\lambda_m)]^2,$$

απ'όπου προκύπτει

$$\int_0^1 x[u_m(x)]^2dx = \frac{1}{2}[J_p'(\lambda_m)]^2.$$

Ας είναι $\lambda_0<\lambda_1<\ldots$ η ακολουθία των ριζών της συνάρτησης του Bessel τάξης p πρώτου είδους J_p, όπου $p\geq 0$, και ας θέσουμε

$$u_m(x) = J_p(\lambda_m x),\ x>0\quad (m=0,1,\ldots).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 19 (συμπέρασμα (i)), η ακολουθία συναρτήσεων $(u_m)_{m\geq 0}$ είναι ορθογώνια στο διάστημα $(0,1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)=x$, $x\in(0,1)$.

4.6. Απλές ορθογώνιες ακολουθίες πολυωνύμων

Μια ακολουθία πολυωνύμων $(f_m)_{m\geq 0}$ θα λέμε ότι είναι απλή αν και μόνο αν, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m, το πολυώνυμο f_m είναι βαθμού m. Ισχύει το παρακάτω συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 20. Ας είναι $(f_m)_{m\geq 0}$ μια απλή ακολουθία πολυωνύμων και g_n ένα πολυώνυμο βαθμού n, όπου n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε υπάρχουν σταθερές c_k $(k=0,1,\ldots,n)$ με $c_n\neq 0$ έτσι ώστε

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το συμπέρασμα είναι προφανές για $n=0$. Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για $n=0,1,\ldots,\nu$, όπου ν είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, δηλαδή ότι για κάθε πολυώνυμο g_n βαθμού n με $0\leq n\leq\nu$ υπάρχουν σταθερές $c_k(n)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ έτσι ώστε $g_n=\sum_{k=0}^{n}c_k(n)f_k$.

Ας θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο $g_{\nu+1}$ βαθμού $\nu+1$. Αν $a_{\nu+1}$ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του $g_{\nu+1}$ και $b_{\nu+1}$ ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του $f_{\nu+1}$ και θέσουμε $c_{\nu+1}(\nu+1) = a_{\nu+1}/b_{\nu+1} \neq 0$ (είναι $a_{\nu+1} \neq 0$, $b_{\nu+1} \neq 0$), τότε το πολυώνυμο $g_{\nu+1} - c_{\nu+1}(\nu+1)f_{\nu+1}$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό n_0 όπου $0 \leq n_0 \leq \nu$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε

$$g_{\nu+1} = \sum_{k=0}^{\nu+1} c_k(\nu+1)f_k \quad \text{με} \quad c_k(\nu+1) = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,\nu),$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα είναι

$$g_{\nu+1} = \sum_{k=0}^{\nu+1} c_k(\nu+1)f_k \quad \text{με} \quad c_k(\nu+1) = c_k(n_0) \quad (k = 0,\ldots,n_0) \quad \text{και, εφόσον}$$
$$n_0 < \nu,\ c_k(\nu+1) = 0 \quad (k = n_0+1,\ldots,\nu).$$

Δηλαδή, το συμπέρασμα ισχύει και για $n = \nu+1$.

'Οπως είναι γνωστό, αν I είναι ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, και w είναι μια θετική και συνεχής συνάρτηση στο (a,b), τότε μια ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων $(f_m)_{m\geq 0}$ λέμε ότι είναι *ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w* αν και μόνο αν

$$\int_0^b w(x)f_m(x)f_n(x)\,dx = 0 \quad (m,n = 0,1,\ldots; m \neq n).$$

Οι ακολουθίες των πραγματικών πολυωνύμων $(P_m)_{m\geq 0}$, $(T_m)_{m\geq 0}$, $(H_m)_{m\geq 0}$ και $(L_m)_{m\geq 0}$ είναι *απλές* και *ορθογώνιες στα διαστήματα* $[-1,1]$, $[-1,1]$, $(-\infty,\infty)$ *και* $[0,\infty)$ *αντίστοιχα ως προς τις συναρτήσεις βάρους* $w(x) = 1$ *για* $x \in (-1,1)$, $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ *για* $x \in (-1,1)$, $w(x) = e^{-x^2}$ *για* $x \in (-\infty,\infty)$ *και* $w(x) = e^{-x}$ *για* $x \in (0,\infty)$ *αντίστοιχα*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 21. *Ας είναι I ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, και w μια θετική και συνεχής συνάρτηση στο (a,b). Μια απλή ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων $(f_m)_{m\geq 0}$ είναι ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w αν και μόνο αν, για κάθε θετικό ακέραιο m, είναι*

$$\int_a^b w(x)x^k f_m(x)\,dx = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,m-1).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι η απλή ακολουθία πολυωνύμων $(f_m)_{m\geq 0}$ είναι ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w και ας θεωρήσουμε τυχόντα θετικό ακέραιο m. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 20, για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ θα υπάρχουν σταθερές $c_i(k)$ $(i=0,1,\ldots$

$\ldots,k)$ έτσι ώστε

$$x^k = \sum_{i=0}^{k} c_i(k)f_i(x) \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, για $k = 0,1,\ldots,m-1$ παίρνουμε

$$\int_a^b w(x)x^k f_m(x)\,dx = \int_b^a w(x)\left[\sum_{i=0}^{k} c_i(k)f_i(x)\right]f_m(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{k} c_i(k)\int_a^b w(x)f_i(x)f_m(x)\,dx = 0.$$

Δηλαδή,

$$(*) \qquad \int_a^b w(x)x^k f_m(x)\,dx = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,m-1).$$

Αντίστροφα· ας υποθέσουμε ότι για την απλή ακολουθία πολυωνύμων $(f_m)_{m\geq 0}$ η (*) ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο m και ας θεωρήσουμε δύο τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m και n με $m \neq n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $n < m$. Τότε, επειδή η $(x^n)_{n\geq 0}$ είναι μια απλή ακολουθία πολυωνύμων, η Πρόταση 20 εξασφαλίζει ότι υπάρχουν σταθερές $c_k(n)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ τέτοιες ώστε

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(n)x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$\int_a^b w(x)f_n(x)f_m(x)\,dx = \int_a^b w(x)\left[\sum_{k=0}^{n} c_k(n)x^k\right]f_m(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k(n)\int_a^b w(x)x^k f_m(x)\,dx = 0.$$

Επομένως, η ακολουθία πολυωνύμων $(f_m)_{m\geq 0}$ είναι ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 22.</u> <u>Ας είναι I ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, και w μια θετική και συνεχής συνάρτηση στο (a,b). Ακόμα, ας είναι $(f_m)_{m\geq 0}$ μια απλή ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων που είναι ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w, και g_n ένα πολυώνυμο βαθμού n, όπου n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε</u>

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k,$$

<u>όπου</u>

$$c_k = \frac{\int_a^b w(x) g_n(x) f_k(x) dx}{\int_a^b w(x) [f_k(x)]^2 dx} \quad (k = 0,1,\ldots,n).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την Πρόταση 20, υπάρχουν σταθερές c_k ($k = 0,1,\ldots,n$) έτσι ώστε $g_n = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k$. Τώρα, για τυχόν $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, έχουμε

$$\int_a^b w(x) g_n(x) f_k(x) dx = \int_a^b w(x) \left[\sum_{i=0}^{n} c_i f_i(x)\right] f_k(x) dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} c_i \int_a^b w(x) f_i(x) f_k(x) dx$$
$$= c_k \int_a^b w(x) [f_k(x)]^2 dx,$$

και έτσι τελείωσε η απόδειξη της Πρότασης.

Σχετικά με τις ρίζες των πολυωνύμων μιας απλής ορθογώνιας ακολουθίας πολυωνύμων ισχύει το παρακάτω συμπέρασμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 23. Ας είναι I ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, και w μια θετική και συνεχής συνάρτηση στο (a,b). Ακόμα, ας είναι $(f_m)_{m \geq 0}$ μια απλή ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων που είναι ορθογώνια στο I ως προς τη συνάρτηση βάρους w. Τότε, για κάθε θετικό ακέραιο m, οι ρίζες του πολυωνύμου f_m είναι απλές και ανήκουν στο διάστημα (a,b).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι m ένας θετικός ακέραιος. Απ'την Πρόταση 21 προκύπτει ότι

$$\int_a^b w(x) f_m(x) dx = 0$$

και επομένως η συνάρτηση f_m αλλάζει πρόσημο σ'ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος (a,b). Ας είναι $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τα σημεία του διαστήματος (a,b) στα οποία η f_m αλλάζει πρόσημο. Είναι $n \leq m$, επειδή το πολυώνυμο f_m μπορεί να έχει το πολύ m διακεκριμμένες ρίζες. Ας υποθέσουμε ότι $n < m$. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$g_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το πολυώνυμο g_n αλλάζει πρόσημο ακριβώς στα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Απ'την Πρόταση 21 εύκολα μπορεί να προκύψει ότι

$$\int_a^b w(x) g_n(x) f_m(x) dx = 0,$$

αφού το πολυώνυμο g_n έχει βαθμό $n < m$. Αυτό είναι ένα άτοπο, γιατί g_n και f_m αλλάζουν πρόσημο στα ίδια ακριβώς σημεία του (a,b) και έτσι $g_n f_m$ δεν αλλάζει πρόσημο σε κανένα σημείο του (a,b). Άρα $n = m$, το οποίο σημαίνει ότι το πολυώνυμο f_m έχει m διακεκριμμένες ρίζες στο διάστημα (a,b).

Απ'την Πρόταση 23 προκύπτει ότι: Αν m είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε καθένα απ'τα πολυώνυμα P_m και T_m έχει m απλές πραγματικές ρίζες που ανήκουν στο διάστημα $(-1,1)$, το πολυώνυμο H_m έχει m απλές πραγματικές ρίζες και το πολυώνυμο L_m έχει m απλές πραγματικές ρίζες που είναι θετικές.

4.7. Σειρές Fourier

Ας ειναι I ένα διάστημα με άκρα a και b, όπου $-\infty \leq a < b \leq \infty$, και w μια θετική και συνεχής συνάρτηση στο (a,b). Ακόμα, ας είναι $(f_m)_{m\geq 0}$ μια ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που είναι ορθογώνια στο διάστημα I ως προς τη συνάρτηση βάρους w και τέτοια ώστε τα ολοκληρώματα

$$\| f_m \| = \int_a^b w(x) [f_m(x)]^2 dx \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

να υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και να είναι θετικά. Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα I και τέτοια ώστε να ορίζονται και να είναι πεπερασμένα τα ολοκληρώματα

$$(f, f_m) = \int_a^b w(x) f(x) f_m(x) dx \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Τότε οι αριθμοί

$$C_m = \frac{1}{\| f_m \|} (f, f_m) \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

λέμε ότι είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης f ως προς την ακολουθία συναρτήσεων $(f_m)_{m\geq 0}$, και η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m f_m$$

λέμε ότι είναι η <u>σειρά Fourier</u> της f ως προς την ακολουθία $(f_m)_{m\geq 0}$.

Θα δώσουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα σειρών Fourier ως προς ορισμένες χαρακτηριστικές ορθογώνιες ακολουθίες συναρτήσεων. Πριν όμως απ'αυτό, θα δώσουμε δύο ορισμούς.

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι <u>συνεχής κατά τμήματα στο</u> $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\ldots<x_\nu=b$ του $[a,b]$ έτσι ώστε, για κάθε $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (x_k,x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f(x_k+0)$ και $f(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν (ως πραγματικοί αριθμοί). Επίσης, θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι <u>συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο</u> $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\ldots<x_{\nu-1}<x_\nu=b$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε, για οποιοδήποτε $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να έχει συνεχή παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (x_k,x_{k+1}) και τα όρια $f'(x_k+0)$, $f'(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν (οπότε και τα όρια $f(x_k+0)$, $f(x_{k+1}-0)$ καθώς και τα

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_k+h)-f(x_k+0)}{h},\quad \lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_{k+1}+h)-f(x_{k+1}-0)}{h}$$

υπάρχουν). Είναι φανερό ότι, αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[a,b]$, τότε αυτή είναι συνεχής κατά τμήματα στο ίδιο διάστημα. Επίσης, ας τονίσουμε ότι η f είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, όταν αυτή είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[a,b]$.

ΣΕΙΡΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΤΟΥ LEGENDRE. Είναι γνωστό ότι η ακολουθία $(P_m)_{m\geq 0}$ των πολυωνύμων του Legendre είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)=1$, $x\in(-1,1)$. Επίσης, είναι (Πρόταση 3)

$$\int_{-1}^{1}[P_m(x)]^2dx=\frac{2}{2m+1}\quad (m=0,1,\ldots).$$

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-1,1]$. Τότε οι συντελεστές Fourier (που καλούνται και <u>συντελεστές Legendre</u>) της συνάρτησης f ορίζονται απ'τους τύπους

$$C_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)\,dx\quad (m=0,1,\ldots),$$

και η σειρά Fourier (που καλείται και <u>σειρά Legendre</u>) της f είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty}C_mP_m.$$

Αποδεικνύεται ότι: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-1,1]$, τότε

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m P_m(x) = \begin{cases} f(-1+0), & \text{αν } x=-1 \\ \frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)], & \text{αν } -1<x<1 \\ f(1-0), & \text{αν } x=1. \end{cases}$$

ΣΕΙΡΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΤΟΥ CHEBYSHEV. Η ακολουθία $(T_m)_{m\geq 0}$ των πολυωνύμων του Chebyshev είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $x \in (-1,1)$, και ακόμα (Πρόταση 7)

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2}[T_m(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi, & \text{αν } m=0 \\ \pi/2, & \text{αν } m=1,2,\ldots . \end{cases}$$

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-1,1]$. Μπορεί ν'αποδειχθεί ότι η ύπαρξη του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} w(x)dx$ συνεπάγεται την ύπαρξη του $\int_{-1}^{1} w(x)F(x)dx$ για κάθε συνάρτηση F που είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[-1,1]$, και έτσι μπορούν να ορισθούν οι συντελεστές Fourier (συντελεστές Chebyshev) της συνάρτησης f απ'τους τύπους

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f(x)dx \quad \text{και} \quad C_m = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f(x)T_m(x)dx \quad (m=1,2,\ldots)$$

(ας σημειωθεί ότι $T_0 = 1$). Η σειρά Fourier (σειρά Chebyshev) της f είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m T_m .$$

Αποδεικνύεται ότι: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-1,1]$, τότε

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m T_m(x) = \begin{cases} f(-1+0), & \text{αν } x=-1 \\ \frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)], & \text{αν } -1<x<1 \\ f(1-0), & \text{αν } x=1. \end{cases}$$

ΣΕΙΡΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΤΟΥ HERMITE. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $(H_m)_{m\geq 0}$ των πολυωνύμων του Hermite. Αυτή είναι ορθογώνια στο $(-\infty,\infty)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x^2}$, $x \in (-\infty,\infty)$ και επιπλέον (Πρόταση 11) είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[H_m(x)]^2 dx = 2^m m!\sqrt{\pi} \quad (m=0,1,\ldots).$$

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ'ολόκληρη την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, και τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[f(x)]^2 dx$$

να υπάρχει. Τότε, με τη βοήθεια της ανισότητας του Schwarz, αποδεικνύεται ότι και τα ολοκληρώματα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_m(x)\, dx \quad (m=0,1,\ldots)$$

υπάρχουν επίσης, και επομένως οι τύποι

$$C_m = \frac{1}{2^m m!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_m(x)\, dx \quad (m=0,1,\ldots)$$

ορίζουν τους συντελεστές Fourier (<u>συντελεστές Hermite</u>) της συνάρτησης f και η σειρά Fourier (<u>σειρά Hermite</u>) της f είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m.$$

Αποδεικνύεται ότι: <u>Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα (και το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}[f(x)]^2 dx$ υπάρχει), τότε για κάθε $x \in (-\infty,\infty)$ είναι</u>

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

ΣΕΙΡΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΤΟΥ LAGUERRE. Η ακολουθία $(L_m)_{m\geq 0}$ των πολυωνύμων του Laguerre είναι ορθογώνια στο διάστημα $[0,\infty)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x}$, $x \in (0,\infty)$. Επίσης, είναι (Πρόταση 16)

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}[L_m(x)]^2 dx = 1 \quad (m=0,1,\ldots).$$

Ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,\infty)$, η οποία να είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,b]$, $b>0$, και τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-x}[f(x)]^2dx$$

να υπάρχει. Τότε η ανισότητα Schwarz μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαπιστωθεί ότι τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)L_m(x)\,dx \quad (m=0,1,\dots)$$

επίσης υπάρχουν. 'Ετσι, οι συντελεστές Fourier (<u>συντελεστές Laguerre</u>) της συνάρτησης f είναι

$$C_m = \int_0^\infty e^{-x}f(x)L_m(x)\,dx \quad (m=0,1,\dots)$$

και η σειρά Fourier (<u>σειρά Laguerre</u>) της f είναι

$$\sum_{m=0}^\infty C_mL_m.$$

Αποδεικνύεται ότι: <u>Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής</u> $[0,b]$, $b>0$ (<u>και το</u> $\int_0^\infty e^{-x}[f(x)]^2dx$ <u>υπάρχει</u>), <u>τότε για κάθε</u> $x>0$ <u>είναι</u>

$$\sum_{m=0}^\infty C_mL_m(x) = \frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)].$$

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER-BESSEL. Ας είναι p μια μη αρνητική σταθερά και $\lambda_0<\lambda_1<\dots$ η ακολουθία των ριζών της συνάρτησης του Bessel (τάξης p πρώτου είδους) J_p. Ας θέσουμε

$$u_m(x) = J_p(\lambda_m x),\ x>0 \quad (m=0,1,\dots).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 19, η ακολουθία συναρτήσεων $(u_m)_{m\geq 0}$ είναι ορθογώνια στο διάστημα $(0,1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)=x$, $x\in(0,1)$ και επιπλέον

$$\int_0^1 x[u_m(x)]^2dx = \frac{1}{2}\,[J_p'(\lambda_m)]^2 \quad (m=0,1,\dots).$$

Ακόμα, μπορεί ν'αποδειχθεί ότι

$$J_p'(\lambda_m)\neq 0 \quad (m=0,1,\dots).$$

Ας είναι, τώρα, f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $(0,1]$, η οποία είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[b,1]$, $0<b<1$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0+0} u_m(x)=0$ ή 1 εφόσον $p>0$ ή $p=0$ αντίστοιχα. 'Ετσι, μπορούν να ορισθούν οι συντελεστές Fourier (<u>συντελε-</u>

στές Fourier-Bessel) της συνάρτησης f με τους τύπους

$$c_m = \frac{2}{[J_p'(\lambda_m)]^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_m x)\,dx \quad (m=0,1,\ldots),$$

οπότε ή σειρά Fourier (σειρά Fourier-Bessel) της f είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m J_p(\lambda_m x), \quad x \in (0,1].$$

Αποδεικνύεται ότι: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[b,1]$, $0<b<1$, τότε για κάθε $x \in (0,1)$ είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m J_p(\lambda_m x) = \frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)].$$

ΣΕΙΡΕΣ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(py')' + (q+\lambda r)y = 0; \quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

όπου p,q και r είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα [a,b], η p είναι θετική και έχει συνεχή παράγωγο στο [a,b], η r είναι θετική στο [a,b], και $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ και β_2 είναι πραγματικές σταθερές με $|\alpha_1|+|\alpha_2|>0$ και $|\beta_1|+|\beta_2|>0$. Ας είναι $(y_m)_{m\geq 0}$ μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων του παραπάνω προβλήματος ιδιοτιμών. Τότε η ακολουθία αυτή είναι ορθογώνια στο διάστημα [a,b] ως προς τη συνάρτηση βάρους r (πρβλ. Κεφάλαιο ΙΙΙ). Έτσι, αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση που είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα [a,b], τότε ορίζονται οι συντελεστές Fourier της f με τους τύπους

$$c_m = \frac{1}{\int_a^b r(x)[y_m(x)]^2\,dx} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x)\,dx \quad (m=0,1,\ldots)$$

και η σειρά Fourier της συνάρτησης f είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m y_m.$$

Αποδεικνύεται ότι: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα [a,b], τότε για κάθε $x \in (a,b)$ είναι

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m y_m(x) = \frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)].$$

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΗΜΙΤΟΝΩΝ. Ας είναι c μια θετική σταθερά. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f_m)_{m\geq 1}$ με

$$f_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{c}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (m=1,2,\dots)$$

είναι ορθογώνια στο διάστημα $[0,c]$ (ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)=1$, $x \in (0,c)$) και τέτοια ώστε

$$\int_0^c [f_m(x)]^2 dx = c/2 \quad (m=1,2,\dots).$$

Έτσι, αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[0,c]$, τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$c_m = \frac{2}{c}\int_0^c f(x) \sin \frac{m\pi x}{c}\, dx \quad (m=1,2,\dots)$$

και η σειρά Fourier της f είναι

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi x}{c}, \quad x \in [0,c].$$

Αυτή λέμε ότι είναι η <u>σειρά ημιτόνων</u> της συνάρτησης f.

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ. Ας είναι c μια θετική σταθερά. Τότε η ακολουθία συναρτήσεων $(f_m)_{m\geq 0}$, όπου

$$f_m(x) = \cos \frac{m\pi x}{c}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (m=0,1,\dots)$$

είναι ορθογώνια στο $[0,c]$ και τέτοια ώστε

$$\int_0^c [f_m(x)]^2 dx = \begin{cases} c, & \text{αν } m=0 \\ \dfrac{c}{2}, & \text{αν } m=1,2,\dots . \end{cases}$$

Επομένως, για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[0,c]$, έχουμε τους συντελεστές Fourier

$$c_0 = \frac{1}{c}\int_0^c f(x)\,dx \quad \text{και} \quad c_m = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos \frac{m\pi x}{c}\, dx \quad (m=1,2,\dots)$$

και τη σειρά Fourier (<u>σειρά συνημιτόνων</u>)

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos \frac{m\pi x}{c}, \quad x \in [0,c].$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ FOURIER. Ας θεωρήσουμε μια σταθερά $c > 0$. Οι συναρτήσεις

$$\cos\frac{n\pi x}{c},\ x\in\mathbb{R}\ (n=0,1,\ldots)\ \text{και}\ \sin\frac{n\pi x}{c},\ x\in\mathbb{R}\ (n=1,2,\ldots)$$

μπορούν να θεωρηθούν ως όροι μιας ακολουθίας συναρτήσεων $(f_m)_{m\geq 0}$, η οποία είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-c,c]$. Επίσης, είναι

$$\int_{-c}^{c}\cos^2\frac{n\pi x}{c}\,dx=\begin{cases}2c, & \text{αν } n=0\\ c, & \text{αν } n=1,2,\ldots\end{cases}$$

και

$$\int_{-c}^{c}\sin^2\frac{n\pi x}{c}\,dx=c\quad(n=1,2,\ldots).$$

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση που είναι κατά τμήματα συνεχής στο διάστημα $[-c,c]$. Τότε έχουμε τη γενική <u>τριγωνομετρική σειρά</u> Fourier της f

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\right),\ x\in[-c,c],$$

όπου οι συντελεστές Fourier δίνονται απ'τους τύπους:

$$a_0=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\,dx$$

και για $n=1,2,\ldots$

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx\ \text{και}\ b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx.$$

Εύκολα μπορούμε ν'αποδείξουμε ότι, αν η συνάρτηση f είναι περιττή (δηλαδή $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in[0,c]$), τότε $a_n=0$ $(n=0,1,\ldots)$ και

$$b_n=\frac{2}{c}\int_{0}^{c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx\quad(n=1,2,\ldots)$$

και έτσι η σειρά Fourier της f στο διάστημα $[0,c]$ είναι μια σειρά Fourier ημιτόνων. Ανάλογα, όταν η f είναι άρτια (δηλαδή $f(-x)=f(x)$ για όλα τα $x\in[0,c]$), βρίσκουμε ότι $b_n=0$ $(n=1,2,\ldots)$ και

$$a_n=\frac{2}{c}\int_{0}^{c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx\quad(n=0,1,\ldots),$$

και επομένως η σειρά Fourier της f στο $[0,c]$ είναι μια σειρά συνημιτόνων. Έτσι, οι σειρές Fourier ημιτόνων ή συνημιτόνων μπορούν να προκύψουν απ'τις γενικές τριγωνομετρικές σειρές Fourier. Τέλος, αποδεικνύεται ότι: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-c,c]$, τότε

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)], & \text{αν } x\in(-c,c)\\[2ex] \frac{1}{2}\,[f(-c+0)+f(c-0)], & \text{αν } x=\pm c.\end{cases}$$

4.8. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Legendre:

(i) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$. (iii) $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$.
(ii) $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$. (iv) $(1-x^2)y''-2xy'+(3/4)y=0$.

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Chebyshev:

(i) $(1-x^2)y''-xy'+y=0$. (iii) $(1-x^2)y''-xy'+4y=0$.
(ii) $(1-x^2)y''-xy'+9y=0$. (iv) $(1-x^2)y''-xy'+(1/4)y=0$.

3. Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Hermite:

(i) $y''-2xy'+2y=0$. (ii) $y''-2xy'+4y=0$. (iii) $y''-2xy'+6y=0$.

4. Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Laguerre:

(i) $xy''+(1-x)y'+y=0$. (iii) $xy''+(1-x)y'+2y=0$.
(ii) $xy''-(x-1)y'+3y=0$. (iv) $xy''+(1-x)y'+(1/2)y=0$.

5. Να επιλυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις του Bessel:

(i) $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$. (iii) $x^2y''+xy'+x^2y=0$.
(ii) $x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$. (iv) $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$.

6. Ν'αποδειχθεί ότι, αν m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, τότε τα πολυώνυμα $P_0,P_1,\ldots,P_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και, επιπλέον, κάθε πολυώνυμο βαθμού m μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των $P_0,P_1,\ldots,P_m$. Να εκφρασθεί το πολυώνυμο $Q(x)=2x^3-3x^2+5x-1$, $x\in\mathbb{R}$ ως γραμμικός συνδυασμός των P_0,P_1P_2 και P_3.

7. Αν m είναι ένας θετικός ακέραιος και Q είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με $n<m$, τότε ν'αποδειχθεί ότι

$$\int_{-1}^{1} Q(x) P_m(x)\,dx = 0 .$$

8. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο m ισχύει

$$(2m+1)\int_{x}^{1} P_m(x)\,dx = P_{m-1}(x) - P_{m+1}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R} .$$

9. Ν'αποδειχθεί ότι για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m,n με $m \geq n$ ισχύει

$$T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

10. Ν'αποδειχθεί ότι για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m,n ισχύει

$$T_m[T_n(x)] = T_n[T_m(x)] = T_{mn}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$|T_m(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

12. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $m \geq 2$ ισχύει

$$(m-1)T'_{m+1}(x) = 2(m^2-1)T_m(x) + (m+1)T'_{m-1}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

13. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m ισχύει

$$H'_{m+1}(x) = 2(m+1)H_m(x)\,, \quad x \in \mathbb{R} .$$

14. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο m είναι

$$\int_0^x e^{-t^2} H_m(t)\,dt = H_{m-1}(0) - e^{-x^2} H_{m-1}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Ν'αποδειχθεί ότι για τυχόντες μη αρνητικούς ακεραίους m,n ισχύει

$$\int_0^x L_{m+n}(t)\,dt = L_{m+n}(x) - L_{m+n+1}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

16. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m είναι

$$|L_m(x)| \leq e^{x/2}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

<u>17</u>. Να εκφρασθούν οι συναρτήσεις J_3 και J_4 συναρτήσει των J_0 και J_1.

<u>18</u>. Ας είναι m,n δύο μη αρνητικοί ακέραιοι. Ν'αποδειχθεί ότι για όλα τα $x > 0$ είναι

$$\int x^m J_n(x)\,dx = x^m J_{n+1}(x) - (m-n-1)\int x^{m-1} J_{n+1}(x)\,dx, \text{ αν } m > n$$

και

$$\int x^m J_n(x)\,dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1} J_{n-1}(x)\,dx, \text{ αν } 0 < m \leq n.$$

<u>19</u>. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό αριθμό ϑ ισχύουν:

(i) $J'_\vartheta(x) = \frac{1}{2}\,[J_{\vartheta-1}(x) - J_{\vartheta+1}(x)]$, $x > 0$.

(ii) $[x^{-\vartheta} J_\vartheta(x)]' = -x^{-\vartheta} J_{\vartheta+1}(x)$, $x > 0$.

<u>20</u>. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο m ισχύουν:

(i) $\int_0^\infty J_{m+1}(x)\,dx = \int_0^\infty J_{m-1}(x)\,dx$. (ii) $\int_0^\infty J_m(x)\,dx = 1$.

<u>21</u>. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο m είναι

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} J_m(x)\,dx = \frac{1}{m}.$$

<u>22</u>. Αν p είναι ένας μη αρνητικός αριθμός, ν'αποδειχθεί ότι

$$J_p(x) J'_{-p}(x) - J'_p(x) J_{-p}(x) = -2(\pi x)^{-1} \sin px, \quad x > 0.$$

<u>23</u>. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$J'_0(x) = -J_1(x) \text{ και } [xJ_1(x)]' = xJ_0(x).$$

Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο θετικών ριζών της J_0 (αντίστοιχα της J_1) υπάρχει μια ρίζα της J_1 (αντίστοιχα της J_0).

<u>24</u>. Να βρεθούν οι σειρές Fourier ημιτόνων και οι σειρές Fourier συνημιτόνων των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = 3-x$, $x \in [0,3]$.

(ii) $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$.

(iii) $f(x) = x$ για $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ για $x \in (1,2]$.

(iv) $f(x) = x$ για $x \in [-1,0)$, $f(0) = 5$, $f(x) = 1-x$ για $x \in (0,1]$.

25. Να βρεθούν οι γενικές τριγωνομετρικές σειρές Fourier των παρακάτω συναρτήσεων;

(i) $f(x)=0$ για $x\in[-1,0]$, $f(x)=x$ για $x\in(0,1]$.

(ii) $f(x)=-1$ για $x\in[-\pi,0)$, $f(0)=\pi$, $f(x)=x^2$ για $x\in(0,\pi]$.

(iii) $f(x)=|x|$ για $x\in[-\pi,\frac{\pi}{2})$, $f(x)=0$ για $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

26. (i) Να βρεθούν οι τρείς πρώτοι όροι της σειράς Legendre της συνάρτησης f, όπου $f(x)=0$ για $x\in[-1,0]$ και $f(x)=x$ για $x\in(0,1]$. (ii) Να βρεθούν οι τρείς πρώτοι όροι της σειράς Chebyshev για τη συνάρτηση $f(x)=x$ για $x\in[-1,0)$ και $f(x)=1$ για $x\in[0,1]$. (iii) Ας είναι $f(x)=e^x$ για $x\in[0,1]$ και $f(x)=0$ για $x<0$ ή $x>1$. Να βρεθούν οι τρείς πρώτοι όροι της σειράς Hermite της συνάρτησης f. (iv) Αν $f(x)=e^{-x}$, $x\geq 0$, να βρεθούν οι τρείς πρώτοι όροι της σειράς Laguerre της f. (v) Να βρεθεί η σειρά Fourier-Bessel για $p=0$ της συνάρτησης $f(x)=x$, $x\in(0,1]$.

27. Για καθένα απ'τα παρακάτω προβλήματα ιδιοτιμών να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)=1$, $x\in[0,1]$ ως προς μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων:

(i) $y''+\lambda y=0$; $y(0)=0$, $y'(1)=0$.

(ii) $y''+\lambda y=0$; $y(0)-y'(0)=0$, $y(1)-y'(1)=0$.

(iii) $y''+2y'+(\lambda+1)y=0$; $y(0)=0$, $y(1)=0$.

28. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)=\pi-x$, $x\in[0,\pi]$, ως προς την ορθογώνια ακολουθία συναρτήσεων

$$f_m(x)=\sin\frac{(2m-1)x}{2},\quad x\in[0,\pi]\quad (m=1,2,\ldots).$$

5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις γύρω απ'το σημείο $x_0=0$ για τη διαφορική εξίσωση (υπεργεωμετρική διαφορική εξίσωση του Gauss)

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0,$$

όπου a,b,c είναι σταθερές και η σταθερά c δεν είναι ένας ακέραιος.

2. Να βρεθεί η λύση y της διαφορικής εξίσωσης (διαφορική εξίσωση του Airy)

$$y''-xy=0$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0)=1, \quad y'(0)=-1.$$

3. Ας είναι k μια θετική σταθερά. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=J_0(kx)$, $x>0$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$xy''+y'+k^2xy=0.$$

4. Ν'αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $y(x)=u(x)/\sqrt{|x|}$, $x\neq 0$ μετασχηματίζει την διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης p στην εξίσωση

$$u''+\left[1+\left(\frac{1}{4}-p^2\right)\frac{1}{x^2}\right]u=0.$$

Να χρησιμοποιηθεί το συμπέρασμα αυτό για να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης 1/2.

5. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $y(\vartheta)=P_m(\cos\vartheta)$, $0<\vartheta<\pi$, είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''+(\cot\vartheta)y'+m(m+1)y=0.$$

6. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+(1-2s)xy'+[(s^2-r^2\alpha^2)+\beta^2r^2x^{2r}]y=0,$$

όπου s,r,α και β είναι δεδομένες σταθερές. Ν'αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $z=\beta x^r$, $y=x^s w$ μετασχηματίζει την εξίσωση αυτή στη διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης β

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\beta^2)w=0.$$

Ως εφαρμογή, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2y''+5xy'+(3+4x^2)y=0.$$

7. Για τη διαφορική εξίσωση

$$2(\sin x)y''+(1-x)y'-2y=0$$

να βρεθούν δύο λύσεις των μορφών

$$y_1(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \text{ και } y_2(x) = x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n\right].$$

8. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^3y''+xy'-y=0.$$

9. Δίνεται η διαφορική εξίσωση του Legendre

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \quad (\alpha \text{ πραγματική σταθερά}).$$

Ν'αποδειχθεί ότι καθένα απ'τα σημεία -1 και 1 είναι κανονικά ανώμαλα σημεία. Να βρεθεί μια δυναμοσειρά λύση γύρω απ'το σημείο 1, η οποία να γίνεται πολυωνυμική όταν ο α είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.

10. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+e^xy=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

11. Ν'αποδειχθεί ότι $J_0(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,r)$, όπου r είναι ένας θετικός αριθμός. Αν x_0 είναι ένα σημείο του διαστήματος $(0,r)$, τότε ν'αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις J_0 και φ, όπου

$$\varphi(x) = J_0(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t[J_0(t)]^2}\,dt,\quad x \in (0,r),$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις στο διάστημα $(0,r)$ της διαφορικής εξίσωσης του Bessel τάξης 0.

12. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Legendre τάξης p (p πραγματική σταθερά) στο $\{x: |x|>1\}$. (Υπόδειξη: Να γίνει η αντικατάσταση $x=1/t$).

13. Να βρεθούν, με την αντικατάσταση $x=1/t$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2y''+2xy'-m(m+1)y=0 \quad (m \geq 0 \text{ ακέραιος})$$

ορισμένες για $|x|>r$ (r ένας θετικός αριθμός).

14. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$xy'+f(x)y=0,$$

όπου

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n, \quad |x| < r_0 \quad (r_0 > 0).$$

Να βρεθεί μια λύση y της εξίσωσης αυτής της μορφής

$$y(x) = |x|^{-\lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad 0 < |x| < r_0 \quad (c_0 = 1).$$

15. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + x e^x y' + y = 0.$$

16. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x)$, $|x| < 1$ και $y_2(x)$, $|x| < 1$ της διαφορικής εξίσωσης του Legendre τάξης 1. Στη συνέχεια, να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση

$$\tilde{y}(x) = \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

είναι επίσης μια λύση της εξίσωσης. Να εκφρασθεί η $\tilde{y}$ ως γραμμικός συνδυασμός των y_1, y_2.

17. Να βρεθεί μια δυναμοσειρά λύση γύρω απ'το σημείο $x_0 = 0$ της μορφής

$$y(x) = |x| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_0 = 1)$$

για τη διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + (\sin x) y' - (\cos x) y = 0.$$

18. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + e^{2x} y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

19. Να επιλυθεί, με την αντικατάσταση $t = x+2$, η διαφορική εξίσωση

$$(x+2)^2 y'' + 2(x+2) y' + \left(x + \frac{27}{16}\right) y = 0$$

γύρω απ'το σημείο $x_0 = -2$.

20. Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(i) $x^2 y'' - 6y = 0$. (ii) $x^2 y'' + 3xy' + 10y = 0$. (iii) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$.

Θα παρατηρηθεί ότι για καθεμιά απ'αυτές $x_0 = 0$ είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο.

21. Ν'αποδειχθεί ότι για $x > 0$ ισχύουν

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \text{ και } J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

<u>22</u>. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση του Legendre τάξης 0, αφού διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση

$$f_0(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

είναι μια λύση αυτής. Ανάλογα, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση του Legendre τάξης 1, αφού διαπιστωθεί ότι μια λύση της είναι η συνάρτηση

$$f_1(x) = 1 - \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

<u>23</u>. (i) Αν a, b και c είναι σταθερές με $a > b$ και $4c+1 > 0$, να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση

$$[(x-a)(x-b)y']' - cy = 0$$

μπορεί να μετασχηματισθεί σε μια διαφορική εξίσωση του Legendre με την αλλαγή μεταβλητής $x = At+B$, για κατάλληλα $A > 0$ και B. Να προσδιορισθούν τα A και B συναρτήσει των a και b.

(ii) Να μετασχηματισθεί η

$$(x^2-x)y'' + (2x-1)y' - 2y = 0$$

σε μια διαφορική εξίσωση του Legendre.

<u>24</u>. Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m ισχύουν

$$\frac{1}{2}\{[J_m(x)]^2 + [J_{m+1}(x)]^2\}' = \frac{m}{x}[J_m(x)]^2 - \frac{m+1}{x}[J_{m+1}(x)]^2, \quad x > 0$$

και

$$[xJ_m(x)J_{m+1}(x)]' = x\{[J_m(x)]^2 - [J_{m+1}(x)]^2\}, \quad x > 0.$$

Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι για όλα τα $x > 0$

$$[J_0(x)]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[J_n(x)]^2 = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_n(x)J_{n+1}(x) = \frac{1}{2}x.$$

Τέλος, ν'αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$

$$|J_0(x)| \leq 1 \quad \text{και} \quad |J_n(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

<u>25</u>. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, ν'αποδειχθεί ότι η σημειούμενη αντικατάσταση μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση σε μια εξίσωση του Bessel. Να εκφρασθεί τουλάχιστον μια μη τετριμμένη λύση συναρτήσει μιας κατάλληλης συνάρτησης Bessel:

(i) $x^2y''+xy'+(36x^4-1)y=0$; $x=\sqrt{t}/\sqrt{3}$.

(ii) $4x^2y''+4xy'+\left(x-\frac{4}{9}\right)y=0$; $x=t^2$.

(iii) $xy''-3y'+xy=0$; $y(x)=x^2z(x)$.

(iv) $y''+xy=0$; $y(x)=x^{1/2}z(2x^{3/2}/3)$.

(v) $xy''-y'+4x^3y=0$; $y(x)=xz(x^2)$.

26. Για καθεμιά απ'τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις να βρεθού οι λύσεις y της μορφής

$$y(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{x}\right)^n,\quad x>M,$$

όπου $\sigma\in\mathbb{R}$, $c_0\neq 0$ και M είναι μια θετική σταθερά:

(i) $x^3y''+2x^2y'-y=0$.

(ii) $x^4y''+(2x^3+x)y'+2y=0$.

(iii) $x^3y''+(x^2+x)y'-y=0$.

VI. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ LAPLACE

Στο Κεφάλαιο αυτό γίνεται μια διαπραγμάτευση των μετασχηματισμών Laplace (Εδάφιο 1) και αναπτύσσεται το θέμα της επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων με μετασχηματισμούς Laplace (Εδάφιο 2). Σε καθένα απ'τα Εδάφια 1 και 2 δίνονται παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση. Το Εδάφιο 3 περιέχει μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

Το Εδάφιο αυτό αναφέρεται στους μετασχηματισμούς Laplace. Δίνεται ο ορισμός του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης και, στη συνέχεια, δίνονται (Θεώρημα 1) ικανές συνθήκες για να ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης. Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace αναπτύσσονται στα Θεωρήματα 2-8. Ένας μικρός πίνακας των μετασχηματισμών του Laplace μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων δίνεται στο Θεώρημα 9. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται το Θεώρημα συνέλιξης (Θεώρημα 10). Επίσης, εξετάζονται οι συναρτήσεις μοναδιαίου βήματος καθώς και οι συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης και βρίσκονται οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών (Θεωρήματα 11 και 13). Το Θεώρημα 12 δίνει μια ακόμα χρήσιμη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης. Ορίζεται, έπειτα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης και δίνονται δύο ιδιότητες αυτού (Θεωρήματα 15 και 16). Για το μονοσήμαντο του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace μιας συνάρτησης αποδεικνύεται το Θεώτημα του Lerch (Θεώρημα 14). Τέλος, δίνονται μερικά παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση.

1.1. Ο μετασχηματισμός Laplace

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0,\infty)$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό s, θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$. Είναι δυνατό το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα να μη συγκλίνει για όλα τα $s\in\mathbb{R}$, όπως αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου $f(x)=e^{x^2}$, $x\geq 0$. Αν όμως για κάποια τιμή s_0 του s το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε ο τύπος

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ορίζει μια πραγματική συνάρτηση $\mathcal{L}[f]$ με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών s για τους οποίους το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Η συνάρτηση $\mathcal{L}[f]$ λέμε ότι είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f. Πολλές φορές γράφουμε $\mathcal{L}[f(x)]$ αντί $\mathcal{L}[f]$.

Παραπάνω, υποθέσαμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Η υπόθεση αυτή πληρούται όταν η f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ ή ακόμα όταν η f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Υπενθυμίζουμε ότι μια πραγματική συνάρτηση g θα λέμε ότι είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\dots<x_k=b$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε, για κάθε $i\in\{0,1,\dots,k-1\}$, η g είναι συνεχής στο (x_i,x_{i+1}) και τα πλευρικά όρια $g(x_i+0)=\lim\limits_{x\to x_i+0}g(x)$ και $g(x_{i+1}-0)=\lim\limits_{x\to x_{i+1}-0}g(x)$ υπάρχουν (ως πραγματικοί αριθμοί).

Είναι εύκολο να δούμε ότι, αν η πραγματική συνάρτηση f που ορίζεται στο $[0,\infty)$ είναι φραγμένη σε ένα διάστημα $[x_0,\infty)$ για κάποιο $x_0\geq 0$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$, τότε $\mathcal{L}[f](s)$ ορίζεται για όλα τα $s>0$. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται με αντικατάσταση της υπόθεσης ότι η f είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα της μορφής $[x_0,\infty)$, $x_0\geq 0$ με την υπόθεση ότι η f είναι εκθετικής τάξης r (όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός), οπότε $\mathcal{L}[f](s)$ ορίζεται για κάθε $s>r$.

Αν r είναι ένας πραγματικός αριθμός και f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,\infty)$, θα λέμε ότι η f είναι <u>εκθετικής τάξης</u> r αν και μόνο αν υπάρχουν ένα $x_0 \geqq 0$ και μια μη αρνητική σταθερά M έτσι ώστε

$$|f(x)| \leqq Me^{rx} \text{ για κάθε } x \geqq x_0.$$

Είναι φανερό ότι, αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, τότε η f είναι εκθετικής τάξης 0 όταν και μόνο όταν αυτή είναι φραγμένη στο $[x_0,\infty)$ για κάποιο $x_0 \geqq 0$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Αν η f είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $\mathcal{L}[f](s)$ ορίζεται για όλα τα $s>r$.</u>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι, για όλα τα $s>r$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-sx}|f(x)|dx$$

συγκλίνει. Επειδή η f είναι εκθετικής τάξης r, θα υπάρχουν $x_0 \geqq 0$ και $M \geqq 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leqq Me^{rx} \text{ για κάθε } x \geqq x_0.$$

'Ετσι, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}|f(x)|dx &= \int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|dx+\int_{x_0}^\infty e^{-sx}|f(x)|dx\\ &\leqq \int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|dx+M\int_{x_0}^\infty e^{-(s-r)x}dx\\ &= \int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|dx+M\left[-\frac{e^{-(s-r)x}}{s-r}\right]_{x_0}^\infty\\ &= \int_0^{x_0} e^{-sx}|f(x)|dx+M\,\frac{e^{-(s-r)x_0}}{s-r}\end{aligned}$$

για κάθε $s>r$, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα.

1.2. Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Θα δώσουμε εδώ μερικές βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Η πρώτη απ'αυτές τις ιδιότητες είναι η γραμμικότητα του τελεστή $\mathcal{L}$, που προκύπτει άμεσα απ'τον ορισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ας είναι f_1 και f_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$ και c_1 και c_2 δύο πραγματικές σταθερές. Αν $\mathcal{L}[f_1](s)$ και $\mathcal{L}[f_2](s)$ ορίζονται για κάθε $s > s_0$, τότε $\mathcal{L}[c_1f_1+c_2f_2](s)$ ορίζεται επίσης για όλα τα $s > s_0$, και μάλιστα

$$\mathcal{L}[c_1f_1+c_2f_2](s) = c_1\mathcal{L}[f_1](s)+c_2\mathcal{L}[f_2](s), \quad s > s_0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$ και c ένας πραγματικός αριθμός. Θέτουμε

$$g(x) = e^{cx}, \quad x \geq 0.$$

Αν $\mathcal{L}[f](s)$ ορίζεται για κάθε $s > s_0$, τότε $\mathcal{L}[gf](s)$ ορίζεται για όλα τα $s > s_0+c$, και μάλιστα

$$\mathcal{L}[gf](s) = \mathcal{L}[f](s-c), \quad s > s_0+c.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $s > s_0+c$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}g(x)f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}e^{cx}f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-c)x}f(x)\,dx,$$

το οποίο αποδεικνύει το Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$ και $c > 0$ μια σταθερά. Θέτουμε

$$g(x) = f(cx), \quad x \geq 0.$$

Αν $\mathcal{L}[f](s)$ ορίζεται για κάθε $s > s_0$, τότε $\mathcal{L}[g](s)$ ορίζεται για όλα τα $s > cs_0$, και μάλιστα

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{c}\,\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > cs_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τυχόν $s > cs_0$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}g(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}t}\,f(t)\,dt.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση που είναι n φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f^{(n)}$ είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$ και ότι οι συναρτήσεις $f^{(k)}$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι μια πραγματική σταθερά. Τότε $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)$ ορίζεται για κάθε $s>r$ και

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0), \quad s>r.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θ'αποδείξουμε πρώτα το Θεώρημα για $n=1$. Δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$, η οποία είναι εκθετικής τάξης $r\in\mathbb{R}$ και της οποίας η παράγωγος g' είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$, και θ'αποδείξουμε ότι $\mathcal{L}[g'](s)$ ορίζεται για $s>r$ και

$$\mathcal{L}[g'](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0), \quad s>r.$$

Θεωρούμε τυχόν $a>0$. Επειδή η g' είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[0,a]$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες για να πάρουμε

$$\int_0^a e^{-sx}g'(x)\,dx = e^{-sx}g(x)\Big|_0^a + s\int_0^a e^{-sx}g(x)\,dx$$

$$= e^{-sa}g(a) - g(0) + s\int_0^a e^{-sx}g(x)\,dx$$

για όλα τα $s\in\mathbb{R}$. Αλλά η συνάρτηση g είναι εκθετικής τάξης r που σημαίνει ότι υπάρχουν $x_0\geq 0$ και $M\geq 0$ έτσι ώστε

$$|g(x)| \leq Me^{rx} \text{ για κάθε } x\geq x_0.$$

'Ετσι, για κάθε $s\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{-sa}|g(a)| \leq Me^{-(s-r)a}, \text{ εφόσον } a\geq x_0.$$

'Αρα, αν $s>r$, τότε

$$\lim_{a\to\infty} e^{-sa}g(a) = 0.$$

Επομένως, για όλα τα $s>r$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}g'(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-sx}g'(x)\,dx = -g(0) + s\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-sx}g(x)\,dx$$

$$= -g(0)+s\int_0^{\infty} e^{-sx} g(x)dx,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου $n > 1$. Αν k είναι ένας ακέραιος με $1 \leq k \leq n$, τότε η συνάρτηση $g = f^{(k-1)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης r καθώς επίσης η παράγωγός της $g' = f^{(k)}$ είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$ (για $k < n$ η g' είναι συνεχής στο $[0,\infty)$). Έτσι, με βάση το θεώρημα για $n = 1$ που αποδείχθηκε παραπάνω, έχουμε

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s\mathcal{L}[f^{(k-1)}](s) - f^{(k-1)}(0), \quad s > r \quad (k = 1,\ldots,n),$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^{n-1}\mathcal{L}[f](s) - [f^{(n-1)}(0) + sf^{(n-2)}(0) + \ldots + s^{n-1}f(0)], \quad s > r.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6</u>. <u>Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, και συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με</u>

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \geq 0.$$

<u>Τότε $\mathcal{L}[g](s)$ ορίζεται για κάθε $s > \max\{0,r\} = r_0$ και</u>

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[f](s), \quad s > r_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$, η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,\infty)$. Εξάλλου, η g είναι εκθετικής τάξης q όπου $q = r$ για $r > 0$, $q = 0$ για $r < 0$, και q είναι τυχών θετικός αριθμός για $r = 0$. Πραγματικά· επειδή η f είναι εκθετικής τάξης r, θα υπάρχουν $x_0 \geq 0$ και $M \geq 0$ έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq Me^{rx} \text{ για κάθε } x \geq x_0.$$

Θέτοντας $K = \int_0^{x_0} |f(x)|dx$, για κάθε $x \geq x_0$ παίρνουμε

$$|g(x)| \leq \int_0^{x_0} |f(x)|dx + \int_{x_0}^{x} |f(t)|dt \leq K + M\int_{x_0}^{x} e^{rt}dt.$$

Αν $r > 0$, τότε για κάθε $x \geq x_0$ έχουμε

$$|g(x)| \leq K + \frac{M}{r}(e^{rx} - e^{rx_0}) \leq K + \frac{M}{r}e^{rx} \leq \left(K + \frac{M}{r}\right)e^{rx}$$

και άρα η g είναι εκθετικής τάξης r. Στην περίπτωση όπου $r < 0$, παίρνουμε για $x \geq x_0$

$$|g(x)| \leq K + \frac{M}{r}(e^{rx} - e^{rx_0}) \leq \left(K - \frac{M}{r}e^{rx_0}\right)e^{0x},$$

που σημαίνει ότι η g είναι εκθετικής τάξης 0. Τέλος, όταν $r=0$, τότε

$$|g(x)| \leq \Lambda + Mx, \quad x \geq x_0,$$

όπου $\Lambda = K - Mx_0$. Στην περίπτωση αυτή, για κάθε $\gamma > 0$, έχουμε $\lim\limits_{x\to\infty} [(\Lambda+Mx)/e^{\gamma x}] = 0$ που εξασφαλίζει ότι υπάρχουν $x_0^* \geq x_0$ και $M^* \geq 0$ τέτοια ώστε $\Lambda + Mx \leq M^* e^{\gamma x}$ για $x \geq x_0^*$, οπότε

$$|g(x)| \leq M^* e^{\gamma x} \text{ για κάθε } x \geq x_0^*.$$

Έτσι, στην τελευταία αυτή περίπτωση η g είναι εκθετικής τάξης γ για κάθε $\gamma > 0$.

Θεωρούμε τώρα ένα οποιοδήποτε αριθμό s με $s > r_0 = \max\{0, r\}$. Εκλέγουμε ένα αριθμό r_1 με $s > r_1 > r_0$. Τότε, σ'όλες τις περιπτώσεις για το r, η συνάρτηση g είναι εκθετικής τάξης r_1 και επομένως υπάρχουν $x_1 \geq x_0$ και $N \geq 0$ έτσι ώστε

$$|g(a)| \leq N e^{r_1 a} \text{ για κάθε } a \geq x_1,$$

δηλαδή

$$e^{-sa}|g(a)| \leq N e^{-(s-r_1)a} \text{ για όλα τα } a \geq x_1.$$

Αυτό εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{a\to\infty} e^{-sa} g(a) = 0,$$

για $s > r_1$. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο $a > 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[0,a]$ και επομένως υπάρχει μια διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_\lambda = a$ του $[0,a]$ έτσι ώστε, για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,\lambda-1\}$, η f να είναι συνεχής στο (a_k, a_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f(a_k+0)$ και $f(a_{k+1}-0)$ να υπάρχουν. Για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,\lambda-1\}$, η συνάρτηση f_k με

$$f_k(x) = f(x) \text{ για } x \in (a_k, a_{k+1}),\ f_k(a_k) = f(a_k+0),\ f_k(a_{k+1}) = f(a_{k+1}-0)$$

είναι συνεχής στο $[a_k,a_{k+1}]$ και έτσι η συνάρτηση g_k με

$$g_k(x) = \int_{a_k}^{x} f_k(t)dt, \quad x \in [a_k,a_{k+1}]$$

είναι παραγωγίσιμη και $g_k' = f_k$ στο $[a_k,a_{k+1}]$, και επομένως

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}g_k(x)dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}g_k(x)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + \frac{1}{s}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}f_k(x)dx.$$

Τώρα, έχουμε

$$\int_0^a e^{-sx}g(x)dx = \sum_{k=0}^{\lambda-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}g(x)dx = \sum_{k=0}^{\lambda-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}[g(a_k)+g_k(x)]dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1}\left\{-\frac{1}{s}e^{-sx}g(a_k)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}g_k(x)dx\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1}\left\{-\frac{1}{s}e^{-sx}g(a_k)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{1}{s}e^{-sx}g_k(x)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}f_k(x)dx\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1}\left\{-\frac{1}{s}e^{-sx}[g(a_k)+g_k(x)]\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + \frac{1}{s}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}f(x)dx\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1}\left\{-\frac{1}{s}e^{-sx}g(x)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + \frac{1}{s}\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-sx}f(x)dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-sx}g(x)\Big|_0^a + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-sx}f(x)dx$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-sa}g(a) + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-sx}f(x)dx.$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-sx}g(x)dx = -\frac{1}{s}\lim_{a\to\infty} e^{-sa}g(a) + \frac{1}{s}\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-sx}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx,$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα, αφού s είναι τυχαίος αριθμός με $s > r_0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, και συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$. Ας θέσουμε

$$g_n(x) = x^n f(x),\quad x \geq 0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Τότε $\mathcal{L}[f]$ έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα (r,∞) και

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s) = (-1)^n\mathcal{L}[g_n](s),\quad s > r \quad (n=1,2,\ldots).$$

Στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος θα θεωρήσουμε γνωστό ότι: Αν h είναι μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι εκθετικής τάξης ρ, όπου $\rho \in \mathbb{R}$, και συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$, τότε η συνάρτηση

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-sx}h(x)dx,\quad s > \rho$$

είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$H'(s) = -\int_0^\infty xe^{-sx}h(x)dx \text{ για κάθε } s > \rho.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 7. Αν γ είναι ένας θετικός αριθμός, τότε είναι $\lim_{x\to\infty}[x^n/e^{\gamma x}] = 0$ $(n=1,2,\ldots)$. Έτσι, μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι οι συναρτήσεις g_n $(n=1,2,\ldots)$ είναι εκθετικής τάξης $r+\gamma$ για κάθε θετικό άριθμό γ. Επίσης, οι συναρτήσεις g_n $(n=1,2,\ldots)$ είναι συνεχείς κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$. Άρα, για οποιοδήποτε $n \in \{1,2,\ldots\}$, $\mathcal{L}[g_n](s)$ ορίζεται για όλα τα $s > r+\gamma$, όπου γ είναι τυχών θετικός αριθμός, δηλαδή $\mathcal{L}[g_n](s)$ ορίζεται για κάθε $s > r$.

Για κάθε $s > r$ έχουμε

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = -\int_0^\infty e^{-sx}[xf(x)]dx$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-sx} g_1(x)\,dx = (-1)^1 \mathcal{L}[g_1](s),$$

δηλαδή το συμπέρασμά μας ισχύει για $n=1$. Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι

$$\frac{d^m}{ds^m} \mathcal{L}[f](s) = (-1)^m \mathcal{L}[g_m](s), \quad s > r,$$

όπου m είναι ένας θετικός ακέραιος. Ας είναι γ ένας τυχών θετικός αριθμός. Τότε θα έχουμε, εφαρμόζοντας το μερικό συμπέρασμα που αποδείξαμε παραπάνω με τη συνάρτηση g_m στη θέση της f, ότι

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[g_m](s) = (-1)^1 \mathcal{L}[g_{m+1}](s) \text{ για } s > r+\gamma.$$

Αυτό όμως ισχύει για κάθε $\gamma > 0$ και επομένως είναι

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[g_m](s) = (-1)^1 \mathcal{L}[g_{m+1}](s) \text{ για κάθε } s > r.$$

Έτσι, παίρνουμε για όλα τα $s > r$

$$\frac{d^{m+1}}{ds^{m+1}} \mathcal{L}[f](s) = (-1)^{m+1} \mathcal{L}[g_{m+1}](s).$$

Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής έχει λοιπόν αποδειχθεί το θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0,\infty)$, η οποία είναι περιοδική με περίοδο $\omega > 0$, δηλαδή τέτοια ώστε

$$f(x+\omega) = f(x) \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,\omega]$. Τότε $\mathcal{L}[f](s)$ ορίζεται για όλα τα $s > 0$ και

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-s\omega}} \int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)\,dx, \quad s > 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $s > 0$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+1)\omega} e^{-sx} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\omega}^{(n+1)\omega} e^{-sx} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega} e^{-s(t+n\omega)} f(t+n\omega)\,dt$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns\omega} \right) \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-e^{-s\omega}} \int_0^{\omega} e^{-st} f(t)dt,$$

το οποίο αποδεικνύει το Θεώρημα.

1.3. Οι μετασχηματισμοί Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων

Με τη βοήθεια του ορισμού και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace, μπορούν να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace διαφόρων στοιχειωδών συναρτήσεων. Στο παρακάτω Θεώρημα δίνουμε ένα πίνακα που περιέχει τους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων. Ο πίνακας αυτός καλύπτει πολλές απ'τις περιπτώσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. Ας είναι n ένας θετικός ακέραιος και $a \neq 0$, $b \neq 0$ πραγματικές σταθερές. Για μερικές συναρτήσεις $f(x)$, $x \geq 0$ ο παρακάτω πίνακας δίνει τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace $\mathcal{L}[f](s)$, $s > s_0$.

	$f(x)$, $x \geq 0$	$\mathcal{L}[f](s)$, $s > s_0$
1.	1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
2.	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
3.	$\sin bx$	$\frac{b}{s^2+b^2}$, $s > 0$
4.	$\cos bx$	$\frac{s}{s^2+b^2}$, $s > 0$
5.	$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
6.	$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
7.	$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
8.	$e^{ax}\cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
9.	x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
10.	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$

11.	$x \sin bx$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$, $s>0$
12.	$x \cos bx$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$, $s>0$
13.	$\sin bx - bx\cos bx$	$\frac{2b^3}{(s^2+b^2)^2}$, $s>0$.

Στις περιπτώσεις 9 και 10 μπορεί ο n να μην είναι ακέραιος αρκεί ν'αντικατασταθεί το n! με το Γ(n+1).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα βρούμε, με τη βοήθεια του ορισμού, τους μετασχηματισμούς Laplace της σταθερής συνάρτησης 1 στο $[0,\infty)$ και της συνάρτησης $\sin x$, $x \geq 0$. Οι μετασχηματισμοί Laplace όλων των συναρτήσεων του πίνακα προκύπτουν τότε με την βοήθεια των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace.

Για όλα τα $s>0$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}dx = -\frac{1}{s}\,e^{-sx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s},$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \text{ για κάθε } s>0.$$

Επίσης, για κάθε $s>0$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}\sin x\,dx = -e^{-sx}\cos x\Big|_0^\infty - s\int_0^\infty e^{-sx}\cos x\,dx = 1 - s\int_0^\infty e^{-sx}\cos x\,dx$$

$$= 1 - se^{-sx}\sin x\Big|_0^\infty - s^2\int_0^\infty e^{-sx}\sin x\,dx = 1 - s^2\int_0^\infty e^{-sx}\sin x\,dx$$

και επομένως

$$\int_0^\infty e^{-sx}\sin x\,dx = \frac{1}{s^2+1}.$$

'Αρα

$$\mathcal{L}[\sin x](s) = \frac{1}{s^2+1} \text{ για κάθε } s>0.$$

1. 'Εχουμε ήδη βρεί τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης 1 στο $[0,\infty)$.

2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, για κάθε $s>0+a=a$ έχουμε

$$\mathcal{L}[e^{ax}](s) = \mathcal{L}[e^{ax}\cdot 1](s) = \mathcal{L}[1](s-a) = \frac{1}{s-a}.$$

3. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4 και παίρνουμε για όλα τα $s>b\cdot 0=0$

$$\mathcal{L}[\sin bx](s) = \frac{1}{b}\,\mathcal{L}[1]\left(\frac{s}{b}\right) = \frac{1}{b}\,\frac{1}{(s/b)^2+1} = \frac{b}{s^2+b^2},$$

εφόσον $b>0$. Αν $b<0$, τότε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2, για τυχόν $s>0$ έχουμε

$$\mathcal{L}[\sin bx](s) = -\mathcal{L}[\sin(-b)x](s) = -\frac{-b}{s^2+(-b)^2} = \frac{b}{s^2+b^2}.$$

4. Με χρήση των Θεωρημάτων 2 και 5, παίρνουμε για όλα τα $s>0$

$$b\mathcal{L}[\cos bx](s) = \mathcal{L}[b\cos bx](s) = \mathcal{L}[(\sin bx)'](s) = s\mathcal{L}[\sin bx](s) -$$

$$-\sin(b\cdot 0) = s\mathcal{L}[\sin bx](s) = s\,\frac{b}{s^2+b^2},$$

απ' όπου προκύπτει

$$\mathcal{L}[\cos bx](s) = \frac{s}{s^2+b^2}.$$

5. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2, έχουμε για $s>|a|$

$$\mathcal{L}[\sinh ax](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\,(e^{ax}-e^{-ax})\right](s) = \frac{1}{2}\,\{\mathcal{L}[e^{ax}](s) - \mathcal{L}[e^{(-a)x}](s)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-(-a)}\right] = \frac{a}{s^2-a^2}.$$

6. Όπως ακριβώς στην προηγούμενη περίπτωση, έχουμε για $s>|a|$

$$\mathcal{L}[\cosh ax](s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-(-a)}\right] = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

7. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, για όλα τα $s>0+a=a$ έχουμε

$$\mathcal{L}[e^{ax}\sin bx](s) = \mathcal{L}[\sin bx](s-a) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

8. Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

9. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7 και παίρνουμε για κάθε $s>0$

$$(-1)^n\mathcal{L}[x^n](s) = \frac{d^n}{ds^n}\,\mathcal{L}[1](s) = \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n\,\frac{n!}{s^{n+1}},$$

απ' όπου προκύπτει

$$\mathcal{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

10. Με βάση το Θεώρημα 3, για όλα τα $s>a$ είναι

$$\mathcal{L}[x^n e^{ax}](s) = \mathcal{L}[x^n](s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

11. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7, για όλα τα $s>0$ έχουμε

$$\mathcal{L}[x\sin bx](s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}[\sin bx](s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}.$$

12. Όπως στην προηγούμενη περίπτωση μπορούμε να εργασθούμε για να βρούμε

$$\mathcal{L}[x\cos bx](s) = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}, \quad s>0.$$

13. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2, για κάθε $s>0$ παίρνουμε

$$\mathcal{L}[\sin bx - bx\cos bx](s) = \mathcal{L}[\sin bx](s) - b\mathcal{L}[x\cos bx](s)$$
$$= \frac{b}{s^2+b^2} - b\,\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2} = \frac{2b^3}{(s^2+b^2)^2}.$$

Τέλος, ας επανέλθουμε στην περίπτωση 9 και ας υποθέσουμε ότι ο n είναι ένας θετικός αριθμός όχι αναγκαστικά ακέραιος. Για κάθε $s>0$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^n dx = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{s^n}\frac{dt}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt.$$

Η γάμμα συνάρτηση Γ ορίζεται, όπως είναι γνωστό, ως εξής

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}dt, \quad r>0.$$

Έτσι, έχουμε

$$\mathcal{L}[x^n](s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \quad s>0.$$

1.4. <u>Η συνέλιξη</u>. <u>Το Θεώρημα συνέλιξης</u>

Ας είναι f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,\infty)$, οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Τότε η συνάρτηση $f*g$ με

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt, \quad x\geq 0$$

λέμε ότι είναι η <u>συνέλιξη</u> των f και g. Ισχύει $f*g=g*f$, γιατί για κάθε $x\geq 0$ είναι

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = -\int_x^0 f(\xi)g(x-\xi)d\xi = \int_0^x f(\xi)g(x-\xi)d\xi.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 10</u> (<u>Θεώρημα συνέλιξης</u>). <u>Ας είναι f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,\infty)$, οι οποίες είναι εκθετικών τάξεων r_1 και r_2 αντίστοιχα, όπου r_1 και r_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, και συνεχείς κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$.</u>

<u>Τότε</u> $[f*g](s)$ <u>ορίζεται για όλα τα</u> $s > \max\{r_1, r_2\}$ <u>και</u>

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s), \quad s > \max\{r_1, r_2\}.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 10 θα θεωρήσουμε γνωστό το γεγονός ότι οι υποθέσεις για τις f και g εξασφαλίζουν τη δυνατότητα της αλλαγής της σειράς ολοκλήρωσης στο γενικευμένο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{-su} f(u-t)\, g(t)\, du\, dt$$

με

$$D = \{(u,t) : t \geqq 0,\ u \geqq t\} = \{(u,t) : u \geqq 0,\ 0 \leqq t \leqq u\},$$

οπότε έχουμε

$$\int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-su} f(u-t)\, g(t)\, du\right] dt = \int_0^\infty \left[\int_0^u e^{-su} f(u-t)\, g(t)\, dt\right] du.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 10. Η συνέλιξη $f*g$ των συναρτήσεων f και g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,\infty)$. Επίσης, εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $f*g$ είναι εκθετικής τάξης $r+\gamma$, όπου $r = \max\{r_1, r_2\}$, για κάθε θετικό αριθμό γ. Έτσι, $\mathcal{L}[f*g](s)$ ορίζεται για $s > r+\gamma$ και για οποιοδήποτε $\gamma > 0$, δηλαδή $\mathcal{L}[f*g](s)$ ορίζεται για όλα τα $s > r$.

Για κάθε $s > r$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) &= \left[\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx\right] \left[\int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt\right] \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-s(x+t)} f(x)\, dx\right] g(t)\, dt = \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-su} f(u-t)\, du\right] g(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \left[\int_t^\infty e^{-su} f(u-t)\, g(t)\, du\right] dt \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^u e^{-su} f(u-t)\, g(t)\, dt\right] du \\
&= \int_0^\infty e^{-su} \left[\int_0^u f(u-t)\, g(t)\, dt\right] du = \int_0^\infty e^{-su} (f*g)(u)\, du \\
&= \mathcal{L}[f*g](s).
\end{aligned}$$

1.5. Συναρτήσεις μοναδιαίου βήματος. Συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης

Ας είναι $a \geq 0$ μια σταθερά. Τότε η συνάρτηση H_a με

$$H_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < a \\ 1, & \text{αν } x \geq a \end{cases}$$

θα λέμε ότι είναι μια <u>συνάρτηση μοναδιαίου βήματος</u>. Ειδικά, για $a = 0$ έχουμε τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος $H = H_0$,

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$$

η οποία λέγεται <u>συνάρτηση του Heaviside</u>. Παρατηρούμε ότι

$$H_a(x) = H(x-a) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, μια σταθερά $c \neq 0$. Η συνάρτηση $H_{a,c}$ με

$$H_{a,c}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < a \\ c, & \text{αν } x \geq a \end{cases}$$

(για την οποία λέμε ότι είναι μια <u>συνάρτηση βήματος</u>) εκφράζεται με τη βοήθεια της H_a, αφού $H_{a,c} = cH_a$. Για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης H_a έχουμε

$$\mathcal{L}[H_a](s) = \int_0^\infty e^{-sx} H_a(x)\,dx = \int_a^\infty e^{-sx}dx = -\frac{1}{s} e^{-sx}\Big|_a^\infty = \frac{1}{s} e^{-sa}$$

για όλα τα $s > 0$. Έχουμε έτσι το παρακάτω Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 11</u>. <u>Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος</u> H_a, <u>όπου</u> a <u>είναι μια μη αρνητική σταθερά, δίνεται απ' τον τύπο</u>

$$\mathcal{L}[H_a](s) = \frac{1}{s} e^{as}, \quad s > 0.$$

Πριν προχωρήσουμε στις συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης θα δώσουμε μια ακόμα χρήσιμη ιδιότητα των μετασχηματισμών Laplace.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 12</u>. <u>Ας είναι</u> f <u>μια πραγματική συνάρτηση στο</u> $[0,\infty)$ <u>και</u> $a > 0$ <u>μια σταθερά</u>. <u>Θέτουμε</u>

$$g(x) = \begin{cases} f(x-a), & \text{αν } x \geq a \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x < a. \end{cases}$$

<u>Αν</u> $\mathcal{L}[f](s)$ <u>ορίζεται για όλα τα</u> $s>s_0$, <u>τότε</u> $\mathcal{L}[g](s)$ <u>ορίζεται επίσης για κάθε</u> $s>s_0$ <u>και</u>

$$\mathcal{L}[g](s)=e^{-as}\mathcal{L}[f](s),\quad s>s_0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $s>s_0$ έχουμε

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}g(x)\,dx=\int_a^{\infty}e^{-sx}f(x-a)\,dx=\int_0^{\infty}e^{-s(a+t)}f(t)\,dt=e^{-sa}\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt,$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα.

Ας είναι a ένας μη αρνητικός αριθμός. Αν ε είναι μια "μικρή" θετική σταθερά, τότε η συνάρτηση $I_{a,\varepsilon}$ με

$$I_{a,\varepsilon}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{αν } a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\\[2ex] 0, & \text{αν } x\leq a-\varepsilon \text{ ή } x\geq a+\varepsilon\end{cases}$$

θα λέμε ότι είναι μια <u>συνάρτηση μοναδιαίας ώθησης</u>. Αν, επιπλέον, h είναι μια "μεγάλη" θετική σταθερά, τότε η συνάρτηση $I_{a,\varepsilon,h}$ με

$$I_{a,\varepsilon,h}(x)=\begin{cases}h, & \text{αν } a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\\[2ex] 0, & \text{αν } x\leq a-\varepsilon \text{ ή } x\geq a+\varepsilon\end{cases}$$

λέμε ότι είναι μια <u>συνάρτηση ώθησης</u>. Παρατηρούμε ότι $I_{a,\varepsilon,h}=2\varepsilon h I_{a,\varepsilon}$. Έχουμε

$$\Omega_{a,\varepsilon}=\int_{-\infty}^{\infty}I_{a,\varepsilon}(x)\,dx=\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\,dx=1.$$

Έτσι, στο όριο για $\varepsilon\to 0$, έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{a,\varepsilon}(x)=0 \text{ για } x\neq a \text{ και } \lim_{\varepsilon\to 0}\Omega_{a,\varepsilon}=1.$$

Απ' το συμπέρασμα αυτό παίρνουμε τη <u>δέλτα συνάρτηση του Dirac</u> δ_a, η οποία πληροί τις συνθήκες

$$\delta_a(x)=0 \text{ για } x\neq a \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(x)\,dx=1.$$

Αν $a=0$, τότε έχουμε τη δέλτα συνάρτηση του Dirac δ_0 που θα τη συμβολίζουμε πιο απλά με δ. Είναι $\delta_a(x)=\delta(x-a)$ για όλα τα x, και οι παραπάνω συνθήκες γράφονται

$$\delta(x-a)=0 \text{ για } x\neq a \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1.$$

Αν f είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $(-\infty,\infty)$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,dx = f(a).$$

Πραγματικά' έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} I_{a,\varepsilon}(x) f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{2\varepsilon} f(x_\varepsilon) \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_\varepsilon),$$

όπου $a-\varepsilon < x_\varepsilon < a+\varepsilon$. Είναι $x_\varepsilon \to a$ όταν $\varepsilon \to 0$ και έτσι, επειδή η f είναι συνεχής, θα έχουμε $f(x_\varepsilon) \to f(a)$ για $\varepsilon \to 0$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Αν $a > 0$, τότε για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μοναδιαίας ώθησης $I_{a,\varepsilon}$ έχουμε για κάθε $s > 0$

$$\mathcal{L}[I_{a,\varepsilon}](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} I_{a,\varepsilon}(x)\,dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-sx} \frac{1}{2\varepsilon}\,dx = \frac{1}{2\varepsilon s}\left[-e^{-sx}\right]_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$$

$$= \frac{e^{-as}}{2\varepsilon s}\left(e^{s\varepsilon} - e^{-s\varepsilon}\right) = \frac{e^{-as}}{\varepsilon s} \sinh \varepsilon s,$$

όπου υποθέσαμε ότι $a-\varepsilon > 0$. Για την περίπτωση $a > 0$ μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της δ_a ως το όριο του μετασχηματισμού Laplace της $I_{a,\varepsilon}$ όταν $\varepsilon \to 0$, οπότε για κάθε $s > 0$ παίρνουμε

$$\mathcal{L}[\delta_a](s) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{L}[I_{a,\varepsilon}](s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{-as}}{\varepsilon s} \sinh \varepsilon s\right)$$

$$= e^{-as}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon s}\right)\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-e^{-2\varepsilon s}}{2\varepsilon s}\right) = e^{-as}.$$

Για την περίπτωση $a = 0$, ορίζουμε $\mathcal{L}[\delta](s) = \lim_{\xi\to 0} \mathcal{L}[\delta_\xi](s)$ για $s > 0$. Έτσι, έχουμε

$$\mathcal{L}[\delta](s) = 1, \quad s > 0.$$

Τα τελευταία αυτά συμπεράσματα για τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων μοναδιαίας ώθησης και των δέλτα συναρτήσεων του Dirac τα συνοψίζουμε στο παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μοναδιαίας ώθησης $I_{a,\varepsilon}$, όπου $0 < \varepsilon \leq a$, δίνεται απ' τον τύπο

$$\mathcal{L}[I_{a,\varepsilon}](s) = \frac{e^{-as}}{\varepsilon s} \sinh \varepsilon s, \quad s > 0.$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace της δέλτα συνάρτησης του Dirac δ_a, όπου $a \geq 0$, είναι

$$\mathcal{L}[\delta_a](s) = e^{-as}, \quad s > 0.$$

1.6. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ας είναι F μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ'ένα διάστημα της μορφής (r,∞) για κάποιο πραγματικό αριθμό r. Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοια ώστε $\mathcal{L}[f](s)$ να ορίζεται για όλα τα $s > r$ και

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s), \quad s > r,$$

τότε θα λέμε ότι f είναι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης F και θα γράφουμε $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$ ή ακόμα $f = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Δημιουργείται αμέσως το ερώτημα κατά πόσο υπάρχει ένας τουλάχιστον αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης F˙ η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι "όχι αναγκαστικά". Κάτω απ'ορισμένες συνθήκες που αναφέρονται στη συνέχεια της συνάρτησης F και στη συμπεριφορά αυτής σε μια περιοχή του ∞, μπορεί να εξασφαλισθεί η ύπαρξη αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της F. Ένα δεύτερο ερώτημα που μπαίνει είναι, εφόσον υπάρχει ένας τουλάχιστον αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F, αυτός είναι μοναδικός; Στο ερώτημα αυτό δίνουμε κάποια απάντηση με το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14 (Θεώρημα του Lerch). Ας είναι f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις στο $[0,\infty)$, οι οποίες είναι συνεχείς κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$. Αν $\mathcal{L}[f](s)$ και $\mathcal{L}[g](s)$ ορίζονται για κάθε $s > r$, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, και

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \quad s > r,$$

τότε $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \geq 0$ εκτός πιθανόν των σημείων ασυνέχειας των f και g.

Απ'το Θεώρημα αυτό προκύπτει το παρακάτω πιο ειδικό συμπέρασμα για την περίπτωση συνεχών συναρτήσεων.

Ας είναι f και g δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Αν $\mathcal{L}[f](s)$ και $\mathcal{L}[g](s)$ ορίζονται για κάθε $s > r$, όπου $r \in \mathbb{R}$, και $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, $s > r$, τότε οι f και g είναι ίσες, δηλαδή $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \geq 0$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 14 θα γίνει με χρήση του παρακάτω Λήμματος, του οποίου η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ μπορεί να προσεγγισθεί, με όση θέλουμε ακρίβεια, με ένα πολυώνυμο. Το συμπέρασμα αυτό θα το θεωρήσουμε γνωστό εδώ.

<u>ΛΗΜΜΑ</u>. <u>Ας είναι</u> u <u>μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα</u> $[0,1]$ <u>τέτοια ώστε</u>

$$\int_0^1 x^n u(x)dx=0 \ \underline{\text{για κάθε}} \ n=0,1,\ldots .$$

<u>Τότε</u> u <u>είναι η μηδενική συνάρτηση στο</u> $[0,1]$, <u>δηλαδή</u>

$$u(x)=0 \ \underline{\text{για όλα τα}} \ x\in[0,1].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο P έτσι ώστε

$$|u(x)-P(x)|<\varepsilon \ \text{για κάθε} \ x\in[0,1].$$

Λόγω της υπόθεσης για τη συνάρτηση u, θα είναι

$$\int_0^1 u(x)P(x)dx=0.$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\int_0^1 [u(x)]^2dx=\int_0^1 u(x)[u(x)-P(x)]dx\le\varepsilon\int_0^1 |u(x)|dx$$

και, επειδή το $\varepsilon>0$ είναι αυθαίρετο, έχουμε

$$\int_0^1 [u(x)]^2dx=0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$u(x)=0 \ \text{για όλα τα} \ x\in[0,1].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 14. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h=f-g$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2, $\mathcal{L}[h](s)$ ορίζεται για κάθε $s>r$ και μάλιστα $\mathcal{L}[h](s)=\mathcal{L}[f](s)-\mathcal{L}[g](s)=0$ για $s>r$, δηλαδή

$$\int_0^\infty e^{-sx}h(x)dx=0 \ \text{για όλα τα} \ s>r.$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $h(x)=0$ για κάθε $x\in[0,\infty)$ εκτός πιθανόν των σημείων $x\in[0,\infty)$ που είναι σημεία ασυνέχειας της h. Θεωρούμε ένα αριθμό r_0 με $r_0 > r$ και τυχόντα μη αρνητικό ακέραιο n. Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\upsilon(x) = \int_0^x e^{-r_0 t} h(t)\,dt, \quad x \in [0,\infty),$$

η οποία είναι συνεχής. Εκλέγουμε ένα τυχόν $a > 0$ και θεωρούμε μια διαμέριση $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_\lambda = a$ του διαστήματος $[0,a]$ έτσι ώστε, για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,\lambda-1\}$, η h να είναι συνεχής στο (a_k, a_{k+1}) και τα $h(a_k+0)$ και $h(a_{k+1}-0)$ να υπάρχουν. Η ύπαρξη αυτής της διαμέρισης εξασφαλίζεται απ' το γεγονός ότι η h είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[0,a]$. Για τυχόν $k \in \{0,1,\ldots,\lambda-1\}$, η συνάρτηση h_k με

$h_k(x) = h(x)$ για $x \in (a_k, a_{k+1})$, $h_k(a_k) = h(a_k+0)$, $h_k(a_{k+1}) = h(a_{k+1}-0)$

είναι συνεχής στο $[a_k, a_{k+1}]$ και έτσι η συνάρτηση υ_k με

$$\upsilon_k(x) = \int_{a_k}^x e^{-r_0 t} h_k(t)\,dt, \quad x \in [a_k, a_{k+1}]$$

είναι παραγωγίσιμη με $\upsilon_k'(x) = e^{-r_0 x} h_k(x)$ για $x \in [a_k, a_{k+1}]$, και επομένως

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-(r_0+n+1)x} h_k(x)\,dx = e^{-(n+1)x}\upsilon_k(x)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + (n+1)\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-(n+1)x}\upsilon_k(x)\,dx.$$

'Αρα έχουμε

$$\int_0^a e^{-(r_0+n+1)x} h(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\lambda-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-(r_0+n+1)x} h_k(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1} \left\{ e^{-(n+1)x}\upsilon_k(x)\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + (n+1)\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-(n+1)x}\upsilon_k(x)\,dx \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1} \left\{ e^{-(n+1)x}[\upsilon(x)-\upsilon(a_k)]\Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + (n+1)\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-(n+1)x}[\upsilon(x)-\upsilon(a_k)]\,dx \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda-1} \left\{ e^{-(n+1)x} \upsilon(x) \Big|_{a_k}^{a_{k+1}} + (n+1) \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-(n+1)x} \upsilon(x)\,dx \right\}$$

$$= e^{-(n+1)x} \upsilon(x) \Big|_0^a + (n+1) \int_0^a e^{-(n+1)x} \upsilon(x)\,dx$$

$$= e^{-(n+1)a} \upsilon(a) + (n+1) \int_0^a e^{-(n+1)x} \upsilon(x)\,dx.$$

Αλλά, έχουμε

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-(r_0+n+1)x} h(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(r_0+n+1)x} h(x)\,dx = 0.$$

Επίσης, είναι

$$\lim_{a\to\infty} \upsilon(a) = \int_0^\infty e^{-r_0 x} h(x)\,dx = 0,$$

οπότε

$$\lim_{a\to\infty} [e^{-(n+1)a} \upsilon(a)] = 0.$$

'Ετσι, παίρνουμε

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-(n+1)x} \upsilon(x)\,dx = 0,$$

δηλαδή

$$(*) \qquad \int_0^\infty e^{-(n+1)x} \upsilon(x)\,dx = 0.$$

Επειδή $\lim_{a\to\infty} \upsilon(a) = 0$, θα είναι

$$\lim_{t\to 0+0} \upsilon(-\log t) = 0$$

και έτσι η συνάρτηση u με

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0 \\ \upsilon(-\log t), & \text{αν } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = e^{-x}$ στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (*), η (*) δίνει

$$\int_0^1 t^n u(t)\,dt = 0.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους n και επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα , είναι

$$u(t) = 0 \text{ για κάθε } t \in [0,1].$$

Άρα

$$u(x) = 0 \text{ για όλα τα } x \geq 0,$$

απ'όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση h μηδενίζεται (τουλάχιστον) σ' όλα τα σημεία συνέχειας αυτής.

Απ'το Θεώρημα 14 προκύπτει το (ισοδύναμο μ'αυτό) συμπέρασμα:

Αν F είναι μια πραγματική συνάρτηση στο διάστημα (r,∞), όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, και f_1 και f_2 είναι δύο αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace της F τέτοιοι ώστε να είναι κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a > 0$, τότε οι f_1 και f_2 ταυτίζονται τουλάχιστον στα σημεία συνέχειας αυτών.

Ειδικά, για τους συνεχείς αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace έχουμε:

Αν F είναι μια πραγματική συνάρτηση στο (r,∞), όπου $r \in \mathbb{R}$, και f είναι ένας συνεχής αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace αυτής, τότε f είναι ο μοναδικός αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F που είναι συνεχής.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια πραγματική συνάρτηση F ορισμένη σε ένα διάστημα (r,∞), όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός. Ένα πρόβλημα που τίθεται είναι να βρεθεί ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F με την προϋπόθεση ότι τέτοιος υπάρχει. Αν υπάρχει ένας συνεχής αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F, τότε (αυτός είναι ο μοναδικός συνεχής αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F και) υπάρχει τύπος που δίνει αυτόν. Ο τύπος αυτός όμως προϋποθέτει τη γνώση συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής και γι'αυτό δεν θ'αναφερθεί εδώ. Υπάρχουν πίνακες που δίνουν τους συνεχείς αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace πλήθους συναρτήσεων. Αν στον πίνακα του Θεωρήματος 9 γράψουμε $\mathcal{L}^{-1}[F](x)$, $x \geq 0$ στη θέση του $f(x)$, $x \geq 0$ και $F(s)$, $s > s_0$ στη θέση του $\mathcal{L}[f](s)$, $s > s_0$ και αντιμεταθέσουμε τις δύο αυτές στήλες, παίρνουμε ένα μικρό πίνακα για τους συνεχείς αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων. Οι ιδιότητες του τελεστή $\mathcal{L}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξαχθούν αντίστοιχες ιδιότητες του αντίστροφου τελεστή $\mathcal{L}^{-1}$. Η πιο σπουδαία ιδιότητα του $\mathcal{L}^{-1}$ είναι η γραμμικότητα αυτού που προκύπτει απ'τη γραμμικότητα του $\mathcal{L}$· πιο συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω θεώρημα που προκύπτει απ'το Θεώρημα 2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15. Ας είναι F_1 και F_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες σ'ένα διάστημα (r,∞), όπου $r \in \mathbb{R}$, και c_1 και c_2 δύο πραγματικές σταθερές. Αν $\mathcal{L}^{-1}[F_1]$ και $\mathcal{L}^{-1}[F_2]$ είναι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των F_1 και F_2 αντίστοιχα, τότε ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $c_1F_1+c_2F_2$ δίνεται απ'τον τύπο

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F_1+c_2F_2] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1]+c_2\mathcal{L}^{-1}[F_2].$$

Επίσης, απ'το Θεώρημα 12 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16. Ας είναι F μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα (s_0,∞), όπου $s_0 \in \mathbb{R}$, και a μια θετική σταθερά. Θέτουμε

$$G(s) = e^{-as}F(s), \quad s > s_0.$$

Αν $\mathcal{L}^{-1}[F]$ είναι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F, τότε ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της G δίνεται απ'τον τύπο

$$\mathcal{L}^{-1}[G](x) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}[F](x-a), & \text{αν } x \geq a \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x < a. \end{cases}$$

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι ένα σπουδαίο μέσο για την εύρεση αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace είναι το Θεώρημα συνέλιξης (Θεώρημα 10), που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace του γινομένου δύο συναρτήσεων όταν είναι γνωστοί αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των δύο συναρτήσεων.

1.7. Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x) = 2e^{-3x}+3\sin 2x, \quad x \geq 0.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον πίνακα του Θεωρήματος 9, έχουμε

$$\mathcal{L}[e^{-3x}](s) = \frac{1}{s+3}, \quad s > -3 \quad \text{και} \quad \mathcal{L}[\sin 2x](s) = \frac{2}{s^2+4}, \quad s > 0.$$

Έτσι, με εφαρμογή του Θεωρήματος 2, παίρνουμε για κάθε $s > 0$

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = 2\mathcal{L}[e^{-3x}](s)+3\mathcal{L}[\sin 2x](s) = \frac{2}{s+3}+\frac{6}{s^2+4} = \frac{2s^2+6s+26}{(s+3)(s^2+4)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(x) = \sin x - x\cos x, \quad x \geq 0.$$

Λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sin x - x\cos x = \int_0^x t\sin t\,dt, \quad x \geq 0,$$

οπότε το Θεώρημα 6 δίνει για $s > 0$

$$\mathcal{L}[\sin x - x\cos x](s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[x\sin x](s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2},$$

αφού απ'τον πίνακα του Θεωρήματος 9 έχουμε

$$\mathcal{L}[x\sin x](s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, \quad s > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(x)$, $x \geq 0$ με $f(x+2c) = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$, όπου c είναι μια θετική σταθερά, και

$$f(x) = 1 \text{ για } 0 \leq x < c, \quad f(x) = -1 \text{ για } c \leq x < 2c.$$

Λύση. Η f είναι περιοδική με περίοδο $2c$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8, για όλα τα $s > 0$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-2cs}}\int_0^{2c} e^{-sx}f(x)\,dx = \frac{1}{1-e^{-2cs}}\left[\int_0^c e^{-sx}dx - \int_c^{2c} e^{-sx}dx\right] = \frac{1}{s}(1-e^{-cs})^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$h(x) = \int_0^x \sin(x-t)\cdot t^2 e^{-2t}dt, \quad x \geq 0.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι η h είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων

$$f(x) = \sin x, \quad x \geq 0 \text{ και } g(x) = x^2 e^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 10, θα είναι

$$\mathcal{L}[h](s) = \mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s), \quad s > 0.$$

Αλλά απ'τον πίνακα του Θεωρήματος 9 έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0 \text{ και } \mathcal{L}[g](s) = \frac{2}{(s+2)^3}, \quad s > -2.$$

Επομένως, είναι

$$\mathcal{L}[h](s) = \frac{2}{(s^2+1)(s+2)^3}, \quad s > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \geq 2 \\ 0, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \geq 0$. Απ' τον πίνακα του Θεωρήματος 9 έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{2}{s^3}, \quad s > 0.$$

Με μια εφαρμογή του Θεωρήματος 12, παίρνουμε για κάθε $s > 0$

$$\mathcal{L}[g](s) = e^{-2s}\mathcal{L}[f](s) = \frac{2}{s^3}\, e^{-2s}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } 0 \leq x < 5 \\ 5, & \text{αν } x \geq 5. \end{cases}$$

Λύση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 5 \\ 5, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } 0 \leq x < 5 \\ 0, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $f = f_1 + f_2$. Αλλά, για όλα τα $x \geq 0$ είναι

$$f_1(x) = 5H_5(x) \text{ και } f_2(x) = 2[1-H_5(x)]$$

και άρα για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$f(x) = 5H_5(x) + 2[1-H_5(x)] = 2+3H_5(x).$$

Επομένως, για $s > 0$ είναι (Θεώρημα 11)

$$\mathcal{L}[f](s) = 2\mathcal{L}[1](s) + 3\mathcal{L}[H_5](s) = 2\,\frac{1}{s} + 3\,\frac{e^{-5s}}{s} = \frac{2+3e^{-5s}}{s}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 3, & \text{αν } x \geq 1. \end{cases}$$

Λύση. Είναι $f(x) = xf_1(x) + f_2(x)$ για $x \geq 0$, όπου

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 3, & \text{αν } x \geq 1. \end{cases}$$

Αλλά, για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $f_1(x) = 1 - H_1(x)$ και $f_2(x) = 3H_1(x)$, οπότε $f(x) = x[1 - H_1(x)] + 3H_1(x) = x - xH_1(x) + 3H_1(x)$. Έχουμε (Θεώρημα 11)

$$\mathcal{L}[H_1](s) = \frac{e^{-s}}{s}, \quad s > 0$$

και έτσι το Θεώρημα 7 δίνει

$$\mathcal{L}[xH_1(x)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[H_1](s) = \frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}, \quad s > 0.$$

Εξάλλου είναι

$$\mathcal{L}[x](s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Έτσι, παίρνουμε για $s > 0$

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[x](s) - \mathcal{L}[xH_1(x)](s) + 3\mathcal{L}[H_1(x)](s) = \frac{1 + (2s-1)e^{-2}}{s^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}, & \text{αν } 1 \leq x < 5 \\ e^{-(x-5)}, & \text{αν } x \geq 5. \end{cases}$$

Λύση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$f_1(x) = x - xH_1(x), x \geq 0$; $f_2(x) = \frac{3}{2}H_1(x) - \frac{3}{2}H_5(x), x \geq 0$; $f_3(x) = e^{-(x-5)}H_5(x)$, $x \geq 0$

και έχουμε για κάθε $x \geq 0$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = x - xH_1(x) + \frac{3}{2}H_1(x) - \frac{3}{2}H_5(x) + e^{-(x-5)}H_5(x).$$

Αλλά, για όλα τα $s>0$ είναι (Θεώρημα 11)

$$\mathcal{L}[x](s)=\frac{1}{s^2}\,,\quad \mathcal{L}[H_1](s)=\frac{e^{-s}}{s}\,,\quad \mathcal{L}[H_5](s)=\frac{e^{-5s}}{s}\,.$$

Με μια εφαρμογή του Θεωρήματος 7 βρίσκουμε

$$\mathcal{L}[xH_1(x)](s)=\frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}\,,\quad s>0.$$

Επίσης, με τη βοήθεια των Θεωρημάτων 12 και 3 και 11, παίρνουμε για $s>0$

$$\mathcal{L}[e^{-(x-5)}H_5(x)](s)=e^{-5s}\mathcal{L}[e^{-x}H(x)](s)=e^{-5s}\mathcal{L}[H](s+1)=\frac{e^{-5s}}{s+1}\,.$$

Έτσι, για όλα τα $s>0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s)&=\frac{1}{s^2}-\frac{(s+1)e^{-s}}{s^2}+\frac{3}{2}\,\frac{e^{-s}}{s}-\frac{3}{2}\,\frac{e^{-5s}}{s}+\frac{e^{-5s}}{s+1}\\&=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{2s}-\frac{3e^{-5s}}{s}+\frac{e^{-5s}}{s+1}\,.\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } 0\leq x\leq 1\\ \frac{1}{2}e^x, & \text{αν } 1<x<3\\ 0, & \text{αν } 3\leq x\leq\frac{7}{2}\\ 2, & \text{αν } \frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}\\ 0, & \text{αν } x\geq\frac{9}{2}\,.\end{cases}$$

<u>Λύση</u>. Θεωρούμε τις συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης

$$I_{2,1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{αν } 1<x<3\\ 0, & \text{αν } x\leq 1 \text{ ή } x\geq 3\end{cases}\qquad\text{και}\qquad I_{4,1/2}(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } \frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}\\ 0, & \text{αν } x\leq\frac{7}{2} \text{ ή } x\geq\frac{9}{2}\end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(x)=e^xI_{2,1}(x)+2I_{4,1/2}(x)\quad\text{για κάθε } x\geq 0.$$

Αλλά, για κάθε $s>0$ είναι (Θεώρημα 13)

$$\mathcal{L}[I_{2,1}](s)=\frac{e^{-2s}}{s}\sinh s\quad\text{και}\quad \mathcal{L}[I_{4,1/2}](s)=\frac{2e^{-4s}}{s}\sinh\left(\frac{s}{2}\right).$$

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3, παίρνουμε

$$\mathcal{L}[e^x I_{2,1}(x)](s) = \mathcal{L}[I_{2,1}](s-1) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1} \sinh(s-1), \quad s > 1.$$

Έτσι, για όλα τα $s > 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1} \sinh(s-1) + \frac{4e^{-4s}}{s} \sinh\left(\frac{s}{2}\right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x) = 3\delta(x-1) + \delta(x-2), \quad x \geq 0.$$

<u>Λύση</u>. Είναι

$$f(x) = 3\delta_1(x) + \delta_2(x) \quad \text{για } x \geq 0$$

και επομένως, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 13, για κάθε $s > 0$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = 3\mathcal{L}[\delta_1](s) + \mathcal{L}[\delta_2](s) = 3e^{-s} + e^{-2s}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Να βρεθούν οι (συνεχείς) αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

$$F_1(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s > -2; \quad F_2(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}, \quad s > 0.$$

<u>Λύση</u>. Απ' τον πίνακα του Θεωρήματος 9 παίρνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1](x) = e^{-2x}, \quad x \geq 0; \quad \mathcal{L}^{-1}[F_2](x) = x\cos x, \quad x \geq 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Να βρεθούν οι (συνεχείς) αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^2+6s+13}, \quad s > -3; \quad F_2(s) = \frac{5}{(s-1)(s^2+4)}, \quad s > 1.$$

<u>Λύση</u>. Είναι

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+3)^2+2^2}, \quad s > -3$$

και έτσι απ' τον πίνακα του Θεωρήματος 9 παίρνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1](x) = \frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x, \quad x \geq 0.$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε για $s > 1$

$$F_2(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+2^2}$$

και, με χρήση του πίνακα του Θεωρήματος 9 και με τη βοήθεια του Θεωρήματος 15, βρίσκουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F_2](x) = e^x - \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad x \geqq 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Να βρεθεί, με τη βοήθεια του Θεωρήματος συνέλιξης, ο (συνεχής) αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{5}{(s-1)(s^2+4)}, \quad s > 1.$$

<u>Λύση</u>. Έχουμε $F = F_1F_2$, όπου

$$F_1(s) = \frac{5}{s-1}, \quad s > 1; \quad F_2(s) = \frac{1}{s^2+4}, \quad s > 1.$$

Αλλά απ'τον πίνακα του Θεωρήματος 9, παίρνουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1](x) = 5e^x, \quad x \geqq 0; \quad \mathcal{L}^{-1}[F_2](x) = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad x \geqq 0.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10, για κάθε $x \geqq 0$ είναι

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = (\mathcal{L}^{-1}[F_1] * \mathcal{L}^{-1}[F_2])(x) = \int_0^x 5e^{x-t}\,\frac{1}{2}\sin 2t\,dt$$

$$= \frac{5}{2}e^x \int_0^x e^{-t}\sin 2t\,dt = \frac{5}{2}e^x\Big[\frac{1}{5}e^{-t}(-\sin 2t - 2\cos 2t)\Big]_0^x$$

$$= e^x - \frac{1}{2}\sin 2x - \cos 2x.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14. Να βρεθεί ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$G(s) = \frac{e^{-3s}}{s-2}, \quad s > 2.$$

<u>Λύση</u>. Θεωρούμε τη συνάρτηση F με

$$F(s) = \frac{1}{s-2}, \quad s > 2.$$

Απ'τον πίνακα του Θεωρήματος 9 προκύπτει ότι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της F είναι

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = e^{2x}, \quad x \geqq 0.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 16, βρίσκουμε ότι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της G δίνεται απ'τον τύπο

$$\mathcal{L}^{-1}[G](x) = \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}[F](x-3), & \text{αν } x \geq 3 \\ \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x < 3 \end{cases} = \begin{cases} e^{2(x-3)}, & \text{αν } x \geq 3 \\ \\ 0, & \text{αν } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15. Να βρεθεί ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$F(s) = \frac{1}{s}\,(e^{-s}+2e^{-3s}),\ s>0.$$

Λύση. Είναι (Θεώρημα 11)

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = H_1(x)+2H_3(x) \text{ για κάθε } x \geq 0,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{αν } 1 \leq x < 3 \\ 3, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases}$$

1.8. Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $f(x) = x\cosh 2x,\ x \geq 0.$
(ii) $f(x) = \sin 2x\cdot\cos 2x,\ x \geq 0.$
(iii) $f(x) = (1+x^2)\sin x - x\cos x,\ x \geq 0.$
(iv) $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0.$
(v) $f(x) = x^4 e^x \sin 2x,\ x \geq 0.$
(vi) $f(x) = x^2\sin^2 x,\ x \geq 0.$

2. Δίνεται ότι $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f με

$$f(x) = x^{-1/2} \text{ για } x > 0,\ f(0) = 0.$$

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $f(x) = x$ για $x \in [0,1)$, $f(x) = 2-x$ για $x \in (1,2)$ και $f(x+2) = f(x)$, $x \geq 0$.
(ii) $f(x) = \sin x$ για $x \in [0,\pi)$, $f(x) = 0$ για $x \in (\pi, 2\pi)$ και $f(x+2\pi) = f(x)$, $x \geq 0$.

4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $f(x)=\begin{cases}-1, & 0\leq x\leq 1\\ x-1, & x\geq 1.\end{cases}$ (iii) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<2\\ x-2, & 2\leq x<4\\ e^{-(x-4)}, & x\geq 4.\end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<1\\ -1, & 1\leq x<2\\ 0, & x\geq 2.\end{cases}$ (iv) $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<\pi\\ 1+\cos x, & \pi\leq x<2\pi\\ 2\cos x, & x\geq 2\pi.\end{cases}$

5. Να βρεθεί ο (συνεχής) αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης F σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}$, $s>0$. (iv) $F(s)=\dfrac{3s}{(s+1)^4}$, $s>-1$.

(ii) $F(s)=\dfrac{s-4}{(s^2+4)^2}$, $s>0$. (v) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$, $s>0$.

(iii) $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)^2(s-2)}$, $s>2$. (vi) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+4)^2}$, $s>0$.

6. Να βρεθεί ένας αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης F σε καθεμιά απ'τις περιπτώσεις:

(i) $F(s)=\frac{1}{s}(e^{-s}+2e^{-3s}-6e^{-4s})$, $s>0$. (iv) $F(s)=-e^{-\pi s/2}/(s^2+1)$, $s>0$.

(ii) $F(s)=(1+e^{-\pi s})/(s^2+1)$, $s>0$. (v) $F(s)=e^{-s}/(s-1)^2$, $s>1$.

(iii) $F(s)=(1-e^{-2s-2})/(s+1)$, $s>0$. (vi) $F(s)=\frac{2e^{-s}}{s}\sinh\left(\frac{s}{2}\right)$, $s>0$.

7. Ν'αποδειχθεί ότι δεν ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2}$, $x\geq 0$.

8. Να εξετασθεί, σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, αν η συνάρτηση f είναι ή όχι εκθετικής τάξης r για κάποιο $r\in\mathbb{R}$:

(i) $f(x)=x^3\sin x$, $x\geq 0$. (iii) $f(x)=\log(1+x)$, $x\geq 0$.

(ii) $f(x)=x^{3/2}$, $x\geq 0$. (iv) $f(x)=x^2\log(1+x)$, $x\geq 0$.

9. Ας είναι h και b δύο θετικές σταθερές. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} nhb, & \text{αν } nb < x < (n+1)b \quad (n=0,1,\ldots) \\ 0, & \text{αν } x = nb \quad (n=0,1,\ldots). \end{cases}$$

10. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f με

$f(x) = e^x$ για $0 \leq x < c$ και $f(x+c) = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$,

όπου c είναι μια θετική σταθερά.

2. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ LAPLACE

Στο Εδάφιο αυτό θα δώσουμε μια εφαρμογή των μετασχηματισμών Laplace στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών (στο σημείο 0) για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και γραμμικά διαφορικά συστήματα, όπου οι αντίστοιχες ομογενείς γραμμικές εξισώσεις ή τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα έχουν σταθερούς συντελεστές και τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων ή των συστημάτων είναι πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$ που είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$ ή, πιο γενικά, είναι κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$. Η μέθοδος βασίζεται στην εφαρμογή του Θεωρήματος 5' η δυνατότητα εφαρμογής του Θεωρήματος αυτού θα διασφαλισθεί με τα Θεωρήματα 17, 18 και 19. Θα δοθούν αρκετά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου και θα προταθούν μερικές ασκήσεις για λύση.

2.1. Εφαρμογή των μετασχηματισμών Laplace στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και συστημάτων

Θ' ασχοληθούμε εδώ με το πρόβλημα αρχικών τιμών που συνίσταται απ'την n-τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\text{(E)} \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$(C_E) \qquad y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

όπου a_i $(i=0,1,\ldots,n-1,n)$ είναι <u>πραγματικές σταθερές με</u> $a_n \neq 0$, f είναι μια πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ και c_i $(i=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1)$ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί.

Επίσης, θ'ασχοληθούμε με προβλήματα αρχικών τιμών στο σημείο 0 για γραμμικά διαφορικά συστήματα. Έτσι, θα θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(S)\qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n+f_1 \\ y_2' = a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n+f_2 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n+f_n, \end{cases}$$

$$(C_S)\qquad y_1(0)=\vartheta_1,\ y_2(0)=\vartheta_2,\ldots,y_n(0)=\vartheta_n,$$

όπου a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, f_i $(i=1,2,\ldots$ $\ldots,n)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις στο $[0,\infty)$ και ϑ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι δεδομένες πραγματικές σταθερές.

Είναι γνωστό απ'τα Κεφάλαια III και IV (βλ., επίσης, Κεφάλαιο I) ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ ή οι συναρτήσεις f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών $(E)-(C_E)$ ή αντίστοιχα το πρόβλημα αρχικών τιμών $(S)-(C_S)$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[0,\infty)$. Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την εύρεση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών $(E)-(C_E)$ ή του $(S)-(C_S)$ όταν f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ ή αντίστοιχα f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$, μας χρειάζεται το παρακάτω Θεώρημα 17 ή το Θεώρημα 18 αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και ας είναι y η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(E)-(C_E)$. Αν η συνάρτηση f είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε οι συναρτήσεις $y^{(i)}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ είναι εκθετικής τάξης R για κάποιο $R\geq\max\{r,0\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18. Ας υποθέσουμε ότι οι f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$ και ας είναι $y_1,y_2,\ldots,y_n$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(S)-(C_S)$. Αν οι συναρτήσεις f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε οι συναρτήσεις y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι εκθετικής τάξης R για κάποιο $R\geq\max\{r,0\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ 17 και 18. Θέτοντας $y_i = y^{(i-1)}$ $(i=1, 2,\dots,n)$, το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C_E) το μετατρέπουμε στο

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \quad\vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -\frac{a_0}{a_n} y_1 - \frac{a_1}{a_n} y_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y_n + \frac{f}{a_n}, \end{cases}$$

$$y_1(0) = c_0,\ y_2(0) = c_1, \dots, y_n(0) = c_{n-1}.$$

Έτσι, είναι αρκετό ν'αποδείξουμε μόνο το Θεώρημα 18· σύμφωνα με τα παραπάνω, το Θεώρημα 17 μπορεί να ληφθεί ως μια εφαρμογή του Θεωρήματος 18.

Θέτουμε

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ και } \Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_n \end{pmatrix},$$

οπότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (S)-(C_S) γράφεται

$$Y' = AY + F,\quad Y(0) = \Theta.$$

Σύμφωνα με τη Θεωρία των γραμμικών διαφορικών συστημάτων που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο IV, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (S)-(C_S) δίνεται απ'τον τύπο

$$Y(x) = e^{xA}\left[\Theta + \int_0^x e^{-tA} F(t)\,dt\right],\quad x \geq 0$$

(βλ. Θεωρήματα 15 και 16 του Κεφαλαίου IV). Απ'τον τύπο αυτόν παίρνουμε για όλα τα $x \geq 0$

$$|Y(x)| \leq |e^{xA}\Theta| + \left|\int_0^x e^{(x-t)A} F(t)\,dt\right| \leq |e^{xA}|\,|\Theta| + \int_0^x |e^{(x-t)A}|\,|F(t)|\,dt$$

$$\leq e^{x|A|}|\Theta| + \int_0^x e^{(x-t)|A|}|F(t)|\,dt,$$

αφού για οποιονδήποτε n-τάξης τετραγωνικό πίνακα C είναι

$$|e^C| = \left|I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C^\nu}{\nu!}\right| \leq |I| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|C|^\nu}{\nu!} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|C|^\nu}{\nu!} = e^{|C|}.$$

Η στάθμη στο χώρο των n-τάξης τετραγωνικών πινάκων ορίζεται κατά το γνωστό τρόπο (βλ. Κεφάλαια I και IV). Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι εκθετικής τάξης r, όπου r είναι ένας πραγματικός αριθμός. Τότε θα υπάρχουν $x_0 \geq 0$ και $K \geq 0$ έτσι ώστε

$$|f_i(x)| \leq Ke^{rx} \text{ για κάθε } x \geq x_0 \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Επειδή οι συναρτήσεις f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,x_0]$, αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$|f_i(x)| \leq Me^{rx} \text{ για όλα τα } x \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

όπου M είναι μια μη αρνητική σταθερά. 'Ετσι, θα έχουμε

$$|F(x)| \leq Ne^{rx} \text{ για κάθε } x \geq 0$$

για κάποια μη αρνητική σταθερά N. Μετά απ' αυτό, για $x \geq 0$ παίρνουμε

$$|Y(x)| \leq e^{x|A|}|\Theta| + e^{x|A|}N\int_0^x e^{(r-|A|)t}dt$$

$$= \begin{cases} (|\Theta|+Nx)e^{x|A|}, & \text{αν } r=|A| \\ \left(|\Theta| - \frac{1}{r-|A|}\right)e^{x|A|} + \frac{N}{r-|A|}e^{rx}, & \text{αν } r \neq |A| \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} (|\Theta|+Nx)e^{x|A|}, & \text{αν } r=|A| \\ \left||\Theta| - \frac{1}{r-|A|}\right|e^{x|A|} + \frac{N}{|r-|A||}e^{rx}, & \text{αν } r \neq |A|. \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι $r=|A|$ και ας θεωρήσουμε τυχόντα θετικό αριθμό γ. Τότε, επειδή $\lim_{x\to\infty} (|\Theta|+Nx)e^{-\gamma x} = 0$, θα έχουμε

$$|\Theta|+Nx \leq \sigma e^{\gamma x} \text{ για } x \geq 0,$$

όπου σ είναι μια μη αρνητική σταθερά. 'Ετσι,

$$|Y(x)| \leq \sigma e^{x(\gamma+|A|)} \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Επομένως, $|Y|$ είναι εκθετικής τάξης $\gamma+|A|$ για κάθε $\gamma > 0$. Τότε αυτό, όπως είναι φανερό, θα συμβαίνει για καθεμιά απ' τις συναρτήσεις y_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $r \neq |A|$. Τότε, θέτοντας $r^* = \max\{r,|A|\}$, θα έχουμε

$$|Y(x)| \leq \left[\left||\Theta| - \frac{1}{r-|A|}\right| + \frac{N}{|r-|A||}\right]e^{r^*x}, \quad x \geq 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $|Y|$ είναι εκθετικής τάξης r^*, πράγμα που θα ισχύει και για καθεμιά απ' τις συναρτήσεις y_i $(i=1, 2,\dots,n)$. Έχει λοιπόν αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις y_i $(i=1,2,\dots\dots,n)$ είναι εκθετικής τάξης R, όπου

$R=\max\{r,|A|\}$ για $r\neq|A|$, $R=r+\gamma$ για $r=|A|$ (γ θετικός αριθμός).

Όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης r για κάποιο $r\in\mathbb{R}$, τότε για την εύρεση, με τη μέθοδο των μετασχηματισμών Laplace, της λύσης y του προβλήματος αρχικών τιμών $(E)-(C_E)$ ακολουθούμε την παρακάτω πορεία:

Παίρνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2 και στη συνέχεια το Θεώρημα 5, λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες (C_E), οπότε καταλήγουμε σε μια (γραμμική) αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο τη συνάρτηση $\mathcal{L}[y]$ (ορισμένη στο διάστημα (R,∞) για κάποιο $R\geq\max\{r,0\}$). Όλες αυτές οι διαδικασίες μπορούν να γίνουν, σύμφωνα με το Θεώρημα 17 και την παρατήρηση ότι $y^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[0,\infty)$. Έτσι, για κάποιο $R\geq\max\{r,0\}$ και για όλα τα $s>R$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s)=\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}\right](s)=\sum_{k=0}^{n} a_k\mathcal{L}[y^{(k)}](s)$$

$$=a_0\mathcal{L}[y](s)+\sum_{k=1}^{n} a_k\left\{s^k\mathcal{L}[y](s)-\sum_{j=0}^{k-1} s^j y^{(k-1-j)}(0)\right\}$$

$$=a_0\mathcal{L}[y](s)+\sum_{k=1}^{n} a_k\left\{s^k\mathcal{L}[y](s)-\sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}s^j\right\}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right)\mathcal{L}[y](s)-\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}s^j\right),$$

δηλαδή

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right)\mathcal{L}[y](s)=\mathcal{L}[f](s)+\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}s^j\right).$$

Λύνουμε έπειτα την αλγεβρική εξίσωση (υποθέτοντας στην ανάγκη ότι το R είναι "αρκετά μεγάλο") και βρίσκουμε την $\mathcal{L}[y](s)$, $s>R$. Πραγματικά· αν υποθέσουμε ότι το R είναι "αρκετά μεγάλο" ώστε να είναι $\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\neq 0$ για κάθε $s>R$, τότε παίρνουμε

$$\mathcal{L}[y](s) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right)^{-1} \left\{\mathcal{L}[f](s) + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j} s^j\right)\right\}, \ s > R.$$

Τέλος, παίρνουμε τους (συνεχείς) αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace και βρίσκουμε τη λύση y (ορισμένη στο $[0,\infty)$).

Μια ανάλογη πορεία με την παραπάνω ακολουθούμε για την εύρεση, με τη μέθοδο των μετασχηματισμών Laplace, της λύσης $y_1, y_2, \ldots, y_n$ του προβλήματος αρχικών τιμών $(S)-(C_S)$, στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης r για κάποιο $r \in \mathbb{R}$. Έτσι:

Παίρνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace και των δύο μελών καθεμιάς των εξισώσεων του συστήματος και εφαρμόζουμε τα Θεωρήματα 2 και 5 (λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 17 και την παρατήρηση ότι y_i' $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$). Λόγω των αρχικών συνθηκών (C_S), οδηγούμαστε σ' ένα (γραμμικό) αλγεβρικό σύστημα με αγνώστους τις συναρτήσεις $\mathcal{L}[y_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ που είναι ορισμένες στο (R,∞) για κάποιο $R \geq \max\{r,0\}$. Δηλαδή, για κάποιο $R \geq \max\{r,0\}$ και για κάθε $s > R$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_i](s) &= \mathcal{L}\left[y_i' - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right](s) = \mathcal{L}[y_i'](s) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{L}[y_j](s)\\ &= s\mathcal{L}[y_i](s) - y_i(0) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{L}[y_j](s)\\ &= s\mathcal{L}[y_i](s) - \vartheta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{L}[y_j](s) \quad (i=1,2,\ldots,n)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{cases} (s-a_{11})\mathcal{L}[y_1](s) - a_{12}\mathcal{L}[y_2](s) - \ldots - a_{1n}\mathcal{L}[y_n](s) = \vartheta_1 + \mathcal{L}[f_1](s)\\ -a_{12}\mathcal{L}[y_1](s) + (s-a_{22})\mathcal{L}[y_2](s) - \ldots - a_{2n}\mathcal{L}[y_n](s) = \vartheta_2 + \mathcal{L}[f_2](s)\\ \qquad\vdots \\ -a_{n1}\mathcal{L}[y_1](s) - a_{n2}\mathcal{L}[y_2](s) - \ldots + (s-a_{nn})\mathcal{L}[y_n](s) = \vartheta_n + \mathcal{L}[f_n](s). \end{cases}$$

Υποθέτουμε, στη συνέχεια, ότι το R είναι "αρκετά μεγάλο", ώστε για κάθε $s > R$ η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός, και βρίσκουμε τις $\mathcal{L}[y_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ορισμένες για $s > R$. Παίρνοντας τους (συνεχείς) αντίστροφους μετασχηματισμούς

Laplace, οδηγούμαστε στη λύση $y_1, y_2, \ldots, y_n$ του προβλήματος αρχικών τιμών (S)-(C_S).

Ας θεωρήσουμε, τέλος, την πιο γενική περίπτωση για το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C_E) ή το πρόβλημα αρχικών τιμών (S)-(C_S) όπου η συνάρτηση f είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$ ή αντίστοιχα οι συναρτήσεις f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα $[0,a]$, $a>0$. Αποδεικνύεται τότε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(C_E) ή αντίστοιχα το (S)-(C_S) έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ακόμα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (S)-(C_S) δίνεται πάλι απ'τον τύπο

$$Y(x) = e^{xA}\left[\Theta + \int_0^x e^{-tA}F(t)dt\right], \quad x \geq 0,$$

όπου Y,A,Θ και F είναι όπως στην απόδειξη των Θεωρημάτων 17 και 18. Η απόδειξη των Θεωρημάτων 17 και 18 μπορεί έτσι να χρησιμοποιηθεί και ως απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19. Το Θεώρημα 17 (αντίστοιχα το Θεώρημα 18) εξακολουθεί να ισχύει, όταν αντικατασταθεί η υπόθεση "η f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$" (αντίστοιχα η υπόθεση "οι f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$") με την "η f είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$" (αντίστοιχα την "οι f_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,a]$, $a>0$").

Μετά απ'τα παραπάνω, επειδή για τη λύση y του (E)-(C_E) ή αντίστοιχα τη λύση $y_1, y_2, \ldots, y_n$ του (S)-(C_S) έχουμε ότι $y^{(n)}$ είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα $[0,a]$, $a>0$ ή αντίστοιχα οι y_i $(i=1,2,\ldots,n)$ είναι κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα $[0,a]$, $a>0$, μπορούμε και στη πιο γενική περίπτωση που θεωρήθηκε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των μετασχηματισμών Laplace για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (E)-(C_E) αντίστοιχα του (S)-(C_S), όπως ακριβώς αυτή έχει περιγραφεί παραπάνω.

2.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-2y'-8y=0; \; y(0)=3, \; y'(0)=6.$$

Λύση. Για κάποιο $R \geq 0$ και για κάθε $s > R$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''-2y'-8y](s) &= \mathcal{L}[y''](s)-2\mathcal{L}[y'](s)-8\mathcal{L}[y](s)\\ &= \{s^2\mathcal{L}[y](s)-y'(0)-sy(0)\}-2\{s\mathcal{L}[y](s)-y(0)\}-8\mathcal{L}[y](s)\\ &= (s^2-2s-8)\mathcal{L}[y](s)-y'(0)-(s-2)y(0)\\ &= (s^2-2s-8)\mathcal{L}[y](s)-3s\end{aligned}$$

και

$$\mathcal{L}[0](s) = 0.$$

Έτσι, είναι

$$(s^2-2s-8)\mathcal{L}[y](s)-3s = 0 \quad \text{για } s > R$$

και επομένως, εκλέγοντας το R έτσι ώστε $R \geq 4$, έχουμε για όλα τα $s > R$

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{3s}{s^2-2s-8} = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}.$$

Άρα, για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}\Big](x) = 2e^{4x}+e^{-2x}.$$

Δηλαδή, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται απ'τον τύπο

$$y(x) = 2e^{4x}+e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-3y'+2y = e^{3x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Λύση. Για κάποιο $R \geq 3$ και για όλα τα $s > R$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''-3y'+2y](s) &= \mathcal{L}[y''](s)-3\mathcal{L}[y'](s)+2\mathcal{L}[y](s)\\ &= \{s^2\mathcal{L}[y](s)-y'(0)-sy(0)\}-3\{s\mathcal{L}[y](s)-y(0)\}+2\mathcal{L}[y](s)\\ &= (s^2-3s+2)\mathcal{L}[y](s)-y'(0)-(s-3)y(0)\\ &= (s^2-3s+2)\mathcal{L}[y](s)-(s-3)\end{aligned}$$

και

$$\mathcal{L}[e^{3x}](s) = \frac{1}{s-3}.$$

Επομένως

$$(s^2-3s+2)\mathcal{L}[y](s)-(s-3) = \frac{1}{s-3}, \quad s > R$$

και άρα για $s > R$

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2-3s+10}{(s-3)(s^2-3s+2)} = \frac{5}{2}\,\frac{1}{s-1} - 2\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-3}.$$

Έτσι, για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{2}\,\frac{1}{s-1} - 2\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-3}\right] = \frac{5}{2}\,e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{3x}.$$

Η λύση λοιπόν του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = \frac{5}{2}\,e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10\cos x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 3.$$

<u>Λύση</u>. Για κάποιο $R \geq 0$ και για κάθε $s > R$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y''' + 4y'' + 5y' + 2y](s) &= \mathcal{L}[y'''](s) + 4\mathcal{L}[y''](s) + 5\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s) \\
&= \{s^3\mathcal{L}[y](s) - y''(0) - sy'(0) - s^2y(0)\} + \\
&\quad + 4\{s^2\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0)\} + 5\{s\mathcal{L}[y](s) - y(0)\} + \\
&\quad + 2\mathcal{L}[y](s) \\
&= (s^3 + 4s^2 + 5s + 2)\mathcal{L}[y](s) - y''(0) - (s+4)y'(0) - \\
&\quad - (s^2 + 4s + 5)y(0) \\
&= (s^3 + 4s^2 + 5s + 2)\mathcal{L}[y](s) - 3
\end{aligned}$$

και

$$\mathcal{L}[10\cos x](s) = \frac{10s}{s^2+1}.$$

Άρα

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)\mathcal{L}[y](s) - 3 = \frac{10s}{s^2+1}, \quad s > R.$$

Επομένως, για όλα τα $s > R$ έχουμε

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2+1)(s^3 + 4s^2 + 3s + 2)} = \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2+1)(s+1)^2(s+2)}$$

$$= -\frac{1}{s+2} + 2\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1}.$$

Έτσι, για $x \geq 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](x) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](x) - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right](x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right](x) + \\
&\quad + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](x) \\
&= -e^{-2x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - \cos x + 2\sin x.
\end{aligned}$$

Άρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} - \cos x + 2\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-3y'+2y=e^{3(x-1)};\quad y(1)=1,\ y'(1)=0.$$

Λύση. Με την αλλαγή μεταβλητής $x-1=t$, το πρόβλημα αρχικών τιμών μετασχηματίζεται στο

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t};\quad y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Η λύση αυτού είναι (Παράδειγμα 2)

$$y(t)=\frac{5}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t},\ t\in\mathbb{R}.$$

'Αρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που μας δόθηκε είναι

$$y(x)=\frac{5}{2}e^{x-1}-2e^{2(x-1)}+\frac{1}{2}e^{3(x-1)},\ x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_1'=-3y_1+4y_2,\ y_2'=2y_1+3y_2;\ y_1(0)=-1,\ y_2(0)=3.$$

Λύση. Για κάποιο $R\geq 0$ και για κάθε $s>R$ παίρνουμε

$$\begin{cases} s\mathcal{L}[y_1](s)-y_1(0)=-3\mathcal{L}[y_1](s)+4\mathcal{L}[y_2](s)\\ s\mathcal{L}[y_2](s)-y_2(0)=2\mathcal{L}[y_1](s)+3\mathcal{L}[y_2](s), \end{cases}$$

οπότε

$$(s+3)\mathcal{L}[y_1](s)-4\mathcal{L}[y_2](s)=-1,\ -2\mathcal{L}[y_1](s)+(s-3)\mathcal{L}[y_2](s)=3.$$

'Ετσι, υποθέτοντας ότι $R\geq 1$, έχουμε για $s>R$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y_1](s)=\dfrac{-s+15}{s^2-1}=-\dfrac{s}{s^2-1}+\dfrac{15}{s^2-1}\\[2ex] \mathcal{L}[y_2](s)=\dfrac{3s+11}{s^2-1}=3\ \dfrac{s}{s^2-1}+\dfrac{11}{s^2-1}\ . \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε $x\geq 0$ είναι

$$\begin{cases} y_1(x)=-\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-1}\right](x)+15\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right](x)=-\cosh x+15\sinh x\\[2ex] y_2(x)=3\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-1}\right](x)+11\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-1}\right](x)=3\cosh x+11\sinh x. \end{cases}$$

'Αρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y_1(x)=-\cosh x+15\sinh x,\ x\in\mathbb{R};\quad y_2(x)=3\cosh x+11\sinh x,\ x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_1'=6y_1-3y_2+8e^{x},\ y_2'=2y_1+y_2+4e^{x};\ y_1(0)=-1,\ y_2(0)=0.$$

<u>Λύση</u>. Για κάποιο $R \geq 1$ και για κάθε $s > R$ παίρνουμε

$$\begin{cases} s\mathcal{L}[y_1](s) - y_1(0) = 6\mathcal{L}[y_1](s) - 3\mathcal{L}[y_2](s) + 8\mathcal{L}[e^x](s) \\ s\mathcal{L}[y_2](s) - y_2(0) = 2\mathcal{L}[y_1](s) + \mathcal{L}[y_2](s) + 4\mathcal{L}[e^x](s), \end{cases}$$

δηλαδή

$$\begin{cases} s\mathcal{L}[y_1](s) + 1 = 6\mathcal{L}[y_1](s) - 3\mathcal{L}[y_2](s) + \frac{8}{s-1} \\ s\mathcal{L}[y_2](s) = 2\mathcal{L}[y_1](s) + \mathcal{L}[y_2](s) + \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

ή

$$(s-6)\mathcal{L}[y_1](s) + 3\mathcal{L}[y_2](s) = -1 + \frac{8}{s-1}, \quad -2\mathcal{L}[y_1](s) + (s-1)\mathcal{L}[y_2](s) = \frac{4}{s-1}.$$

'Ετσι, υποθέτοντας ότι $R \geq 4$, έχουμε για $s > R$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y_1](s) = \dfrac{-s^2+10s-21}{(s-1)(s^2-7s+12)} = \dfrac{-s+7}{(s-1)(s-4)} = -2\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s-4} \\ \mathcal{L}[y_2](s) = \dfrac{2s-6}{(s-1)(s^2-7s+12)} = \dfrac{2}{(s-1)(s-4)} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-4}. \end{cases}$$

'Αρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y_1(x) = -2e^x + e^{4x}, \ x \in \mathbb{R}; \quad y_2(x) = -\frac{2}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{4x}, \ x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 4y = f(x), \ x \geq 0; \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \text{αν } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

<u>Λύση</u>. Για κάποιο $R \geq 0$ και για όλα τα $s > R$ είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[y''+4y](s) = \mathcal{L}[y''](s) + 4\mathcal{L}[y](s) \\ &= \{s^2\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0)\} + 4\mathcal{L}[y](s) \\ &= (s^2+4)\mathcal{L}[y](s) - 1. \end{aligned}$$

Αλλά, για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = 1 - 2H_{\pi/2}(x)$. Επομένως, για $s > R$ έχουμε

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[1](s) - 2\mathcal{L}[H_{\pi/2}](s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-(\pi/2)s}}{s}.$$

'Αρα

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s^2+4}\left[1+\frac{1}{s}-2\frac{e^{-(\pi/2)s}}{s}\right] = \frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{s(s^2+4)}-\frac{2e^{-(\pi/2)s}}{s(s^2+4)}$$

$$= \frac{1}{s^2+4}+\frac{1}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\frac{e^{-(\pi/2)s}}{s}+\frac{1}{2}\frac{se^{-(\pi/2)s}}{s^2+4}$$

για κάθε $s > R$. Έτσι, για όλα τα $x \geq 0$ παίρνουμε

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right](x)+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](x)-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](x)-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-(\pi/2)s}}{s}\right](x)$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-(\pi/2)s}}{s^2+4}\right](x)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{2}H_{\pi/2}(x)+\frac{1}{2}H_{\pi/2}(x)\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{2}H_{\pi/2}(x)-\frac{1}{2}H_{\pi/2}(x)\cos 2x .$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $[se^{-(\pi/2)s}]/(s^2+4)$, $s > R$ βρέθηκε με τη βοήθεια του Θεωρήματος 16. Η λύση λοιπόν του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cos 2x, & \text{αν } x \geq \frac{\pi}{2} . \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+2y'+5y = \delta(x-1), \quad x \geq 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

<u>Λύση</u>. Για κάποιο $R \geq 0$ και για όλα τα $s > R$ έχουμε

$$\mathcal{L}[y''+2y'+5y](s) = \{s^2\mathcal{L}[y](s)-y'(0)-sy(0)\}+2\{s\mathcal{L}[y](s)-y(0)\}+5\mathcal{L}[y](s)$$

$$= (s^2+2s+5)\mathcal{L}[y](s)$$

και επίσης

$$\mathcal{L}[\delta_1](s) = e^{-s} .$$

Άρα

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2+4}, \quad s > R.$$

Βρίσκοντας, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 16, τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε

$$y(x) = \frac{1}{2} H_1(x) e^{-(x-1)} \sin 2(x-1), \quad x \geq 0.$$

Άρα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{2} e^{-(x-1)} \sin 2(x-1), & \text{αν } x \geq 1. \end{cases}$$

2.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''+y = x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(ii) $y''-3y'+2y = 4x+e^{3x};\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

(iii) $y''+4y'+13y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

(iv) $y''+y = e^{-2x}\sin x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

(v) $y''' -6y''+11y'-6y = xe^{-4x};\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1.$

(vi) $y'+y = 2\sin x;\ y(0) = -1.$

(vii) $y''-3y'+2y = 0;\ y(2) = 1,\ y'(2) = 0.$

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y_1' = -2y_1+4y_2,\ y_2' = 2y_1;\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 3.$

(ii) $y_1' = -2y_1+4y_2,\ y_2' = 2y_1+x;\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 3.$

(iii) $y_1' = -y_1-y_2+e^{-3x},\ y_2' = -y_1+4y_2+x;\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2.$

(iv) $y_1' = 2y_1+y_2,\ y_2' = -y_1+y_3,\ y_3' = y_1+3y_2+y_3;\ y_1(0)=y_2(0)=y_3(0) = 1.$

(v) $2y_1'+y_2'-y_1-y_2 = e^{-x},\ y_1'+y_2'+2y_1+y_2 = e^{x};\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 0.$

3. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''+y = f(x);\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

(ii) $y''+2y'+y = f(x);\ y(0) = y'(0) = 0,$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ x-1, & x > 2\,. \end{cases}$$

(iii) $y''+y = f(x);\ y(0) = y'(0) = 0,$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

(iv) $y''+4y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases}$$

(v) $y''+2y'+y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \text{ ή } x \geq 2. \end{cases}$$

(vi) $y''+y = f(x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

4. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''+4y = \cos x - \delta(x-1)$, $x \geq 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.

(ii) $y'''+y' = \delta(x-2)+e^{-x}$, $x \geq 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

(iii) $y''+y'+y = 2\delta(x-1)-\delta(x-2)$, $x \geq 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $y''+2y'+y = 2(x-3)H_3(x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

(ii) $y''+y'+y = H_\pi(x)-H_{2\pi}(x)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(iii) $y''-k^2y = f(x)$, $x \geq 0$; $y(0) = y'(0) = 0$, όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ και k είναι μιά μη αρνητική σταθερά.

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η γάμμα συνάρτηση Γ ορίζεται ως εξής

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

(i) Ν'αποδειχθεί ότι για κάθε αριθμό $r > -1$ είναι

$$\mathcal{L}[x^r] = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, \quad s > 0.$$

(ii) N'αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}[x^{-1/2}](s)=\sqrt{\pi/s}$ (Είναι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).

2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-k^2y = f(x), \quad x \geq 0; \ y(0) = \alpha, \ y'(0) = \beta,$$

όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0,\infty)$ που είναι εκθετικής τάξης r για κάποιο $r \in \mathbb{R}$ και k,α,β είναι πραγματικές σταθερές.

3. Μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής

$$y(x) = f(x) + \int_0^x h(x-t)y(t)dt, \quad x \geq 0,$$

όπου f και h είναι πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$, λέμε ότι είναι μια <u>ολοκληρωτική εξίσωση</u>. Αν οι f και h είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης r για κάποιο $r \in \mathbb{R}$ και y είναι μια λύση της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης στο $[0,\infty)$, ν'αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace της y ορίζεται και να βρεθεί αυτός συναρτήσει των $\mathcal{L}[f]$ και $\mathcal{L}[g]$. <u>Εφαρμογή</u>: Να επιλυθούν οι παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις:

(i) $y(x)=x+\int_0^x y(t)\sin(x-t)dt, \ x\geq 0.$ (iii) $y(x)=e^{-x}\left[1+\int_0^x e^t y(t)dt\right], x\geq 0.$

(ii) $y(x)=x^2+\int_0^x (x-t)y(t)dt, \ x \geq 0.$ (iv) $y(x)=e^x-\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt, x\geq 0.$

4. Ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι εκθετικής τάξης r για κάποιο $r \in \mathbb{R}$. N'αποδειχθεί ότι

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0.$$

5. Ας είναι f μια συνάρτηση στο $[0,\infty)$ που ορίζεται ως εξής

$$f(x) = x-n \ \text{για} \ n \leq x < n+1 \quad (n = 0,1,\dots).$$

Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''+y = f(x), \quad x \geq 0; \ y(0) = y'(0) = 0.$$

6. Ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι εκθετικής τάξης r για κάποιο $r \in \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{x}$

υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) και

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ για } x > 0, \; g(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{x},$$

τότε ν'αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}[g](s)$ ορίζεται για όλα τα $s > r$ και

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[f](u)\,du, \quad s > r.$$

<u>Εφαρμογή</u>: Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων:

(i) $g_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$ και $g_1(0) = 1$.

(ii) $g_2(x) = \frac{\cos 2x - 1}{x}$, $x > 0$ και $g_2(0) = 0$.

(iii) $g_3(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$, $x > 0$ και $g_3(0) = a - b$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

7. Ας είναι f μια παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$ τέτοια ώστε οι f και f' να είναι εκθετικής τάξης r για κάποιο $r \in \mathbb{R}$ και η f' να είναι συνεχής στο $[0,\infty)$. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}[f](s) = f(0).$$

8. Να επιλυθεί το πρόβλημα:

$$y' - 4y + 3\int_0^x y(t)\,dt = 4x, \quad x \geq 0; \; y(0) = -2.$$

9. Αν $f(x)$, $x \geq 0$ είναι συνεχής και

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(1-e^{-2s})(1-3e^{-2s})}{s^2}\right](x) \text{ για } x \geq 0,$$

να βρεθούν οι τιμές $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$.

10. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s^2+4)^2}\right](x) = \int_0^x (\sin 2t - 2t\cos 2t)\,dt, \quad x \geq 0.$$

VII. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο Κεφάλαιο αυτό γίνεται μια εισαγωγική μελέτη της ευστάθειας μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Στο Εδάφιο 0 δίνονται οι έννοιες των διαφόρων ειδών ευστάθειας, εξετάζονται οι μη επεκτάσιμες λύσεις προβλημάτων αρχικών τιμών για μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και δίνεται το Λήμμα του Gronwall που θα μας χρειασθεί στο Εδάφιο 1. Το Εδάφιο 1 αφορά τη μελέτη της ευστάθειας διαταραγμένων διαφορικών εξισώσεων, ενώ στο Εδάφιο 2 αναπτύσσεται η δεύτερη μέθοδος του Lyapunov για τη μελέτη της ευστάθειας μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Σε καθένα απ'τα Εδάφια 1,2 δίνονται παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση. Τέλος, στο Εδάφιο 3 δίνονται μερικές γενικές ασκήσεις.

0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

Στο προκαταρκτικό αυτό Εδάφιο ορίζονται οι έννοιες των διαφόρων ειδών ευστάθειας για μια λύση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, γίνεται μια εξέταση των μη επεκτάσιμων λύσεων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Λήμμα του Gronwall.

0.1. Η ευστάθεια: Ορισμοί

Ας θεωρήσουμε τη (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

(E) $$y' = f(x,y),$$

όπου f είναι μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο του διαστήματος $[x_0,\infty)$ με ένα υποσύνολο του χώρου των n-διάστατων διανυσμάτων.

Αν u είναι μια λύση της εξίσωσης (E) στο διάστημα I_u και v είναι μια λύση της (E) στο διάστημα I_v, θα λέμε ότι η v είναι μια <u>επέκταση</u> της u αν και μόνο αν το I_v περιέχει γνήσια το I_u και $u(x)=v(x)$ για όλα τα $x\in I_u$. Μια λύση της (E) λέγεται <u>μη επεκτάσιμη</u> αν και μόνο αν δεν υπάρχει επέκταση αυτής. Στους ακόλουθους ορισμούς ο όρος "λύση" θα χρησιμοποιείται για μη επεκτάσιμες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (E).

Ας είναι, τώρα, $\tilde{y}$ μια λύση της (E) στο διάστημα $[x_0,\infty)$. Θα λέμε ότι:

(i) Η λύση $\tilde{y}$ είναι <u>ευσταθής</u> αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε κάθε λύση y της (E), τέτοια ώστε $|y(x_0)-\tilde{y}(x_0)|<\delta$, ορίζεται σ'ολόκληρο το διάστημα $[x_0,\infty)$ και πληροί την

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|<\varepsilon \text{ για όλα τα } x\geq x_0.$$

(ii) Η λύση $\tilde{y}$ είναι <u>ασυμπτωτικά ευσταθής</u> αν και μόνο αν αυτή είναι ευσταθής και επιπλέον υπάρχει $\delta_0>0$ έτσι ώστε κάθε λύση y της (E), τέτοια ώστε $|y(x_0)-\tilde{y}(x_0)|<\delta_0$, πληροί την

$$\lim_{x\to\infty}|y(x)-\tilde{y}(x)|=0.$$

(iii) Η λύση $\tilde{y}$ είναι <u>ομοιόμορφα ευσταθής</u> αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ έτσι ώστε κάθε λύση y της (E), τέτοια ώστε $|y(x_1)-\tilde{y}(x_1)|<\delta$ για κάποιο $x_1\geq x_0$, ορίζεται σ'ολόκληρο το διάστημα $[x_1,\infty)$ και πληροί την

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|<\varepsilon \text{ για όλα τα } x\geq x_1.$$

(iv) Η λύση $\tilde{y}$ είναι <u>ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής</u> αν και μόνο αν αυτή είναι ομοιόμορφα ευσταθής και επιπλέον υπάρχει $\delta_0>0$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\vartheta>0$ έτσι ώστε κάθε λύση y της (E), τέτοια ώστε $|y(x_1)-\tilde{y}(x_1)|<\delta_0$ για κάποιο $x_1\geq x_0$, πληροί την

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|<\varepsilon \text{ για όλα τα } x\geq x_1+\vartheta.$$

Είναι φανερό ότι, αν η λύση $\tilde{y}$ είναι ομοιόμορφα ευσταθής, τότε αυτή είναι και ευσταθής, και ακόμα ότι, όταν η $\tilde{y}$ είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής, είναι επίσης ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αν η λύση $\tilde{y}$ δεν είναι ευσταθής, τότε θα λέμε ότι αυτή είναι <u>ασταθής</u>.

0.2. Μη επεκτάσιμες λύσεις μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

Ας θεωρήσουμε την μη γραμμική (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

$$(E) \qquad y' = f(x,y),$$

όπου f είναι μια συνεχής n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο (υποσύνολο του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων)

$$C = \{(x,y) : x \geqq x_0 \text{ και } |y| < c\} \qquad (0 < c \leqq \infty).$$

Ας υποθέσουμε ότι: Για οποιοδήποτε σημείο $(\tilde{x}, y_0) \in C$, η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής $\{(x,y) : \tilde{x} \leqq x \leqq \tilde{x}+r, |y-y_0| \leqq b\}$ με $r > 0$ και $0 < b < c-|y_0|$. Η υπόθεση αυτή για τη συνάρτηση f ικανοποιείται στην περίπτωση κατά την οποία οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ $(k = 1,\ldots,n)$, όπου y_k $(k = 1,\ldots,n)$ είναι οι συντεταγμένες της μεταβλητής y, υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σύνολο C.

Απ'το Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου I (βλ. Παρατήρηση μετά την απόδειξη του θεωρήματος αυτού) προκύπτει ότι, αν $(\tilde{x}, y_0) \in C$ και r είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός και θεωρήσουμε την αρχική συνθήκη

$$(\Sigma) \qquad y(\tilde{x}) = y_0,$$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (E)-(Σ) έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[\tilde{x}, \tilde{x}+r_1]$, όπου $r_1 = \min\{r, b/M\}$ με b ένα αριθμό τέτοιον ώστε $0 < b < c-|y_0|$ και $M = \max\{|f(x,y)| : \tilde{x} \leqq x \leqq \tilde{x}+r, |y-y_0| \leqq b\}$ (αν $M = 0$, τότε $r_1 = r$).

Αποδεικνύεται το ακόλουθο συμπέρασμα (το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 6):

Αν $(x^*, y^*) \in C$, υπάρχει ακριβώς μια μη επεκτάσιμη λύση y της διαφορικής εξίσωσης (E) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x^*) = y^*$.

Ας είναι, τώρα, y μια μη επεκτάσιμη λύση της (E) και ας υποθέσουμε ότι το διάστημα ορισμού I αυτής είναι κλειστό δεξιά με δεξιό άκρο $\tilde{x} > x_0$. Τότε, αν θεωρήσουμε ένα θετικό αριθμό r και έναν αριθμό b με $0 < b < c-|y(\tilde{x})|$ και θέσουμε $M = \max\{|f(x,y)| : \tilde{x} \leqq x \leqq \tilde{x}+r, |y-y(\tilde{x})| \leqq b\}$, θα έχουμε ότι η διαφορική εξίσωση (E) έχει ακριβώς μια λύση $\bar{y}$ στο διάστημα $[\tilde{x}, \tilde{x}+r_1]$, $r_1 = \min\{r, b/M\}$, τέτοια ώστε $\bar{y}(\tilde{x}) = y(\tilde{x})$. Αλλά τότε η συνάρτηση u με $u(x) = y(x)$ για $x \in I$ και $u(x) = \bar{y}(x)$ για $x \in [\tilde{x}, \tilde{x}+r_1]$ θα είναι μια λύση της (E) στο διάστημα $I \cup [\tilde{x}, \tilde{x}+r_1]$, η οποία θα είναι μια επέκταση της y. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

<u>Το διάστημα ορισμού μιας μη επεκτάσιμης λύσης της (Ε) είναι ανοικτό δεξιά.</u>

Για τις μη επεκτάσιμες λύσεις της (Ε) ισχύει και το ακόλουθο συμπέρασμα, το οποίο θα χρειασθούμε στα επόμενα Εδάφια.

<u>Ας είναι y μια μη επεκτάσιμη λύση της (Ε) και ας υποθέσουμε ότι το δεξιό άκρο $\bar{x}$ του διαστήματος ορισμού I αυτής είναι πεπερασμένο. Τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to\bar{x}} |y(x)| = c$.</u>

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Ας είναι $x^* < \bar{x}$ τα άκρα του I. Τότε $\bar{x} \notin I$. Ας υποθέσουμε ότι η σχέση $\lim\limits_{x\to\bar{x}} |y(x)| = c$ δεν ισχύει. Τότε, για $c = \infty$, θα έχουμε ότι υπάρχει θετικός αριθμός ε_1 με $\varepsilon_1 < c$ τέτοιος ώστε, για κάθε δ με $0 < \delta < \bar{x}-x^*$, να υπάρχει $x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x})$ με $|y(x)| \leq \varepsilon_1$. Όμοια, όταν $c < \infty$, υπάρχει ε_2, $0 < \varepsilon_2 < c$ έτσι ώστε, για κάθε δ με $0 < \delta < \bar{x}-x^*$, να υπάρχει $x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x})$ τέτοιο ώστε $\big||y(x)|-c\big| \geq \varepsilon_2$, οπότε θα είναι και $|y(x)| \leq c-\varepsilon_2$. Άρα, και στις δύο περιπτώσεις όπου $c = \infty$ ή $c < \infty$, ισχύει ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός ε με $\varepsilon < c$ τέτοιος ώστε, για κάθε δ με $0 < \delta < \bar{x}-x^*$, να είναι $|y(x)| \leq \varepsilon$ για κάποιο $x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x})$.

Θεωρούμε μ, ε^* με $0 < \mu < \bar{x}-x^*$, $\varepsilon < \varepsilon^* < c$, και το σύνολο

$$Q = \{(x,y) : \bar{x}-\mu \leq x \leq \bar{x}+\mu, |y| \leq \varepsilon^*\}.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε μια θετική σταθερά M, τέτοια ώστε $|f(x,y)| \leq M$ για όλα τα $(x,y) \in Q$, και θέτουμε $\delta = \min\{\mu, (\varepsilon^*-\varepsilon)/M\}$. Τότε $0 < \delta < \bar{x}-x^*$ και άρα υπάρχει $\tilde{x} \in (\bar{x}-\delta, \bar{x})$, τέτοιο ώστε

$$|y(\tilde{x})| \leq \varepsilon.$$

Θέτουμε $y(\tilde{x}) = \tilde{y}$, οπότε $|\tilde{y}| \leq \varepsilon$, και θεωρούμε το σύνολο

$$Q_1 = \{(x,y) : \tilde{x} \leq x \leq \tilde{x}+\mu, |y-\tilde{y}| \leq \varepsilon^*-\varepsilon\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι ένα υποσύνολο του Q, αφού για κάθε $(x,y) \in Q_1$

$$\bar{x}-\mu \leq \bar{x}-\delta < \tilde{x} \leq x \leq \tilde{x}+\mu < \bar{x}+\mu$$

και

$$|y| \leq |y-\tilde{y}|+|\tilde{y}| \leq (\varepsilon^*-\varepsilon)+\varepsilon = \varepsilon^*.$$

Ας είναι $M_1 = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in Q_1\}$. Τότε $M_1 \leq M$ και επομένως, αν θέσουμε $\sigma = \min\{\mu, (\varepsilon^*-\varepsilon)/M_1\}$, θα έχουμε $\sigma \geq \delta$. Επειδή η f είναι συνεχής και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz στο σύνολο Q_1, η διαφορική εξίσωση (Ε) θα έχει ακριβώς μια λύση u στο διάστημα

$[\tilde{x},\tilde{x}+\sigma]$ με $u(\tilde{x})=\tilde{y}=y(\tilde{x})$. Τότε η συνάρτηση v με $v(x)=y(x)$ για $x\in I\cap(-\infty,\tilde{x}]$ και $v(x)=u(x)$ για $x\in[\tilde{x},\tilde{x}+\sigma]$ θα είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (E). Η v είναι μια επέκταση της y, αφού $\tilde{x}+\sigma\geq\tilde{x}+\delta>(\bar{x}-\delta)+\delta=\bar{x}$. Αυτό είναι ένα άτοπο, γιατί η y είναι μη επεκτάσιμη.

0.3. Το Λήμμα του Gronwall

Το παρακάτω συμπέρασμα, γνωστό ως Λήμμα του Gronwall, θα το χρησιμοποιήσουμε στο Εδάφιο 1.

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ GRONWALL. *Ας είναι u και v δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα κλειστό αριστερά διάστημα I με αριστερό άκρο $\bar{x}$. Ακόμα, ας είναι M μια σταθερά και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση v είναι μη αρνητική στο I. Αν*

$$u(x)\leq M+\int_{\bar{x}}^{x}v(t)u(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x\in I,$$

τότε ισχύει

$$u(x)\leq M\exp\left(\int_{\bar{x}}^{x}v(t)\,dt\right) \quad \text{για όλα τα } x\in I.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$z(x)=\int_{\bar{x}}^{x}v(t)u(t)\,dt, \quad x\in I,$$

οπότε είναι

$$u(x)\leq M+z(x) \quad \text{για } x\in I,$$

και έτσι παίρνουμε για κάθε $x\in I$

$$z'(x)=v(x)u(x)\leq v(x)[M+z(x)]=Mv(x)+v(x)z(x)$$

ή

$$z'(x)-v(x)z(x)\leq Mv(x)$$

ή ακόμα

$$[z'(x)-v(x)z(x)]\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{x}v(t)\,dt\right)\leq Mv(x)\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{x}v(t)\,dt\right).$$

'Αρα

$$\left[z(x)\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{x}v(t)\,dt\right)\right]'\leq Mv(x)\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{x}v(t)\,dt\right) \quad \text{για κάθε } x\in I$$

και επομένως για όλα τα $x\in I$

$$z(x)\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{x} v(t)\,dt\right) \leq M\int_{\bar{x}}^{x} v(s)\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{s} v(t)\,dt\right)ds = -M\exp\left(-\int_{\bar{x}}^{x} v(t)\,dt\right)+M$$

ή

$$z(x) \leq -M+M\exp\left(\int_{\bar{x}}^{x} v(t)\,dt\right).$$

'Ετσι, έχουμε για τυχόν $x \in I$

$$u(x) \leq M+z(x) \leq M\exp\left(\int_{\bar{x}}^{x} v(t)\,dt\right).$$

1. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στο Εδάφιο αυτό εξετάζεται η ευστάθεια διαταραγμένων διαφορικών εξισώσεων σε συνδυασμό με την ευστάθεια ενός αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος. Αποδεικνύεται ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, η ομοιόμορφη ευστάθεια ή η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του αντίστοιχου ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος συνεπάγεται (Θεωρήματα 1 ή 2 αντίστοιχα) την ομοιόμορφη ή την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια αντίστοιχα της μηδενικής λύσης της διαταραγμένης διαφορικής εξίσωσης. Δίνονται ορισμένα παραδείγματα και επίσης προτείνονται ασκήσεις για λύση.

1.1. Ευστάθεια της μηδενικής λύσης διαταραγμένων διαφορικών εξισώσεων

Θα θεωρήσουμε εδώ τη μη γραμμική (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

(S) $$y' = A(x)y+g(x,y),$$

όπου A είναι ένας n-τάξης (τετραγωνικός) πίνακας-συνάρτηση σ'ένα διάστημα $[x_0,\infty)$ και g είναι μια n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο

$$C = \{(x,y) : x \geq x_0 \text{ και } |y| < c\} \qquad (0 < c \leq \infty)$$

(το οποίο είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού χώρου της πραγματικής ευθείας με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων). Θα υποθέτουμε ότι

$$g(x,0)=0 \text{ για όλα τα } x \geq x_0,$$

έτσι ώστε η μηδενική n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση στο $[x_0,\infty)$ να είναι μια λύση στο διάστημα αυτό της διαφορικής εξίσωσης (S) (μηδενική λύση της (S)). Ακόμα, ο πίνακας-συνάρτηση A καθώς και η συνάρτηση g θα υποτίθεται ότι είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού των. Επίσης, θα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g είναι τέτοια ώστε: Για οποιοδήποτε $(\tilde{x},y_0)\in C$, η g πληροί τη συνθήκη του Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής $\{(x,y): \tilde{x}\leq x\leq \tilde{x}+r, |y-y_0|\leq b\}$ με $r>0$ και $0<b<c-|y_0|$. Ας σημειωθεί ότι, όταν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ $(k=1,\ldots,n)$, όπου y_k $(k=1,\ldots,n)$ είναι οι συντεταγμένες της μεταβλητής y, υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σύνολο C, τότε η τελευταία αυτή απαίτηση για τη συνάρτηση g ικανοποιείται.

Οι παραπάνω υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι το διάστημα ορισμού μιας μη επεκτάσιμης λύσης y της (S) είναι ανοικτό δεξιά και, αν το δεξιό άκρο $\bar{x}$ του διαστήματος ορισμού της y είναι πεπερασμένο, τότε ισχύει $\lim_{x\to\bar{x}}|y(x)|=c$. Σ' ολόκληρη την παράγραφο αυτή, ο όρος "λύση" θα χρησιμοποιείται αποκλειστικά για τις μη επεκτάσιμες λύσεις της (S).

Θα δοθούν συνθήκες, πάνω στη συνάρτηση g, ώστε η ομοιόμορφη ευστάθεια ή η ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$(S_0) \qquad y'=A(x)y$$

να εξασφαλίζει την ομοιόμορφη ευστάθεια ή την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια αντίστοιχα της μηδενικής λύσης της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (S). Λέμε ότι η (S) είναι η διαταραγμένη διαφορική εξίσωση που αντιστοιχεί στο γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) και ακόμα λέμε ότι το (S_0) είναι το γραμμικό σύστημα της πρώτης προσέγγισης της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (S).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ας υποθέσουμε ότι

$$|g(x,y)|\leq\gamma(x)|y| \text{ για όλα τα } (x,y)\in C,$$

όπου γ είναι μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[x_0,\infty)$ τέτοια ώστε

$$\int_{x_0}^{\infty}\gamma(x)\,dx<\infty.$$

Αν το γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) είναι ομοιόμορφα ευσταθές, τότε η μηδενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσω-

<u>σης</u> (S) <u>είναι</u> <u>ομοιόμορφα</u> <u>ευσταθής</u>.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι το γραμμικό διαφορικό σύστημα (S_0) είναι ομοιόμορφα ευσταθές και ας είναι Y ένας βασικός πίνακας αυτού. Τότε υπάρχει μια σταθερά $K>0$ τέτοια ώστε (βλ. Θεώρημα 21 του Κεφαλαίου IV)

$$|Y(x)Y^{-1}(s)| \leq K \text{ για όλα τα } x,s \text{ με } x \geq s \geq x_0.$$

Ας είναι ε ένας τυχών αριθμός με $0<\varepsilon<c$ και ας θέσουμε $\delta=\varepsilon/L$, όπου

$$L = K\exp\left(K\int_{x_0}^{\infty}\gamma(x)\,dx\right).$$

Θεωρούμε μια τυχούσα λύση y της διαφορικής εξίσωσης (S), η οποία είναι τέτοια ώστε

$$|y(x_1)| < \delta \text{ για κάποιο } x_1 \geq x_0,$$

και ας είναι $\bar{x}$ το δεξιό άκρο του διαστήματος ορισμού I αυτής. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι $\bar{x}=\infty$ και ότι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geq x_1.$$

Η συνάρτηση y είναι μια λύση στο I του μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$z' = A(x)z+g(x,y(x))$$

και έτσι θα έχουμε (βλ. Θεώρημα 15 του Κεφαλαίου IV)

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_1)y(x_1)+\int_{x_1}^{x}Y(x)Y^{-1}(t)g(t,y(t))\,dt,\quad x\in[x_1,\bar{x}).$$

'Αρα, για κάθε x με $x_1 \leq x < \bar{x}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq |Y(x)Y^{-1}(x_1)|\,|y(x_1)|+\int_{x_1}^{x}|Y(x)Y^{-1}(t)|\,|g(t,y(t))|\,dt\\ &\leq K|y(x_1)|+K\int_{x_1}^{x}\gamma(t)\,|y(t)|\,dt,\end{aligned}$$

λόγω των υποθέσεων του θεωρήματος. Με τη χρήση του Λήμματος του Gronwall, λαμβάνουμε στη συνέχεια

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq K|y(x_1)|\exp\left(K\int_{x_1}^{x}\gamma(t)\,dt\right) \leq K|y(x_1)|\exp\left(K\int_{x_1}^{\infty}\gamma(t)\,dt\right)\\ &= |y(x_1)|L < \delta L = \varepsilon\end{aligned}$$

δεδομένα p και q. Πραγματικά· η μοναδική λύση του (W)-(*) είναι $z=z_0+w$, όπου z_0 είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (W_0)-(*) [(W_0) είναι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της (W)] και w είναι η λύση της (W) που δόθηκε παραπάνω. Έτσι, η z εξαρτάται συνεχώς απ'τις p και q, επειδή το ίδιο συμβαίνει για την z_0 και αφού η w δεν εξαρτάται απ'τις συναρτήσεις p και q.

2.2. Προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Ας είναι c και ℓ δύο θετικές σταθερές, f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0,\ell]$, και m_1 και m_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στον ημιάξονα $[0,\infty)$. Τότε το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνάρτησης z ορισμένης στο σύνολο $\bar{\Omega}=\{(x,t):0\leq x\leq \ell, t\geq 0\}$ που να είναι C^2 στον τόπο $\Omega=\{(x,t): 0<x<\ell, t>0\}$ και να πληροί τις συνθήκες

$$(\Pi)\quad \begin{cases} z_{tt}-c^2z_{xx}=0, \ 0<x<\ell, \ t>0 & \text{(a)}\\ z(x,0)=f(x), \ 0\leq x\leq \ell & \text{(b)}\\ z_t(x,0)=g(x), \ 0\leq x\leq \ell & \text{(c)}\\ z(0,t)=m_1(t), \ t\geq 0 & \text{(d)}\\ z(\ell,t)=m_2(t), \ t\geq 0, & \text{(e)}\end{cases}$$

λέμε ότι είναι ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Η συνθήκη (a) εκφράζει ότι ο περιορισμός της συνάρτησης z στον τόπο Ω είναι μια λύση της εξίσωσης

$$z_{tt}-c^2z_{xx}=0, \ (x,t)\in\Omega.$$

Οι συνθήκες (b) και (c) λέγονται αρχικές συνθήκες, ενώ οι συνθήκες (d) και (e) καλούνται συνοριακές συνθήκες.

Για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα σχετικά με το μονοσήμαντο των λύσεων αυτού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π) έχει το πολύ μια λύση z που να είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι z^* και $\tilde{z}$ δύο λύσεις του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π) που είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$. Θέτουμε $z=z^*-\tilde{z}$ και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση z είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$ και επιπλέον αυτή είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} z_{tt}-c^2 z_{xx} = 0, & 0 < x < \ell, \ t > 0 \\ z(x,0) = z_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(0,t) = z(\ell,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \{c^2[z_x(x,t)]^2+[z_t(x,t)]^2\}dx, \quad t \geq 0.$$

Τότε, για όλα τα $t \geq 0$, έχουμε

$$\frac{dI}{dt}(t) = \int_0^\ell [c^2 z_x(x,t)z_{xt}(x,t)+z_t(x,t)z_{tt}(x,t)]dx$$

$$= \int_0^\ell [c^2 z_x(x,t)z_{xt}(x,t)+z_t(x,t)c^2 z_{xx}(x,t)]dx$$

$$= c^2\int_0^\ell (z_x z_t)_x(x,t)dx = c^2[z_x(\ell,t)z_t(\ell,t)-z_x(0,t)z_t(0,t)].$$

Αλλά, απ'τη συνθήκη $z(0,t) = 0$ για $t \geq 0$ προκύπτει ότι $z_t(0,t) = 0$, $t \geq 0$. 'Ομοια, η συνθήκη $z(\ell,t) = 0$ για $t \geq 0$ δίνει $z_t(\ell,t) = 0, t \geq 0$. 'Ετσι, είναι

$$\frac{dI}{dt}(t) = 0 \text{ για όλα τα } t \geq 0,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση I είναι σταθερή. Επειδή $z(x,0) = 0$ για $0 \leq x \leq \ell$, είναι $z_x(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq \ell$. Εξάλλου, έχουμε $z_t(x,0) = 0$ για $0 \leq x \leq \ell$. Επομένως, παίρνουμε για κάθε $t \geq 0$

$$I(t) = I(0) = \int_0^\ell \{c^2[z_x(x,0)]^2+[z_t(x,0)]^2\}dx = 0,$$

δηλαδή

$$I(t) = 0 \text{ για όλα τα } t \geq 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$z_x(x,t) = z_t(x,t) = 0 \text{ για κάθε } (x,t) \in \overline{\Omega}$$

και επομένως η συνάρτηση z είναι σταθερή. 'Ετσι, επειδή $z(x,0)=0$ για $0 \leq x \leq \ell$, η z είναι η μηδενική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, που σημαίνει ότι $z^* = \tilde{z}$.

Στο υπόλοιπο μέρος αυτής της παραγράφου, θ'ασχοληθούμε με το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

y τυχούσα λύση της διαφορικής εξίσωσης (S) τέτοια ώστε να ισχύει

$$|y(x_1)| < \delta_0 \text{ για κάποιο } x_1 \geq x_0$$

και ας συμβολίσουμε με $\bar{x}$ το δεξιό άκρο του διαστήματος ορισμού αυτής. Αρκεί να διαπιστώσουμε ότι $\bar{x} = \infty$ και ότι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geq x_1 + \vartheta.$$

Όπως παραπάνω, παίρνουμε

$$|y(x)| \leq K|y(x_1)| e^{-\beta(x-x_1)} \quad \text{για κάθε } x \in [x_1, \bar{x}).$$

Απ'αυτό προκύπτει

$$|y(x)| \leq K|y(x_1)| < K\delta_0 < c \text{ για } x \in [x_1, \bar{x})$$

και επομένως $\bar{x} = \infty$. Στη συνέχεια, για όλα τα $x \geq x_1 + \vartheta$ έχουμε

$$|y(x)| \leq K|y(x_1)| e^{-\beta\vartheta} < K\delta_0 \varepsilon < \varepsilon.$$

1.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να διαπιστωθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -y_2 + \frac{1}{x^2}(y_1^2 + y_2^3), \quad y_2' = y_1 + \frac{1}{x^3}(y_1^3 + y_2^3); \quad x \geq 1$$

είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

Λύση. Το διαφορικό μας σύστημα γράφεται στη μορφή (S) με

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ για } x \geq 1, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2}(y_1^2 + y_2^3) \\ \frac{1}{x^3}(y_1^3 + y_2^3) \end{pmatrix}$$

για $(x,y) \in C$

όπου

$$C = \{(x,y) : x \geq 1 \text{ και } |y| = |y_1| + |y_2| < 1\}.$$

Αυτό έχει τη μηδενική λύση $y(x) = 0$, $x \geq 1$. Παρατηρούμε ότι το γραμμικό διαφορικό σύστημα $y' = A(x)y$ είναι ομοιόμορφα ευσταθές, αφού ο συντελεστής πίνακας αυτού είναι σταθερός και οι ιδιοτιμές του i και $-i$ είναι απλές και έχουν πραγματικό μέρος μηδέν (βλ. Θεώρημα 22 του Κεφαλαίου IV). Επίσης,

$$|g(x,y)| = \frac{1}{x^2}|y_1^2 + y_2^3| + \frac{1}{x^3}|y_1^3 + y_2^3| \leq \frac{1}{x^2}\left(|y_1|^2 + |y_1|^3 + 2|y_2|^3\right)$$

$$\leq \frac{2}{x^2}(|y_1|+|y_2|) = \frac{2}{x^2}|y|$$

για όλα τα $(x,y) \in C$, δηλαδή είναι

$$|g(x,y)| \leq \gamma(x)|y| \quad \text{για κάθε } (x,y) \in C,$$

όπου $\gamma(x) = 2/x^2$, $x \geq 1$. Επειδή $\int_1^\infty \gamma(x)dx < \infty$, το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -2y_1+y_2+3y_3+9y_2^3, \quad y_2' = -6y_2-5y_3+7y_3^5, \quad y_3' = -y_3+y_1^2+y_2^2$$

είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

Λύση. Το διαφορικό σύστημα που δόθηκε έχει τη μηδενική λύση και γράφεται στη μορφή (S) με

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ για } x \geq 0, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 9y_2^3 \\ 7y_3^5 \\ y_1^2+y_2^2 \end{pmatrix}$$

για $(x,y) \in C$

όπου

$$C = \{(x,y) : x \geq 0 \text{ και } |y| = |y_1|+|y_2|+|y_3| < c\} \quad (0 < c \leq 1).$$

Για κάθε $(x,y) \in C$ παίρνουμε

$$|g(x,y)| = 9|y_2|^3+7|y_3|^5+|y_1|^2+|y_2|^2 \leq c|y_1|+10c|y_2|+7c|y_3|$$

$$\leq 10c(|y_1|+|y_2|+|y_3|) = 10c|y| = \gamma|y|,$$

όπου $\gamma = 10c$. Η σταθερά $\gamma > 0$ είναι αρκετά μικρή, αφού το c μπορεί να επιλεγεί όσο θέλουμε μικρό. Εξάλλου ο συντελεστής πίνακας του γραμμικού διαφορικού συστήματος $y' = A(x)y$ είναι σταθερός και έχει αρνητικές ιδιοτιμές (τις $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -1$) και άρα (βλ. Θεώρημα 22 του Κεφαλαίου IV) το γραμμικό αυτό σύστημα είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, η μηδενική λύση του μη γραμμικού διαφορικού συστήματός μας είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να διαπιστωθεί ότι η λύση $y_1^0(x)=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$; $y_2^0(x)=e^{-x}$, $x\geq 1$ του διαφορικού συστήματος

$$\begin{cases} y_1'=-\frac{1}{x^2}+e^{-x}-y_2+\frac{1}{x^2}\left[\left(y_1-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y_2-e^{-x}\right)^3\right], & x\geq 1 \\ y_2'=-\frac{1}{x}-e^{-x}+y_1+\frac{1}{x^3}\left[\left(y_1-\frac{1}{x}\right)^3+\left(y_2-e^{-x}\right)^3\right], & x\geq 1 \end{cases}$$

είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

Λύση. Εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$z_1=y_1-y_1^0,\quad z_2=y_2-y_2^0.$$

Τότε το διαφορικό μας σύστημα μετασχηματίζεται στο

$$z_1'=-z_2+\frac{1}{x^2}\,(z_1^2+z_2^3),\quad z_2'=z_1+\frac{1}{x^3}\,(z_1^3+z_2^3),\quad x\geq 1,$$

του οποίου η μηδενική λύση είναι (Παράδειγμα 1) ομοιόμορφα ευσταθής. 'Αρα, η λύση y_1^0, y_2^0 είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

1.3. Ασκήσεις

1. Ν'αποδειχθεί ότι, για καθένα απ'τα παρακάτω διαφορικά συστήματα, η μηδενική λύση είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

(i) $y_1'=-2y_1+y_2+3y_3+9e^{-x}y_2^3$, $y_2'=-6y_2-5y_3+7e^{-x}y_3^5$,
$y_3'=-y_3+e^{-2x}(y_1^2+y_2^2)$.

(ii) $y_1'=-y_1-7y_2+\frac{1}{x^2}\,y_2^2y_1^3$, $y_2'=-3y_2+e^{-x}y_1^2$.

2. Ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1'=-y_1+(y_1^2+y_2^2)^{3/2},\quad y_2'=y_1-2y_2$$

είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

3. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Η λύση $y_1=x$, $y_2=0$ του διαφορικού συστήματος

$$y_1'=1+x-y_1-7y_2+\frac{1}{x^2}\,y_2^2(y_1-x)^3,\quad y_2'=-3y_2+e^{-x}(y_1-x)^2$$

είναι ομοιόμορφα ευσταθής. (ii) Η σταθερή λύση $y_1=1$, $y_2=2$ του διαφορικού συστήματος

$$y_1'=1-y_1+(y_1^2+y_2^2-2y_1-4y_2+5)^{3/2},\quad y_2'=y_1-2y_2+3$$

είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής.

2. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ. Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ LYAPUNOV

Εδώ θ'αναπτυχθεί μια μέθοδος για τη μελέτη της ευστάθειας λύσεων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η οποία είναι γνωστή ως δεύτερη μέθοδος του Lyapunov. Θα δοθούν κριτήρια για την ευστάθεια, ομοιόμορφη ευστάθεια, ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια, αστάθεια, και ασυμπτωτική ευστάθεια (Θεωρήματα 3,4,5,6 και 7 αντίστοιχα) της μηδενικής λύσης μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Η ειδική περίπτωση των αυτόνομων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων θα θεωρηθεί ιδιαίτερα και θα ληφθούν, ως συνέπειες των Θεωρημάτων 3,6 και 7, κριτήρια για την ευστάθεια (και ομοιόμορφη ευστάθεια), αστάθεια, και ασυμπτωτική ευστάθεια (και ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια) της μηδενικής λύσης (Θεωρήματα 3΄, 6΄ και 7΄ αντίστοιχα). Θα δοθούν, τέλος, μερικά παραδείγματα και θα προταθούν ασκήσεις για λύση.

2.1. Ευστάθεια της μηδενικής λύσης μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η δεύτερη μέθοδος του Lyapunov

Θεωρούμε τη μη γραμμική (διανυσματική) διαφορική εξίσωση

$$\text{(E)} \qquad y' = f(x,y),$$

όπου f είναι μια συνεχής n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο (υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου του $[x_0,\infty)$ με τον χώρο των n-διάστατων διανυσμάτων)

$$C = \{(x,y) : x \geqq x_0 \text{ και } |y| < c\} \qquad (0 < c \leqq \infty),$$

τέτοια ώστε

$$f(x,0) = 0 \text{ για όλα τα } x \geqq x_0.$$

Η τελευταία απαίτηση για τη συνάρτηση f εξασφαλίζει ότι η (E) έχει τη λύση $y(x) = 0$, $x \geqq x_0$ (μηδενική λύση της (E)). Θα υποτίθεται ότι η f έχει την ιδιότητα: Για οποιοδήποτε $(\tilde{x},y_0) \in C$, η f πληροί τη συνθήκη του Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής $\{(x,y) : \tilde{x} \leq x \leq \tilde{x}+r,\ |y-y_0| \leq b\}$ με $r > 0$ και $0 < b < c-|y_0|$. Όταν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ $(k = 1,\ldots,n)$, όπου y_k $(k = 1,\ldots,n)$ είναι οι συντεταγμένες της y, υπάρχουν ως συνεχείς συναρτήσεις στο C, τότε η f έχει την παραπάνω ιδιότητα.

Το διάστημα ορισμού I μιας μη επεκτάσιμης λύσης y της εξίσωσης (E) είναι ανοικτό δεξιά και, αν $\bar{x}$ είναι το δεξιό άκρο με $\bar{x}<\infty$, τότε $\lim_{x\to\bar{x}} |y(x)| = c$. Σ'αυτή την παράγραφο, οι θεωρούμενες λύσεις της (E) θα υποτίθενται μη επεκτάσιμες.

Θα δώσουμε τώρα μερικούς ορισμούς. Μια συνεχής πραγματική συνάρτηση W ορισμένη στο σύνολο $C_0 = \{y : |y| < c\}$ θα λέμε ότι είναι θετικά ορισμένη, αν και μόνο αν

$$W(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0 \text{ για κάθε } y \text{ με } 0 < |y| < c.$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε μια συνεχή πραγματική συνάρτηση V ορισμένη στο σύνολο C. Θα λέμε ότι η συνάρτηση V είναι θετικά ορισμένη, αν και μόνο αν

$$V(x,0) = 0 \text{ για όλα τα } x \geqq x_0$$

και υπάρχει μια θετικά ορισμένη συνάρτηση W στο σύνολο $C_0 = \{y : |y| < c\}$ τέτοια ώστε

$$V(x,y) \geqq W(y) \text{ για κάθε } (x,y) \in C.$$

Επίσης, αν

$$\lim_{y\to 0} [\sup_{x\geqq x_0} |V(x,y)|] = 0,$$

τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση V έχει ένα απειροστό άνω φράγμα. Τέλος, με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σύνολο C οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}$ και $\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $(i = 1,\dots,n)$, όπου y_i $(i = 1,\dots,n)$ είναι οι συντεταγμένες της μεταβλητής y, η συνάρτηση V' που ορίζεται με τον τύπο

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i,$$

όπου f_i $(i = 1,\dots,n)$ είναι οι συνιστώσες της συνάρτησης f, θα λέμε ότι είναι η παράγωγος της V ως προς τη διαφορική εξίσωση (E).

Τα παρακάτω Θεωρήματα 3,4 και 5 είναι κριτήρια για την ευστάθεια, ομοιόμορφη ευστάθεια και ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια αντίστοιχα της μηδενικής λύσης της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E), ενώ το Θεώρημα 6 δίνει συνθήκες για να είναι ασταθής η μηδενική λύση της (E).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση V στο σύνολο C, η οποία είναι θετικά ορισμένη και της οποίας η παράγωγος V' ως προς την (E) είναι μη θετική.

Τότε η μηδενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) είναι ευσταθής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση V είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$V(x,0) = 0 \text{ για όλα τα } x \geqq x_0$$

και

$$V(x,y) \geqq W(y) \text{ για κάθε } (x,y) \in C,$$

όπου W είναι μια συνεχής συνάρτηση στο σύνολο $C_0 = \{y : |y| < c\}$ με

$$W(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0 \text{ για κάθε } y \text{ με } 0 < |y| < c.$$

Ακόμα, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}$ και $\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $(i = 1,\dots,n)$ είναι συνεχείς και

$$V'(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}(x,y) f_i(x,y) \leqq 0 \text{ για όλα τα } (x,y) \in C.$$

Θεωρούμε τυχόν ε με $0 < \varepsilon < c$. Η συνεχής συνάρτηση W παίρνει στο συμπαγές σύνολο $\{y : |y| = \varepsilon\}$ μια ελάχιστη τιμή που είναι θετική. Ας είναι

$$\mu = \min_{|y|=\varepsilon} W(y) > 0.$$

Επειδή η V είναι συνεχής και επειδή $V(x_0,0) = 0$, υπάρχει δ με $0 < \delta < \varepsilon$ έτσι ώστε

$$V(x_0,y) < \mu \text{ για κάθε } y \text{ με } |y| < \delta.$$

Ας είναι τώρα $\underline{y}$ μια οποιαδήποτε λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) με

$$|y(x_0)| < \delta$$

και ας είναι $\bar{x}$ το δεξιό άκρο του διαστήματος ορισμού αυτής. Θ'αποδείξουμε ότι $\bar{x} = \infty$ και ότι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geqq x_0.$$

Θέτουμε

$$L = \{x^* \in [x_0,\bar{x}) : |y(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x \in [x_0,x^*]\}$$

και $\tilde{x} = \sup L$ $(L \neq \emptyset$, αφού $x_0 \in L)$. Είναι φανερό ότι $\tilde{x} > x_0$, $\tilde{x} \notin L$ και

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \in [x_0, \tilde{x}).$$

Αν $\tilde{x} < \bar{x}$, τότε $|y(\tilde{x})| = \varepsilon$ και άρα, απ' τον ορισμό του μ, είναι

$$W(y(\tilde{x})) \geqq \mu.$$

Αλλά έχουμε

$$V(\tilde{x}, y(\tilde{x})) - V(x_0, y(x_0)) = \int_{x_0}^{\tilde{x}} V'(t, y(t))\,dt \leqq 0$$

και επομένως

$$W(y(\tilde{x})) \leqq V(\tilde{x}, y(\tilde{x})) \leqq V(x_0, y(x_0)) < \mu,$$

που είναι ένα άτοπο. Έτσι, αναγκαστικά είναι $\tilde{x} = \bar{x}$ και άρα

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \in [x_0, \bar{x}).$$

Τέλος, είναι $\bar{x} = \infty$. Πραγματικά· αν $\bar{x} < \infty$, τότε $\lim_{x \to \bar{x}} |y(x)| = c$, το οποίο είναι ένα άτοπο, αφού $|y(x)| < \varepsilon < c$ για $x \in [x_0, \bar{x})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση V στο σύνολο C, η οποία είναι θετικά ορισμένη και έχει ένα απειροστό άνω φράγμα και της οποίας η παράγωγος V' ως προς την (Ε) είναι μη θετική.

Τότε η μηδενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Ε) είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τη συνεχή συνάρτηση V έχουμε

$$V(x, 0) = 0 \text{ για κάθε } x \geqq x_0$$

και

$$V(x, y) \geqq W(y) \text{ για όλα τα } (x, y) \in C,$$

όπου W είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $C_0 = \{y : |y| < c\}$ τέτοια ώστε

$$W(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0 \text{ για } 0 < |y| < c.$$

Ακόμα, είναι

$$\lim_{y \to 0} v(y) = 0, \text{ όπου } v(y) = \sup_{x \geqq x_0} |V(x, y)| \text{ για } |y| < c.$$

Επίσης, έχουμε

$$V'(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}(x, y) f_i(x, y) \leqq 0 \text{ για κάθε } (x, y) \in C,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}$ και $\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ είναι συνεχείς.

Θεωρούμε τυχόντα αριθμό ε με $0 < \varepsilon < c$ και συμβολίζουμε με μ

την ελάχιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης W στο συμπαγές σύνολο $\{y : |y| = \varepsilon\}$, δηλαδή θέτουμε

$$\mu = \min_{|y|=\varepsilon} W(y).$$

Είναι φανερό ότι $\mu > 0$. Επειδή $\lim_{y\to 0} v(y) = 0$, υπάρχει αριθμός δ με $0 < \delta < \varepsilon$ τέτοιος ώστε $v(y) < \mu$ για κάθε y με $|y| < \delta$, οπότε θα είναι

$$V(x,y) < \mu \text{ για όλα τα } x,y \text{ με } x \geqq x_0 \text{ και } |y| < \delta.$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε τυχούσα λύση y της (E) τέτοια ώστε

$$|y(x_1)| < \delta \text{ για κάποιο } x_1 \geqq x_0$$

και ας συμβολίσουμε με $\bar{x}$ το δεξιό άκρο του διαστήματος ορισμού αυτής. Θ'αποδείξουμε ότι $\bar{x} = \infty$ και ότι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geqq x_1.$$

Η απόδειξη αυτού γίνεται όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος 3 με το x_1 στη θέση του x_0, αφού είναι

$$V(x_1,y) < \mu \text{ για κάθε } y \text{ με } |y| < \delta.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 5</u>. <u>Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση</u> V <u>στο σύνολο</u> C, <u>η οποία είναι θετικά ορισμένη και έχει ένα απειροστό άνω φράγμα και είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση</u> $-V'$, <u>όπου</u> V' <u>είναι η παράγωγος της</u> V <u>ως προς την</u> (E), <u>να είναι θετικά ορισμένη</u>.

<u>Τότε η μηδενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E) <u>είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής</u>.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση V είναι συνεχής και

$$V(x,0) = 0 \text{ για όλα τα } x \geqq x_0$$

και ακόμα υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση W στο σύνολο $C_0=\{y: |y|<c\}$ με

$$W(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0 \text{ για } 0 < |y| < c$$

τέτοια ώστε

$$V(x,y) \geqq W(y) \text{ για κάθε } (x,y) \in C.$$

Επίσης, ισχύει

$$\lim_{y\to 0} v(y) = 0, \text{ όπου } v(y) = \sup_{x\geqq x_0} |V(x,y)| \text{ για } |y| < c.$$

Επιπλέον, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}$ και $\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ είναι συνεχείς και για τη συνάρτηση V' με

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i$$

ισχύει

$$V'(x,0) = 0 \text{ για κάθε } x \geqq x_0$$

και

$$-V'(x,y) \geqq W^*(y) \text{ για όλα τα } (x,y) \in C,$$

όπου W^* είναι μια συνεχής συνάρτηση στο σύνολο $C_0 = \{y : |y| < c\}$ με

$$W^*(0) = 0 \text{ και } W^*(y) > 0 \text{ για } 0 < |y| < c.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4, αφού

$$V'(x,y) \leqq -W^*(y) \leqq 0 \text{ για όλα τα } (x,y) \in C,$$

και επομένως η μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (Ε) είναι ομοιόμορφα ευσταθής.

Επειδή $\lim_{y \to 0} v(y) = 0$, υπάρχει αριθμός c_0 με $0 < c_0 < c$, τέτοιος ώστε $v(y) < 1$ για όλα τα y με $|y| \leqq c_0$. Τότε θα είναι και

$$V(x,y) < 1 \text{ για κάθε } x,y \text{ με } x \geqq x_0 \text{ και } |y| \leqq c_0.$$

Το γεγονός ότι η μηδενική λύση της (Ε) είναι ομοιόμορφα ευσταθής εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $\delta_0 > 0$, τέτοιου ώστε κάθε λύση y της (Ε) με $|y(\tilde{x}_1)| < \delta_0$ για κάποιο $\tilde{x}_1 \geqq x_0$ να ορίζεται σ'ολόκληρο το διάστημα $[\tilde{x}_1, \infty)$ και να πληροί την

$$|y(x)| < c_0 \text{ για όλα τα } x \geqq \tilde{x}_1.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα τυχόντα αριθμό ε με $0 < \varepsilon < c_0$. Επειδή πάλι η μηδενική λύση της (Ε) είναι ομοιόμορφα ευσταθής, θα υπάρχει δ με $0 < \delta < c_0$ (το δ εξαρτάται από το ε), έτσι ώστε κάθε λύση y της (Ε) με $|y(\tilde{x}_1)| < \delta$ για κάποιο $\tilde{x}_1 \geqq x_0$ να ορίζεται στο $[\tilde{x}_1, \infty)$ και να είναι τέτοια ώστε

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x \geqq \tilde{x}_1.$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις W και W^* είναι συνεχείς στο συμπαγές σύνολο $\{y : \delta \leqq |y| \leqq c_0\}$ και άρα παίρνουν σ'αυτό θετικές ελάχιστες τιμές. Ας είναι λοιπόν

$$\eta = \min_{\delta \leqq |y| \leqq c_0} W(y) > 0 \text{ και } \gamma = \min_{\delta \leqq y \leqq c_0} W^*(y) > 0.$$

Είναι

$$W(y) \leq V(x_0,y) < 1 \text{ για } \delta \leq |y| \leq c_0$$

και επομένως $\eta < 1$. Έτσι, ο αριθμός

$$\vartheta = \frac{1-\eta}{\gamma}$$

είναι θετικός.

Θεωρούμε τώρα τυχούσα λύση y της (E) με $|y(x_1)| < \delta_0$ για κάποιο $x_1 \geq x_0$. Τότε η y θα ορίζεται σ'ολόκληρο το διάστημα $[x_1,\infty)$ και θα είναι τέτοια ώστε

$$|y(x)| < c_0 \text{ για όλα τα } x \geq x_1.$$

Θ'αποδείξουμε ότι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x \geq x_1+\vartheta.$$

Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $\tilde{x}_1 \in [x_1,x_1+\vartheta]$ τέτοιο ώστε $|y(\tilde{x}_1)| < \delta$, γιατί τότε, λόγω του ορισμού του δ, θα είναι

$$|y(x)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } x \geq \tilde{x}_1$$

και επομένως $|y(x)| < \varepsilon$ για $x \geq x_1+\vartheta \geq \tilde{x}_1$. Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$|y(x)| \geq \delta \text{ για κάθε } x \in [x_1,x_1+\vartheta].$$

Τότε έχουμε

$$\delta \leq |y(x)| < c_0 \text{ για } x_1 \leq x \leq x_1+\vartheta$$

και επομένως για όλα τα $x \in [x_1,x_1+\vartheta]$ είναι

$$-V'(x,y(x)) \geq W^*(y(x)) \geq \gamma.$$

Έτσι, παίρνουμε

$$V(x_1,y(x_1))-V(x_1+\vartheta,y(x_1+\vartheta)) = -\int_{x_1}^{x_1+\vartheta} V'(t,y(t))dt \geq \gamma[(x_1+\vartheta)-x_1]=\gamma\vartheta$$

και άρα

$$V(x_1,y(x_1))-V(x_1+\vartheta,y(x_1+\vartheta)) \geq 1-\eta,$$

αφού $\vartheta = (1-\eta)/\gamma$. Αλλά είναι

$$V(x_1+\vartheta,y(x_1+\vartheta)) \geq W(y(x_1+\vartheta)) \geq \eta,$$

και έτσι προκύπτει το άτοπο

$$V(x_1,y(x_1)) \geq 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση V στο σύνολο C, η οποία έχει ένα απειροστό άνω φράγμα και της οποίας η παράγωγος V' ως προς την (E) είναι θετικά ορισμένη, και ας υποθέσουμε ότι η V έχει την ιδιότητα: Για κάθε δ με $0<\delta<c$ υπάρχει y_0 με $|y_0|<\delta$ και $V(x_0,y_0)>0$.

Τότε η μηδενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E) είναι ασταθής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση V είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{y\to 0} v(y)=0, \text{ όπου } v(y)=\sup_{x\geq x_0}|V(x,y)| \text{ για } |y|<c.$$

Επίσης, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}$ και $\frac{\partial V}{\partial y_i}$ $(i=1,\ldots,n)$ είναι συνεχείς και για τη συνάρτηση V' με

$$V'=\frac{\partial V}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_i}f_i$$

έχουμε

$$V'(x,0)=0 \text{ για όλα τα } x\geq x_0$$

και

$$V'(x,y)\geq W(y) \text{ για κάθε } (x,y)\in C,$$

όπου W είναι μια συνεχής συνάρτηση στο σύνολο $C_0=\{y:|y|<c\}$ με

$$W(0)=0 \text{ και } W(y)>0 \text{ για } 0<|y|<c.$$

Επειδή $\lim_{y\to 0} v(y)=0$, υπάρχει ένας αριθμός ε με $0<\varepsilon<c$ έτσι ώστε

$$v(y)<1 \text{ για όλα τα } y \text{ με } |y|<\varepsilon,$$

οπότε

$$|V(x,y)|<1 \text{ για τυχόντα } x,y \text{ με } x\geq x_0,\ |y|<\varepsilon.$$

Ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) είναι ευσταθής. Τότε υπάρχει αριθμός δ με $0<\delta<c$ έτσι ώστε κάθε λύση y της (E), τέτοια ώστε $|y(x_0)|<\delta$, να ορίζεται σ'ολόκληρο το διάστημα $[x_0,\infty)$ και να πληροί την

(*) $$|y(x)|<\varepsilon \text{ για όλα τα } x\geq x_0.$$

Λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης V, υπάρχει y_0 με $0<|y_0|<\delta$ τέτοιο ώστε

$$V(x_0,y_0)>0.$$

Θεωρούμε, στη συνέχεια, τη λύση y της (E) που πληροί την αρχική συνθήκη $y(x_0)=y_0$. Αυτή η λύση είναι ορισμένη σ'ολόκληρο το διάστημα $[x_0,\infty)$ και πληροί την (*). Ακόμα, λόγω του μονοσημάντου, είναι $y(x) \neq 0$ για όλα τα $x \geq x_0$. Θέτουμε τώρα

$$\varphi(x) = V(x,y(x)), \quad x \geq x_0$$

και παίρνουμε

$$\varphi'(x) = V'(x,y(x)) \geq W(y(x)) > 0 \text{ για κάθε } x \geq x_0,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση φ είναι γνήσια αύξουσα στο $[x_0,\infty)$. 'Αρα, για οποιοδήποτε $x \geq x_0$ είναι

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = V(x_0,y(x_0)) = V(x_0,y_0) > 0.$$

'Ετσι, υπάρχουν ένας αριθμός h με $0 < h < \varepsilon$ και ένα σημείο $\tilde{x} \geq x_0$ τέτοια ώστε

$$|y(x)| \geq h \text{ για όλα τα } x \geq \tilde{x},$$

γιατί διαφορετικά θα υπήρχε μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ σημείων του διαστήματος $[x_0,\infty)$ με $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \infty$ και τέτοια ώστε $\lim\limits_{\nu\to\infty} y(x_\nu)=0$, οπότε θα καταλήγαμε στο άτοπο $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi(x_\nu) = 0$, αφού

$$\varphi(x_\nu) = V(x_\nu,y(x_\nu)) \leq v(y(x_\nu)) \quad (\nu = 1,2,\ldots)$$

και $\lim\limits_{\nu\to\infty} v(y(x_\nu)) = 0$. Αν τώρα συμβολίσουμε με μ την ελάχιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης W στο συμπαγές σύνολο $\{y : h \leq |y| \leq \varepsilon\}$, δηλαδή αν θέσουμε

$$\mu = \min_{h\leq|y|\leq\varepsilon} W(y) > 0,$$

τότε θα έχουμε

$$\varphi'(x) \geq W(y(x)) \geq \mu \text{ για κάθε } x \geq \tilde{x},$$

οπότε

$$\varphi(x) \geq \varphi(\tilde{x})+\mu\cdot(x-\tilde{x}), \quad x \geq \tilde{x}.$$

'Ετσι, αφού $\mu > 0$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Αυτό όμως είναι ένα άτοπο, γιατί, λόγω της επιλογής του ε, είναι

$$\varphi(x) = V(x,y(x)) < 1 \text{ για όλα τα } x \geq x_0.$$

Θα δοθεί, τώρα, ένα συμπέρασμα που αφορά την ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (Ε). Σ'αυτό υποτίθεται ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη σ'ένα σύνολο της μορφής $\{(x,y) : x \geq x_0 \text{ και } |y| \leq H\}$, $0 < H < c$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 7</u>. <u>Ας είναι</u> H <u>ένας θετικός αριθμός με</u> $H < c$ <u>τέτοιος ώστε η συνάρτηση</u> f <u>να είναι φραγμένη στο σύνολο</u> $\{(x,y) : x \geq x_0$ <u>και</u> $|y| \leq H\}$. <u>Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση</u> V <u>στο σύνολο</u> C, <u>η οποία είναι θετικά ορισμένη και τέτοια ώστε η συνάρτηση</u> $-V'$, <u>όπου</u> V' <u>είναι η παράγωγος της</u> V <u>ως προς την</u> (E), <u>να είναι θετικά ορισμένη</u>.

<u>Τότε η μηδενική λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης</u> (E) <u>είναι ασυμπτωτικά ευσταθής</u>.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι συναρτήσεις V και V' είναι συνεχείς και

$$V(x,0) = -V'(x,0) = 0 \text{ για κάθε } x \geq x_0$$

και ακόμα

$$V(x,y) \geq W(y) \text{ και } -V'(x,y) \geq W^*(y) \text{ για όλα τα } (x,y) \in C,$$

όπου W και W* είναι συνεχείς συναρτήσεις στο σύνολο $C_0=\{y: |y|<c\}$ τέτοιες ώστε

$$W(0) = W^*(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0,\ W^*(y) > 0 \text{ για } 0 < |y| < c.$$

Παρατηρούμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3 και επομένως η μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (E) είναι ευσταθής. Άρα, υπάρχει δ με $0 < \delta < H$, έτσι ώστε κάθε λύση y της (E) με $|y(x_0)| < \delta$ να ορίζεται σ'ολόκληρο το διάστημα $[x_0,\infty)$ και να είναι τέτοια ώστε

$$|y(x)| < H \text{ για όλα τα } x \geq x_0.$$

Ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση της (E) δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. Τότε εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν μια λύση y της (E) με $|y(x_0)|<\delta$, ένας αριθμός ε με $0 < \varepsilon < H$ και μια ακολουθία $(x_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ σημείων του διαστήματος $[x_0,\infty)$ με $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \infty$, έτσι ώστε

$$|y(x_\nu)| \geq \varepsilon \quad (\nu = 1,2,\ldots).$$

Αν θεωρήσουμε έναν θετικό αριθμό K τέτοιον ώστε

$$|f(x,y)| \leq K \text{ για } x \geq x_0 \text{ και } |y| \leq H,$$

τότε θα είναι

$$|f(x,y(x))| \leq K \text{ για όλα τα } x \geq x_0.$$

Έτσι, αν ν_0 είναι ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $x_\nu-\varepsilon/2K \geq x_0$ για κάθε $\nu \geq \nu_0$, τότε για τυχόντα ακέραιο $\nu \geq \nu_0$ και για κάθε $x \in [x_\nu-\varepsilon/2K, x_\nu+\varepsilon/2K]$ παίρνουμε

$$-|y(x)|+|y(x_\nu)|\leq|y(x)-y(x_\nu)|=\left|\int_{x_\nu}^{x} f(t,y(t))\,dt\right|\leq\left|\int_{x_\nu}^{x}|f(t,y(t))|\,dt\right|$$

$$\leq K|x-x_\nu|\leq K\,\frac{\varepsilon}{2K}=\frac{\varepsilon}{2}$$

και άρα

$$|y(x)|\geq|y(x_\nu)|-\varepsilon/2\geq\varepsilon-\varepsilon/2=\varepsilon/2.$$

Επομένως, για κάθε ακέραιο $\nu\geq\nu_0$ ισχύει

$$\varepsilon/2\leq|y(x)|<H \text{ για όλα τα } x\in[x_\nu-\varepsilon/2K,x_\nu+\varepsilon/2K].$$

Στη συνέχεια, επειδή η συνάρτηση W^* είναι συνεχής και το σύνολο $\{y:\varepsilon/2\leq|y|\leq H\}$ είναι συμπαγές, μπορούμε να θέσουμε

$$\gamma=\min_{\varepsilon/2\leq|y|\leq H} W^*(y)>0$$

και να έχουμε

$$-V'(x,y(x))\geq W^*(y(x))\geq\gamma \text{ για } x\in[x_\nu-\varepsilon/2K,x_\nu+\varepsilon/2K]$$

για όλα τα $\nu\geq\nu_0$. Εξάλλου είναι

$$V'(x,y(x))\leq 0 \text{ για κάθε } x\geq x_0.$$

Υποθέτουμε τώρα (παίρνοντας, στην ανάγκη, μια υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$) ότι τα διαστήματα $[x_\nu-\varepsilon/2K,x_\nu+\varepsilon/2K]$ $(\nu=\nu_0,\nu_0+1,\ldots)$ είναι ξένα ανά δύο και ότι $x_\nu<x_{\nu+1}$ για $\nu\geq\nu_0$. Έτσι, για οποιονδήποτε ακέραιο $\nu\geq\nu_0$ έχουμε

$$V(x_\nu+\varepsilon/2K,y(x_\nu+\varepsilon/2K))-V(x_0,y(x_0))=\int_{x_0}^{x_\nu+\varepsilon/2K} V'(t,y(t))\,dt$$

$$\leq\int_{x_{\nu_0}-\varepsilon/2K}^{x_\nu+\varepsilon/2K} V'(t,y(t))\,dt$$

$$\leq\sum_{k=\nu_0}^{\nu}\int_{x_k-\varepsilon/2K}^{x_k+\varepsilon/2K} V'(t,y(t))\,dt$$

$$\leq\sum_{k=\nu_0}^{\nu}\int_{x_k-\varepsilon/2K}^{x_k+\varepsilon/2K}(-\gamma)\,dt$$

$$=\sum_{k=\nu_0}^{\nu}(-\gamma)\,\frac{\varepsilon}{K}=-\frac{\gamma\varepsilon}{K}\,(\nu-\nu_0+1)$$

και επομένως

$$\lim_{\nu\to\infty} V(x_\nu+\varepsilon/2K, y(x_\nu+\varepsilon/2K)) = -\infty,$$

το οποίο αντίκειται στο γεγονός ότι η συνάρτηση V είναι μη αρνητική στο C.

Ας θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση της <u>αυτόνομης</u> μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(E_0) \qquad y' = F(y),$$

όπου F είναι μια <u>συνεχής</u> n-διάστατη διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο (υποσύνολο του χώρου των n-διάστατων διανυσμάτων)

$$C_0 = \{y : |y| < c\} \qquad (0 < c \leq \infty).$$

Υποθέτουμε ότι

$$F(0) = 0,$$

δηλαδή ότι η μηδενική n-διάστατη συνάρτηση στην πραγματική ευθεία είναι μια λύση της (E_0) (<u>μηδενική λύση της</u> (E_0)). Επίσης, θα υποτίθεται ότι: <u>Για κάθε</u> $y_0 \in C_0$, <u>η συνάρτηση</u> F <u>πληροί τη συνθήκη του Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής</u> $\{y : |y-y_0| \leq b\}$ <u>με</u> $0 < b < c-|y_0|$. Αυτό συμβαίνει για τη συνάρτηση F, όταν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F}{\partial y_k}$ $(k=1,\ldots,n)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο C_0.

Για τη διαφορική εξίσωση (E_0) μπορούμε να δώσουμε τις έννοιες της ευστάθειας για τη μηδενική της λύση, παίρνοντας ένα σταθερό σημείο x_0 της πραγματικής ευθείας, για παράδειγμα $x_0 = 0$. Ακόμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα Θεωρήματα 3,4,5,6 και 7.

Είναι εύκολο ν'αποδείξουμε ότι: <u>Αν y είναι μια λύση σ'ένα διάστημα</u> I <u>της αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης</u> (E_0) <u>και</u> γ <u>είναι μια πραγματική σταθερά, τότε η συνάρτηση</u> y^* <u>με</u>

$$y^*(x) = y(x+\gamma), \quad x \in I_\gamma = \{t : t+\gamma \in I\}$$

<u>είναι μια λύση στο διάστημα</u> I_γ <u>της διαφορικής εξίσωσης</u> (E_0). Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι, αν η μηδενική λύση της (E_0) είναι ευσταθής, τότε αυτή είναι και ομοιόμορφα ευσταθής και ότι η ασυμπτωτική ευστάθεια της μηδενικής λύσης της (E_0) συνεπάγεται την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια αυτής. Άρα:

<u>Για τη μηδενική λύση της αυτόνομης μη γραμμικής διαφορικής</u>

εξίσωσης (E_0) η έννοια της ευστάθειας είναι ισοδύναμη με την έννοια της ομοιόμορφης ευστάθειας και η έννοια της ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι ισοδύναμη με αυτή της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Ας θεωρήσουμε μια συνεχή πραγματική συνάρτηση W ορισμένη στο σύνολο C_0. Σύμφωνα με τους ορισμούς που δώσαμε στην αρχή της παραγράφου αυτής, η W είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν

$$W(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0 \text{ για κάθε } y \text{ με } 0 < |y| < c.$$

Επίσης, η W έχει ένα απειροστό άνω φράγμα στην περίπτωση όπου

$$\lim_{y\to 0} |W(y)| = 0.$$

Ακόμα, με την προϋπόθεση ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial W}{\partial y_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$, όπου y_i $(i = 1,\ldots,n)$ είναι οι συντεταγμένες της μεταβλητής y, ορίζονται και είναι συνεχείς στο σύνολο C_0, η παράγωγος W' της W ως προς τη διαφορική εξίσωση (E_0) ορίζεται με τον τύπο

$$W' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_i} F_i,$$

όπου F_i $(i = 1,\ldots,n)$ είναι οι συνιστώσες της F.

Τώρα, για την αυτόνομη μη γραμμική διαφορική εξίσωση (E_0) τα Θεωρήματα 3,6 και 7 παίρνουν αντίστοιχα τις παρακάτω μορφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3'. Αν υπάρχει μια συνάρτηση W στο σύνολο C_0, η οποία είναι θετικά ορισμένη και της οποίας η παράγωγος W' ως προς την (E_0) είναι μη θετική, τότε η μηδενική λύση της αυτόνομης μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) είναι ευσταθής (και ομοιόμορφα ευσταθής).

ΘΕΩΡΗΜΑ 6'. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση W στο σύνολο C_0, η οποία έχει ένα απειροστό άνω φράγμα και της οποίας η παράγωγος W' ως προς την (E_0) είναι θετικά ορισμένη, και ας υποθέσουμε ότι για κάθε δ με $0 < \delta < c$ υπάρχει y_0 με $|y_0| < \delta$ και τέτοιο ώστε $W(y_0) > 0$. Τότε η μηδενική λύση της αυτόνομης μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) είναι ασταθής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7'. Αν υπάρχει μια συνάρτηση W στο σύνολο C_0, η οποία είναι θετικά ορισμένη και τέτοια ώστε η συνάρτηση -W', όπου W' είναι η παράγωγος της W ως προς την (E_0), να είναι θετικά ορισμένη, τότε η μηδενική λύση της αυτόνομης μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (και ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής).

Ας σημειώσουμε ότι, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 5 στην ειδική περίπτωση της αυτόνομης μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (E_0), τότε προκύπτει το συμπέρασμα του θεωρήματος 7' με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι η W έχει ένα απειροστό άνω φράγμα.

2.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Με τη βοήθεια της συνάρτησης $W(y_1,y_2)=y_1^2+2y_2^2$, ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -2y_1y_2, \quad y_2' = y_1^2-y_2^3$$

είναι ευσταθής (και ομοιόμορφα ευσταθής).

Λύση. Το διαφορικό σύστημα είναι της μορφής (E_0) με

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad F(y) = \begin{pmatrix} -2y_1y_2 \\ y_1^2-y_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{για } |y| < 1.$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$W(y) = y_1^2+2y_2^2, \quad y \in C_0 = \{y : |y| < 1\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι θετικά ορισμένη, αφού

$$W(0) = 0 \text{ και } W(y) > 0 \text{ για } 0 < |y| < 1.$$

Ακόμα, για την παράγωγο W' της W ως προς το σύστημα έχουμε

$$W'(y) = 2y_1(-2y_1y_2)+4y_2(y_1^2-y_2^3) = -4y_2^4 \leq 0 \text{ για κάθε } y \in C_0.$$

'Αρα, σύμφωνα με το θεώρημα 3' η μηδενική λύση του διαφορικού μας συστήματος είναι ευσταθής (και ομοιόμορφα ευσταθής).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Με χρήση της συνάρτησης $W(y_1,y_2) = y_1^2-2y_1y_2$, να διαπιστωθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -y_2^3, \quad y_2' = -3y_1^3-y_2^3$$

είναι ασταθής.

Λύση. Το διαφορικό μας σύστημα παίρνει τη μορφή (E_0) με

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad F(y) = \begin{pmatrix} -y_2^3 \\ -3y_1^3-y_2^3 \end{pmatrix} \quad \text{για } y \in C_0 = \{y : |y| < 1\}.$$

Η συνεχής συνάρτηση

$$W(y) = y_1^2 - 2y_1y_2, \quad y \in C_0$$

έχει ένα απειροστό άνω φράγμα, αφού $\lim_{y\to 0} W(y) = 0$. Ακόμα, η παράγωγος W' της W ως προς το διαφορικό σύστημα είναι η συνεχής συνάρτηση

$$W'(y) = (2y_1-2y_2)(-y_2^3)-2y_1(-3y_1^3-y_2^3) = 6y_1^4+4y_2^4, \quad y \in C_0,$$

η οποία είναι θετικά ορισμένη, γιατί

$$W'(0) = 0 \text{ και } W'(y) > 0 \text{ για } 0 < |y| < 1.$$

Επίσης, για τυχόν δ με $0 < \delta < 1$, θεωρούμε το διάνυσμα y_0 με συντεταγμένες $\delta/2$ και 0 και έχουμε $0 < |y_0| = \delta/2 < \delta$ και $W(y_0) = \delta^2 > 0$. Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6΄ και άρα η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος είναι ασταθής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Με τη βοήθεια της συνάρτησης $W(y_1,y_2) = \frac{1}{4}(y_1^4+y_2^4)$, ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -y_1+y_1y_2^4\sin^2 y_1, \quad y_2' = -y_1^4y_2-y_2$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (και ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής).

<u>Λύση</u>. Έχουμε ένα διαφορικό σύστημα της μορφής (E_0) με

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad F(y) = \begin{pmatrix} -y_1+y_1y_2^4\sin^2 y_1 \\ -y_1^4y_2-y_2 \end{pmatrix} \quad \text{για } |y| < 1.$$

Η συνεχής συνάρτηση W με

$$W(y) = \frac{1}{4}(y_1^4+y_2^4), \quad |y| < 1$$

είναι θετικά ορισμένη, γιατί $W(0) = 0$ και $W(y) > 0$ για $0 < |y| < 1$. Η παράγωγος W' της W ως προς το διαφορικό σύστημα είναι συνεχής και ορίζεται ως εξής

$$W'(y)=y_1^3(-y_1+y_1y_2^4\sin^2 y_1)+y_2^3(-y_1^4y_2-y_2)=-[(y_1^4+y_2^4)+y_1^4y_2^4(1-\sin^2 y_1)],$$
$$\text{για } |y| < 1.$$

Παρατηρούμε ότι $W'(0) = 0$ και $W'(y) \leq y_1^4+y_2^4 < 0$ για $0 < |y| < 1$, δηλαδή ότι η συνάρτηση $-W'$ είναι θετικά ορισμένη. Έτσι, το Θεώρημα 7΄ εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια (και την ομοιόμορφη ασυμπτωτική ευστάθεια) της μηδενικής λύσης του διαφορικού συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ν'αποδειχθεί ότι η σταθερά λύση $y_1(x)=1$, $y_2(x)=-2$ του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -2(y_1-1)(y_2+2), \quad y_2' = (y_1-1)^2-(y_2+2)^3$$

είναι ευσταθής.

Λύση. Ο μετασχηματισμός

$$y_1-1 = z_1, \quad y_2+2 = z_2$$

μετασχηματίζει το διαφορικό σύστημα στο

$$z_1' = -2z_1z_2, \quad z_2' = z_1^2-z_2^3,$$

του οποίου (Παράδειγμα 1) η μηδενική λύση είναι ευσταθής.

2.3. Ασκήσεις

1. Ν'αποδειχθεί ότι: (i) Η συνάρτηση $V(x,y)=y_1^2+(1+\sin^2 x)y_2^2$, για $x \geq 0$ και $y \in \mathbb{R}^2$ είναι θετικά ορισμένη και έχει ένα απειροστό άνω φράγμα. (ii) Η συνάρτηση $V(x,y)=\sin(xy)$, για $x \geq 0$ και $y \in \mathbb{R}$, δεν έχει ένα απειροστό άνω φράγμα αλλά είναι φραγμένη. (iii) Η συνάρτηση

$$W(y) = \frac{1}{2}\, y_2^2 + \int_0^{y_1} f(z)\,dz, \quad y \in \mathbb{R}^2$$

είναι θετικά ορισμένη, αν f είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $zf(z)>0$ για $z \neq 0$.

2. Με τη βοήθεια της συνάρτησης $W(y)=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)$, να μελετηθεί η ευστάθεια της μηδενικής λύσης καθενός απ'τα διαφορικά συστήματα:

(i) $y_1' = -y_1 - \frac{1}{3}y_1^3 - y_1\cos y_2, \quad y_2' = -y_2 - y_2^3.$

(ii) $y_1' = -y_2 - y_1\sin^2 y_1, \quad y_2' = y_1 - y_2\sin^2 y_1.$

(iii) $y_1' = y_1 - y_2^2, \quad y_2' = y_2 + y_1y_2.$

3. Με τη βοήθεια της συνάρτησης $W(y)=\frac{y_1^2}{2}+y_2^2$, ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = 2y_1y_2 + y_1^3, \quad y_2' = -y_1^2 + y_2^5$$

δεν είναι ευσταθής.

4. Με χρήση μιας συνάρτησης της μορφής $W(y)=\alpha y_1^2+\beta y_2^2$ $(\alpha,\beta>0)$, να μελετηθεί ως προς την ασυμπτωτική ευστάθεια η μηδε-

νική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -y_1 - 2y_2 + y_1^2 y_2^2, \quad 2y_2' = 2y_1 - y_2 - y_1^3 y_2.$$

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη βοήθεια μιας συνάρτησης W της μορφής $W(y_1, y_2) = Ay_1^4 + By_2^4$ με $A > 0$ και $B > 0$, ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -y_1^5 - y_2^3, \quad y_2' = 3y_1^3 - y_2^3$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

2. Με χρήση μιας συνάρτησης της μορφής $W(y_1, y_2) = Ay_1^2 - By_2^2$ με $A > 0$, $B > 0$, ν'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = 2y_1^3 - 2y_1 y_2^2, \quad y_2' = -5y_1^2 y_2 - 4y_2^3$$

είναι ασταθής.

3. Ας θεωρήσουμε το διαφορικό σύστημα

$$y_1' = \alpha y_1 - \alpha y_1^2 - \beta y_1 y_2, \quad y_2' = \gamma y_2 - \gamma y_1 y_2 - \delta y_2^2,$$

όπου α, β, γ και δ είναι πραγματικές σταθερές. Ν'αποδειχθεί ότι, αν $\alpha < 0$ και $\gamma < 0$, τότε η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

4. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς μ, έτσι ώστε η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -2y_1 - \mu y_2 + y_1^2, \quad y_2' = 4y_1 + \mu y_2 - y_2^2$$

να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

5. Για το διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 8y_1 - y_2^2, \quad y_2' = -y_2 + y_1^2$$

να μελετηθεί η ευστάθεια της μηδενικής λύσης καθώς και η ευστάθεια της σταθεράς λύσης $y_1 = 2$, $y_2 = 4$.

6. Να μελετηθεί η ευστάθεια της μηδενικής λύσης του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 - \mu(y_1^2 - 1)y_2$$

για $\mu > 0$ και για $\mu < 0$.

7. N'αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση καθενός των παρακάτω διαφορικών συστημάτων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(i) $y_1' = -3y_1^3 - y_2$, $y_2' = y_1^5 - 2y_2^3$,

(ii) $y_1' = -2y_1 + y_1y_2^3$, $y_2' = -y_1^2y_2^2 - y_2^3$.

8. Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η μηδενική λύση καθενός απ'τα παρακάτω συστήματα:

(i) $y_1' = -y_1 - y_2$, $y_2' = -y_1 - 3y_2 - y_2^3$.

(ii) $y_1' = y_1(y_2^2 - 1)$, $y_2' = y_2(y_1^2 - 1)$.

(iii) $y_1' = -y_1 + y_1y_2$, $y_2' = y_1 - y_2 - y_1^2$.

9. Με τη βοήθεια της συνάρτησης $W(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\, my_2^2 + \frac{1}{2}\, ky_1^2$, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = y_2,\quad y_2' = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{\lambda}{m}\, y_2 \qquad (\lambda \geq 0,\ k > 0,\ m > 0).$$

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$W(y_1, y_2) = Ay_1^2 + By_1y_2 + Cy_2^2, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

N'αποδειχθεί ότι: (i) Η W είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $A > 0$ και $4AC - B^2 > 0$. (ii) Η $-W$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $A < 0$ και $4AC - B^2 > 0$.

11. Με τη βοήθεια μιας συνάρτησης της μορφής $W(y_1, y_2) = Ay_1^2 + By_2^2$ (όπου A, B είναι σταθερές), ν'αποδειχθεί ότι: (i) Η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = -y_1^3 + y_1y_2^2,\quad y_2' = -4y_1^2y_2 - y_2^3$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. (ii) Η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = 2y_1y_2 + y_1^3,\quad y_2' = 2y_1^2 - y_2^3$$

είναι ασταθής.

12. Ας είναι f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο $C_0 = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < c\}$, $0 < c \leq \infty$. Με χρήση μιας συνάρτησης $W(y_1, y_2) = Ay_1^4 + By_2^4$, $y = (y_1, y_2) \in C_0$, όπου A και B είναι σταθερές, να αποδειχθεί ότι η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = y_2^3 - y_1^3 f(y_1, y_2), \quad y_2' = -y_1^3 - y_2^3 f(y_1, y_2)$$

είναι: (i) Ασυμπτωτικά ευσταθής, αν η f είναι θετική στο σύνολο C_0. (ii) Ασταθής, αν η f είναι αρνητική στο C_0.

13. Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη ευστάθεια η μηδενική λύση του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2), \quad y_2' = -y_1 - y_2(y_1^2 + y_2^2)^2$$

14. Να μελετηθεί το είδος της ευστάθειας της μηδενικής λύσης του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = 4y_1 - 9y_2 + (y_1^2 + y_2^2)^2, \quad y_2' = 5y_1 - 10y_2 - (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}.$$

15. Ν'αποδειχθεί ότι η σταθερή λύση $y_1 = 2+5\alpha$, $y_2 = (2+5\alpha)/4$ του διαφορικού συστήματος

$$y_1' = \frac{1}{2} y_1 - y_1 y_2 + \alpha(y_1 + y_2), \quad y_2' = -2y_2 + y_1 y_2 - \alpha(y_1 + y_2)$$

είναι ευσταθής για $-\frac{1}{10} < \alpha < 0$ και ασταθής για $0 < \alpha < \frac{1}{10}$.

VIII. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια εισαγωγή στις μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (Εδάφιο 1) και θα μελετηθούν οι γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης (Εδάφιο 2). Σε καθένα απ'τα Εδάφια 1 και 2 θα δοθούν παραδείγματα και θα προταθούν ασκήσεις για λύση, ενώ το Εδάφιο 3 περιλαμβάνει μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Εδάφιο αυτό θα δοθεί η έννοια της μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης και θα ορισθούν οι γραμμικές, οι ημιγραμμικές και οι σχεδόν γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Θα παρατεθούν, στη συνέχεια, μερικά παραδείγματα και θα δοθούν ασκήσεις για λύση.

1.1. Μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης: Ορισμοί

Θα περιορισθούμε στην περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Ας είναι F μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ'ένα σύνολο της μορφής $\Omega \times S$, όπου Ω είναι ένας <u>τόπος</u> του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$) και S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Η εξίσωση

$$(*) \qquad F(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

λέμε ότι είναι μια μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με άγνωστη συνάρτηση z και ανεξάρτητες μεταβλητές x,y. Μια πραγματική συνάρτηση z ορισμένη στο Ω θα λέμε ότι είναι μια λύση της (*), άν και μόνο αν η z είναι C^1 στον τόπο Ω (δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο Ω) και, για όλα τα $(x,y) \in \Omega$, είναι $(z(x,y), z_x(x,y), z_y(x,y)) \in S$ και $F(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y)) = 0$. Επίλυση της (*) είναι η εύρεση όλων των λύσεων αυτής.

Μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y + C(x,y)z = \Phi(x,y),$$

όπου A,B,C και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και μια τουλάχιστον απ'τις συναρτήσεις A και B δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω. Επίσης, αν P,Q και R είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα σύνολο της μορφής ΩxS, όπου Ω είναι ένας τόπος του $\mathbb{R}^2$ και S είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z)$$

θα λέμε ότι είναι μια ημιγραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, εφόσον μια τουλάχιστον απ'τις συναρτήσεις P και Q δεν μηδενίζεται πουθενά στο ΩxS. Τέλος, μια σχεδόν γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y = R(x,y,z),$$

όπου A,B είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και μια τουλάχιστον απ'αυτές δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω, και R είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση σ'ένα σύνολο ΩxS με S ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι και σχεδόν γραμμική και, ακόμα, μια σχεδόν γραμμική εξίσωση είναι και ημιγραμμική.

1.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Καθεμιά απ'τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, να εξετασθεί αν είναι γραμμική, ημιγραμμική ή σχεδόν γραμμική:

(i) $(x-1)z_x + xe^y z_y + (x+y^2)z = x-y; \; x<1, \; y \in \mathbb{R}$.

(ii) $xe^z z_x + x^2 y z_y = x(x^2-1)-y; \; x>0, \; y \in \mathbb{R}$.

(iii) $(x-1)yz_x+z_y = xe^z-yz$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

(iv) $xy(z_x)^2-z_y = xz+1$; $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Λύση. (i) Είναι γραμμική. (ii) Είναι ημιγραμμική, αλλά όχι σχεδόν γραμμική. (iii) Είναι σχεδόν γραμμική, αλλά όχι γραμμική. (iv) Δεν είναι ημιγραμμική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ν'αποδειχθεί ότι, αν f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $z(x,y) = e^{y/2x}f(xy)$, $x>0$, $y \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης

$$x^2z_x-xyz_y+yz = 0; \quad x>0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η z είναι C^1 στο $\Omega = \{(x,y) : x>0,\ y \in \mathbb{R}\}$. Για κάθε $x>0$, $y \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{cases} z_x(x,y) = e^{y/2x}[(-y/2x^2)f(xy)+yf'(xy)] \\ z_y(x,y) = e^{y/2x}[(1/2x)f(xy)+xf'(xy)] \end{cases}$$

και επομένως

$$x^2z_x(x,y)-xy\,z_y(x,y)+yz(x,y) = e^{y/2x}\{[(-y/2)f(xy)+x^2yf'(xy)]-$$
$$-[(y/2)f(xy)+x^2yf(xy)]+yf(xy)\} = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$z_x+z = xy; \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Παίρνουμε για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$z(x,y) = e^{-\int_0^x dt}\left[f(y)+y\int_0^x s\, e^{\int_0^s ds}\, ds\right] = e^{-x}\left[f(y)+y\int_0^x se^s ds\right]$$

$$= e^{-x}[f(y)+y(xe^x-e^x+1)],$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Έτσι, όλες οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = e^{-x}F(y)+xy-y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού

$$u=x,\ v=2x-y,$$

να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$z_x+2z_y+z=0;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Λύση. Έχουμε

$$z_x=z_uu_x+z_vv_x=z_u+2z_v,\ z_y=z_uu_y+z_vv_y=-z_v$$

και έτσι η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$z_u+z=0;\ (u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

της οποίας όλες οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$z(u,v)=e^{-\int_0^u dt}f(v)=e^{-u}f(v),\ (u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Άρα, οι λύσεις της εξίσωσής μας είναι

$$z(x,y)=e^{-x}f(2x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_x-yx\,z=0;\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$. (ii) $z_x-(x-y)z=x^2y;\ x>0, y\in\mathbb{R}$.

2. Ας είναι $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(x,0):x\geq 0\}$. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$z(x,y)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x>0 \text{ και } y>0\\ 0, & \text{αν } (x,y)\in\Omega-\{(x,y):x>0,y>0\}\end{cases}$$

είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_y=0,\ (x,y)\in\Omega.$$

3. Ν'αποδειχθεί ότι, αν f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε:

(i) Η συνάρτηση $z(x,y)=xy+f(x^2+y^2)$, $x>0$, $y\in\mathbb{R}$ είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$yz_x - xz_y = y^2 - x^2;\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

(ii) Η συνάρτηση $z(x,y) = x+y+f(xy)$, $x>0$, $y>0$ είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$xz_x - yz_y = x-y;\ x>0,\ y>0.$$

4. Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_y = \sin x - \cos y;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$

(ii) $z_y = \sin x - e^y;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}.$

(iii) $(z_x + z)^2 = x^2 + y^2;\ x>0,\ y>0.$

5. Για τη μερική διαφορική εξίσωση

$$xz_x + yz_y + z_x z_y = z,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

να βρεθεί μια λύση z της μορφής

$$z(x,y) = \alpha x + \beta y + \alpha\beta,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ (\alpha,\beta \text{ σταθερές}),$$

τέτοια ώστε

$$\tau^2 = z(\tau,\tau) \text{ και } z_x(\tau,\tau) + z_y(\tau,\tau) = 2\tau \text{ για } \tau \in \mathbb{R}.$$

2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Εδώ θα δοθεί μια μέθοδος για την επίλυση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Θα δοθούν μερικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου αυτής και θα προταθούν ορισμένες ασκήσεις για λύση.

2.1. Επίλυση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

Όπως είναι γνωστό απ'το προηγούμενο Εδάφιο, μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές) έχει τη μορφή

$$(E) \qquad Az_x + Bz_y + Cz = \Phi,$$

όπου A,B,C και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και μια τουλάχιστον απ'τις συναρτήσεις A και B δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω. Οι συναρτήσεις A, B και C λέγονται συντελεστές της (Ε) και ο τόπος Ω ονομάζεται τόπος ορισμού αυτής. Όταν οι συντελεστές της (Ε) είναι πραγματικές σταθερές, τότε θα λέμε ότι αυτή είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Αν η Φ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο Ω, τότε η (Ε) λέγεται μη ομογενής· στην περίπτωση όπου $\Phi = 0$ στο Ω η (Ε) γράφεται

$$(E_0) \qquad Az_x+Bz_y+Cz = 0$$

και καλείται ομογενής. Επίσης, λέμε ότι η (E_0) είναι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της (Ε).

Μια πραγματική συνάρτηση z ορισμένη στον τόπο Ω είναι μια λύση της (Ε), αν και μόνο αν αυτή είναι C^1 στο Ω και, για όλα τα $(x,y) \in \Omega$, ισχύει

$$A(x,y)z_x(x,y)+B(x,y)z_y(x,y)+C(x,y)z(x,y) = \Phi(x,y).$$

Ας θεωρήσουμε τον τελεστή L που ορίζεται ως εξής:

$$L\varphi = A\varphi_x+B\varphi_y+C\varphi$$

για κάθε πραγματική συνάρτηση φ που ορίζεται στον τόπο Ω και είναι C^1 σ'αυτόν. Τότε αμέσως διαπιστώνουμε ότι ο τελεστής αυτός είναι γραμμικός, δηλαδή ισχύει

$$L(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2) = c_1L\varphi_1+c_2L\varphi_2$$

για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές c_1, c_2 και για τυχούσες C^1 συναρτήσεις φ_1, φ_2 στο Ω. Έτσι: Το άθροισμα δύο λύσεων της (E_0) καθώς και το γινόμενο μιας πραγματικής σταθεράς με μια λύση της (E_0) είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης (E_0). Ακόμα, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι, αν z^* είναι μια λύση της (Ε), τότε z είναι μια λύση της (Ε) αν και μόνο αν $z-z^*$ είναι μια λύση της ομογενούς εξίσωσης (E_0). Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης (Ε) είναι ακριβώς τα αθροίσματα μιας (μερικής) λύσης αυτής με τις λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (E_0).

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, την ειδική περίπτωση της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης (με ανεξάρτητες μεταβλητές ξ, η)

$$(\varepsilon) \qquad az_\xi+cz = \varphi,$$

όπου a, c και φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα τόπο

Ω <u>του</u> $\mathbb{R}^2$ <u>και</u> $a(\xi,\eta)\neq 0$ <u>για</u> <u>όλα</u> <u>τα</u> $(\xi,\eta)\in\Omega$. Ας θεωρήσουμε, ακόμα, την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$(\varepsilon_0) \qquad az_\xi + cz = 0 \quad .$$

<u>Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις</u> a,c <u>και</u> φ <u>έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τη δεύτερη μεταβλητή τους στο</u> Ω <u>και θεωρούμε ένα σημείο</u> ξ_0 <u>στην πρώτη προβολή του τόπου</u> Ω.

Έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα:

<u>Όλες οι λύσεις της εξίσωσης</u> (ε_0) <u>δίνονται απ' τον τύπο</u>

$$(*) \qquad z(\xi,\eta) = f(\eta)\exp\left[-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\,dt\right],\quad (\xi,\eta)\in\Omega,$$

<u>όπου</u> f <u>είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο</u> $\mathbb{R}$.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Αν f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση z που ορίζεται με τον τύπο (*) είναι μια λύση της (ε_0), γιατί αυτή είναι C^1 στο Ω και, για όλα τα $(\xi,\eta)\in\Omega$, είναι

$$z_\xi(\xi,\eta) = z(\xi,\eta)\left[-\frac{c(\xi,\eta)}{a(\xi,\eta)}\right],\ \text{δηλαδή}\ a(\xi,\eta)z_\xi(\xi,\eta)+c(\xi,\eta)z(\xi,\eta) = 0.$$

Αντίστροφα· ας είναι z μια λύση της (ε_0) και ας θέσουμε

$$F(\xi,\eta) = z(\xi,\eta)\exp\left[\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\,dt\right],\quad (\xi,\eta)\in\Omega.$$

Η συνάρτηση F είναι C^1 στο Ω. Ακόμα, η F είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής ξ, γιατί για κάθε $(\xi,\eta)\in\Omega$ είναι

$$F_\xi(\xi,\eta) = \left[z_\xi(\xi,\eta) + \frac{c(\xi,\eta)}{a(\xi,\eta)}\,z(\xi,\eta)\right]\exp\left[\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\,dt\right] = 0.$$

Έτσι, $F(\xi,\eta) = F(\xi_0,\eta) = z(\xi_0,\eta)$ για όλα τα $(\xi,\eta)\in\Omega$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\eta) = z(\xi_0,\eta)\ \text{για όλα τα}\ \eta\ \text{στη δεύτερη προβολή του}\ \Omega,$$

τότε θα ισχύει ο τύπος (*).

Επίσης, ισχύει το παρακάτω:

<u>Μια μερική λύση της εξίσωσης</u> (ε) <u>είναι η</u>

$$z^*(\xi,\eta) = \left\{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\varphi(s,\eta)}{a(s,\eta)} \exp\left[\int_{\xi_0}^{s} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\, dt\right] ds\right\} \exp\left[-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\, dt\right],$$

$$(\xi,\eta) \in Q.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ, η συνάρτηση z^* είναι C^1 στον τόπο Q και τέτοια ώστε

$$\frac{\partial z^*}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\varphi(\xi,\eta)}{a(\xi,\eta)} + z^*(\xi,\eta)\left[-\frac{c(\xi,\eta)}{a(\xi,\eta)}\right] \text{ για } (\xi,\eta) \in Q.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω δύο συμπεράσματα, καταλήγουμε στο ακόλουθο:

<u>Όλες οι λύσεις της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης</u> (ε) <u>δίνονται απ'τον τύπο</u>

$$z(x,y) = \left\{f(\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\varphi(s,\eta)}{a(s,\eta)} \exp\left[\int_{\xi_0}^{s} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\, dt\right] ds\right\} \exp\left[-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(t,\eta)}{a(t,\eta)}\, dt\right],$$

$$(\xi,\eta) \in Q.$$

Ας επανέλθουμε, τώρα, στη γενική περίπτωση της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης (Ε) και ας υποθέσουμε ότι

$$A(x,y) \neq 0 \text{ \underline{για όλα τα} } (x,y) \in \Omega.$$

Ας θεωρήσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}$$

και ας υποθέσουμε ότι οι λύσεις της δίνονται απ'τον τύπο

$$\omega(x,y) = d,$$

όπου d είναι μια αυθαίρετη σταθερά και ω <u>είναι μια</u> C^1 <u>πραγματική συνάρτηση στον τόπο</u> Ω <u>με</u> $\omega_y(x,y) \neq 0$ <u>για κάθε</u> $(x,y) \in \Omega$. Τότε ο μετασχηματισμός

$$(\mu) \qquad \xi = x \text{ και } \eta = \omega(x,y)$$

έχει Ιακωβιανή $\partial(\xi,\eta)/\partial(x,y) = \omega_y$ που δεν μηδενίζεται πουθενά στον τόπο Ω, και επομένως αυτός είναι αντιστρέψιμος. Ας θεωρήσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του (μ):

$$(\mu^{-1}) \qquad x = u_1(\xi,\eta) \text{ και } y = u_2(\xi,\eta),$$

όπου u_1 και u_2 είναι C^1 πραγματικές συναρτήσεις στον τόπο Q, και Q είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό (μ). Στη συνέχεια, ας θέσουμε

$a(\xi,\eta)=A(u_1(\xi,\eta),\ u_2(\xi,\eta)),\ c(\xi,\eta)=C(u_1(\xi,\eta),\ u_2(\xi,\eta))$ και

$$\varphi(\xi,\eta)=\Phi(u_1(\xi,\eta),\ u_2(\xi,\eta))$$

για $(\xi,\eta)\in Q$. Παρατηρούμε, τώρα, ότι $\omega_x dx+\omega_y dy=0$, δηλαδή είναι $dy/dx=-\omega_x/\omega_y$. Επομένως, έχουμε $-\omega_x/\omega_y=B/A$ και άρα

$$A\omega_x+B\omega_y=0.$$

Εξάλλου, είναι

$$z_x=z_\xi+z_\eta\omega_x \text{ και } z_y=z_\eta\omega_y$$

για τις λύσεις z της (E). Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

<u>Ο μετασχηματισμός</u> (μ) <u>μετασχηματίζει την γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης</u> (E) <u>στην εξίσωση</u>

(ε) $$az_\xi+cz=\varphi,$$

<u>όπου οι συναρτήσεις</u> a,c <u>και</u> φ <u>είναι συνεχείς στον τόπο</u> Q <u>και</u> $a(\xi,\eta)\neq 0$ <u>για</u> $(\xi,\eta)\in Q$.

Στα παραπάνω, υποθέσαμε ότι $A(x,y)\neq 0$ για όλα τα $(x,y)\in\Omega$. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε θα είναι $B(x,y)\neq 0$ για κάθε $(x,y)\in\Omega$, αφού μια τουλάχιστον απ'τις συναρτήσεις A και B υποτίθεται ότι δεν μηδενίζεται πουθενά στον τόπο Ω. Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dy}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$$

και υποθέτουμε ότι οι λύσεις αυτής δίνονται απ'τον τύπο

$$\omega(x,y)=d \quad (d \text{ αυθαίρετη σταθερά}),$$

όπου ω είναι μια C^1 πραγματική συνάρτηση στον τόπο Ω με $\omega_x(x,y)\neq 0$ για όλα τα $(x,y)\in\Omega$. Τότε ο μετασχηματισμός

$$\xi=\omega(x,y) \text{ και } \eta=y$$

μετασχηματίζει την (E) σε μια εξίσωση της μορφής

(ε') $$bz_\eta+cz=\varphi,$$

όπου b,c και φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στην εικόνα Q του τόπου Ω με τον μετασχηματισμό και $b(\xi,\eta)\neq 0$ για $(\xi,\eta)\in Q$. Αν η_0 είναι ένα σημείο στην δεύτερη προβολή του Q και οι συναρτήσεις b,c και φ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς την πρώτη μεταβλητή τους στο Q, τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (ε') δίνονται απ'τον τύπο

$$z(\xi,\eta) = \left\{ f(\xi)+\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\varphi(\xi,s)}{b(\xi,s)} \exp\left[\int_{\eta_0}^{s} \frac{c(\xi,t)}{b(\xi,t)}\, dt\right] ds \right\} \exp\left[-\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{c(\xi,t)}{b(\xi,t)}\, dt\right],$$
$$(\xi,\eta) \in \Omega,$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

2.2. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$x^3 z_x - 2y\, z = 2y^2; \quad x>0, \ y \in \mathbb{R}.$$

Λύση. 'Ολες οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y)=\left[f(y)+\int_1^x \frac{2y^2}{s^3} \exp\left(\int_1^s \frac{-2y}{t^3}\, dt\right) ds\right] \exp\left(-\int_1^x \frac{-2y}{t^3}\, dt\right), \quad x>0, y\in\mathbb{R},$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Μετά απ'τους υπολογισμούς, βρίσκουμε

$$z(x,y) = \left[f(y) - ye^{-y} e^{y/x^2} + y\right] e^{y} e^{-y/x^2}$$
$$= [f(y)+y]e^{y} e^{-y/x^2} - y, \ \text{για } x>0, \ y\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε $F(y) = [f(y)+y]e^{y}$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, οπότε οι λύσεις δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = F(y)e^{-y/x^2} - y, \quad x>0, \ y\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$kz_x + \lambda z_y + \mu z = 0; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου k,λ και μ είναι πραγματικές σταθερές με $k\neq 0$.

Λύση. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{k}$$

δίνονται απ'τον τύπο

$$\lambda x - ky = d,$$

όπου d είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$\xi = x \ \text{ και } \ \eta = \lambda x - ky,$$

οπότε η εξίσωσή μας μετασχηματίζεται στην

$$kz_\xi+\mu z = 0; \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2.$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$z(\xi,\eta) = f(\eta)\exp\left(-\int_0^\xi \frac{\mu}{k}\,dt\right) = e^{-(\mu/k)\xi}f(\eta), \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Άρα, όλες οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = e^{-(\mu/k)x}f(\lambda x-ky), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$y\,z_x - x\,z_y + y^3xz = 0; \quad x\in\mathbb{R},\ y>0.$$

Λύση. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

δίνονται απ'τον τύπο

$$x^2+y^2 = d \quad (d \text{ αυθαίρετη σταθερά}).$$

Θεωρούμε, λοιπόν, τον μετασχηματισμό

$$\xi = x \text{ και } \eta = x^2+y^2,$$

με τον οποίο η εξίσωσή μας γίνεται

$$z_\xi + \xi(\eta-\xi^2)z = 0, \quad \xi\in\mathbb{R},\ \eta>0.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι

$$z(\xi,\eta) = f(\eta)\exp\left[-\int_0^\xi t(\eta-t^2)\,dt\right] = f(\eta)\exp[(\xi^4-2\xi^2\eta)/4], \quad \xi\in\mathbb{R},\ \eta>0,$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Επομένως, οι λύσεις της αρχικής εξίσωσής μας δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = f(x^2+y^2)\exp[-x^2(x^2+2y^2)/4], \quad x\in\mathbb{R},\ y>0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$xy\,z_x - y^2z_y - xz = 0; \quad x\in\mathbb{R},\ y>0.$$

Λύση. Ο τύπος

$$xy = d \quad (d \text{ αυθαίρετη σταθερά})$$

δίνει τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

Με τον μετασχηματισμό $\frac{dx}{dy} = -\frac{xy}{y^2}$.

$$\xi = xy \text{ και } \eta = y$$

η εξίσωσή μας γίνεται

$$\eta^3 z_\eta + \xi z = 0; \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0.$$

Όλες οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$z(\xi,\eta) = f(\xi)\exp\left[-\int_1^\eta \frac{\xi}{t^3}\,dt\right] = f(\xi)\exp\left(\frac{\xi}{2\eta^2} - \frac{\xi}{2}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0,$$

όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αν θέσουμε $F(\xi) = f(\xi)\exp(-\xi/2)$ για $\xi \in \mathbb{R}$, τότε ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$z(\xi,\eta) = F(\xi)\exp(\xi/2\eta^2), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \eta > 0.$$

Έτσι, όλες οι λύσεις της αρχικής μας εξίσωσης δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = e^{x/2y}F(xy), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_x - 2z_y + z = ye^{-x}; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Λύση. Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $dy/dx = -2$ δίνονται απ'τον τύπο $2x+y = d$, όπου d είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Θεωρούμε, έτσι, τον μετασχηματισμό $\xi = x$ και $\eta = 2x+y$, ο οποίος μετασχηματίζει την εξίσωση στην

$$z_\xi + z = (\eta - 2\xi)e^{-\xi}; \quad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2.$$

Οι λύσεις αυτής είναι

$$z(\xi,\eta) = \left[f(\eta) + \int_0^\xi (\eta - 2s)e^{-s}\exp\left(\int_0^s dt\right)ds\right]\exp\left(-\int_0^\xi dt\right)$$

$$= \left[f(\eta) + \int_0^\xi (\eta - 2s)\,ds\right]e^{-\xi} = e^{-\xi}f(\eta) + \xi(\eta - \xi)e^{-\xi}$$

για $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, όπου f είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Άρα, οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = e^{-x}f(2x+y) + x(x+y)e^{-x}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$xy\, z_x - y^2 z_y - xz = 0; \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

η οποία πληροί τη συνθήκη

$$z(x,1) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται (Παράδειγμα 4) απ' τον τύπο

$$z(x,y) = e^{x/2y} F(xy), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0,$$

όπου F είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Για τη ζητούμενη λύση θα έχουμε

$$z(x,1) = e^{x/2} F(x) = x^2 \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, η συνάρτηση F θα είναι

$$F(u) = u^2 e^{-u/2}, \quad u \in \mathbb{R}$$

και επομένως η ζητούμενη λύση είναι

$$z(x,y) = x^2 y^2 \exp\left(\frac{x}{2y} - \frac{xy}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

2.3. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:
   - (i) $z_x + 2xyz = xy^2; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
   - (ii) $yz_y - 2y^2 z = xe^{y^2}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$

2. Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:
   - (i) $x\, z_x + y\, z_y = 0; \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$
   - (i) $x\, z_x + y^2 z_y = 0; \quad x > 0, \quad y > 0.$
   - (iii) $z_x + (x+y) z_y - xz = 0; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$
   - (iv) $xy\, z_x - 2x^2 z_y + yz = 0; \quad 1 < x^2 + y^2 < 4.$
   - (v) $(x+1) z_x + (y+2) z_y - z = 0; \quad x < -1, \quad y \in \mathbb{R}.$
   - (vi) $(x+y) z_x - z_y + (x^2 - y^2) z = 0; \quad x > -y, \quad y \in \mathbb{R}.$

3. Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:
   - (i) $x\, z_x + y\, z_y - z = x; \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$
   - (ii) $z_x - 3z_y = \sin x + \cos y; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

(iii) $z_x - \alpha z_y = e^x \cos 2x$ (α σταθερά); $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) $x z_x - 7y z_y + z = x^2 y$; $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

(v) $z_x - 4z_y - z = x+y+1$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(vi) $x z_x + y z_y = xy \sin(xy)$; $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

(vii) $2z_x - 3z_y = 4x - 9y^2$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

4. (i) Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_x - z_y + z = 1$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η οποία πληροί τη συνθήκη $z(x,0) = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_x - z_y + z = e^{x+2y}$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η οποία πληροί τη συνθήκη $z(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$y z_x + x z_y = 1;\ 0 < y < x.$$

Να βρεθεί, στη συνέχεια, η λύση z με $z(x, x/2) = x$ για $x > 0$.

2. Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$2y z_x + x z_y = 0;\ x > 0,\ y \in \mathbb{R},$$

η οποία πληροί τη συνθήκη $z(1,y) = y$ για $y \in \mathbb{R}$.

3. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$k z_x + \lambda z_y + \mu z = 0;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου k, λ και μ είναι πραγματικές σταθερές και $\lambda \neq 0$. Να βρεθεί, στη συνέχεια, η λύση z αυτής που πληροί τη συνθήκη $z(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου g είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

4. Να βρεθεί η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$x z_x + (x+y) z_y = 1;\ x > 0,\ 0 < y < 1,$$

η οποία πληροί τη συνθήκη $z(1,y) = y$ για $0 < y < 1$.

5. Ας είναι

$$z(x,y) = \int_0^\infty \frac{t \exp[-y(1+t^2)^{1/2}] \sin xt}{(1+t^2)^{1/2}}\, dt,\ x > 0,\ y > 0.$$

Ν'αποδειχθεί ότι

$$z(x,y) = \frac{x}{y}\int_0^{\infty} \exp[-y(1+t^2)^{1/2}]\cos xt\,dt, \quad x>0, \ y>0.$$

Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση z είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$-xy\,z_x + x^2 z_y + yz = 0; \quad x>0, \ y>0.$$

6. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $\xi = \log x$, $\eta = \log y$, να επιλυθούν οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις με τόπο ορισμού $\Omega = \{(x,y) : x>0, y>0\}$:

(i) $2x\,z_x - y\,z_y = 0.$ (iii) $2x\,z_x - z_y + 4z = x^2\cos x.$

(ii) $2x\,z_x + 3y\,z_y = \log x.$ (iv) $x\,z_x + y\,z_y + z = x^2 + y^2.$

7. Ας είναι

$$z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση z είναι ασυνεχής στο σημείο (0,0), αλλά είναι τέτοια ώστε

$$x\,z_x(x,y) + y\,z_y(x,y) = 0 \text{ για όλα τα } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

8. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση P ορίζεται με τον τύπο

$$P(s,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} s^m t^n, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου οι συντελεστές $a_{m,n}$ $(m,n = 0,1,\ldots)$ πληρούν τον αναγωγικό τύπο

$$3(m+1)a_{m+1,n} - (n+1)a_{m,n+1} + a_{m,n} = 0 \quad (m,n = 0,1,\ldots).$$

Δίνεται, ακόμα, ότι $P(t,t) = e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με λύση τη συνάρτηση P. Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι

$$P(s,t) = e^{(s+7t)/4}, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

9. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$(x^2+y^2)z_y + 2xy\,z_x = -4y; \quad x>0, \ y \in \mathbb{R}.$$

10. Να βρεθούν οι λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$y\, z_x + z_y = 2; \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

οι οποίες πληρούν την συνθήκη

$$z(y^2/2, y) = 2y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

11. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$z(x,y) = -\frac{(x+y)^3}{6\alpha} + \frac{\alpha}{2}(x-y) + \beta, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου $\alpha \neq 0$ και β είναι αυθαίρετες σταθερές, είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$(z_x)^2 - (z_y)^2 + (x+y)^2 = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

IX. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό δίνονται μερικά στοιχεία για τις γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Γίνεται ο περιορισμός σε γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και με σταθερούς συντελεστές. Στο Εδάφιο 0 αναπτύσσονται μερικά στοιχεία απ'τη θεωρία των σειρών Fourier, η οποία είναι πολύ χρήσιμη στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Μια ταξινόμηση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης σε υπερβολικές, παραβολικές ή ελλειπτικές εξισώσεις γίνεται στο Εδάφιο 1. Στο ίδιο Εδάφιο γίνεται και η αναγωγή μιας γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης στην κανονική μορφή της υπερβολικής ή της παραβολικής ή της ελλειπτικής εξίσωσης και, ακόμα παραπέρα, σε μια πιο απλή μορφή. Το Εδάφιο 2 αναφέρεται στη (μονοδιάστατη) κυματική εξίσωση, για την οποία εξετάζονται προβλήματα αρχικών τιμών και προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών. Στο Εδάφιο 3 θεωρείται η εξίσωση θερμότητας, για την οποία δίνεται η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου και εξετάζεται ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace μελετάται στο Εδάφιο 4. Για την εξίσωση του Laplace δίνεται η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου και εξετάζεται το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό κυκλικού δίσκου καθώς και για το εσωτερικό ορθογωνίου. Σε καθένα απ'τα Εδάφια 0,1,2,3 και 4 δίνονται παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση. Τέλος, στο Εδάφιο 5 δίνεται μια συλλογή γενικών ασκήσεων.

0. ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Στο Εδάφιο αυτό θα δώσουμε μερικά στοιχεία απ'τη Θεωρία των σειρών Fourier. Θα ορίσουμε πρώτα μερικές έννοιες και θα "προσεγγίσουμε" τον τρόπο ορισμού των σειρών Fourier. Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τις σειρές Fourier και θ'ασχοληθούμε με την κατά σημείο σύγκλιση αυτών (Θεωρήματα A_0 και A). Επίσης, θ'αποδείξουμε την ανισότητα του Bessel για τις σειρές Fourier και θα δώσουμε, χωρίς απόδειξη, τον τύπο του Parseval (Θεώρημα B) γι'αυτές. Ακόμα, θ'ασχοληθούμε με την ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών Fourier (Θεώρημα C) καθώς επίσης και με την παραγώγιση όρο προς όρο (Θεώρημα D) και την ολοκλήρωση όρο προς όρο (Θεώρημα E) αυτών. Για την καλύτερη κατανόηση, θα δοθούν αρκετά παραδείγματα και θα προταθούν ορισμένες ασκήσεις για λύση.

0.1. Προκαταρκτικά

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι <u>περιοδική με περίοδο</u> p, όπου p είναι μια θετική σταθερά, αν και μόνο αν

$$f(x+p) = f(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R} .$$

Για συντομία, όταν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $p > 0$, θα λέμε ότι αυτή είναι <u>p-περιοδική</u>. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$, $x \in \mathbb{R}$ και $\cos \frac{n\pi x}{\ell}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου ℓ είναι μια θετική σταθερά και n είναι ένας θετικός ακέραιος, είναι 2ℓ-περιοδικές. Είναι φανερό ότι, αν f_1 και f_2 είναι δύο p-περιοδικές συναρτήσεις και c είναι μια πραγματική σταθερά τότε οι συναρτήσεις f_1+f_2, cf_1 και f_1f_2 είναι επίσης p-περιοδικές.

Μια πραγματική συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι <u>συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα</u> [a,b], αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\nu-1} < x_\nu = b$ του [a,b] έτσι ώστε, για κάθε $k \in \{0,1,\dots,\nu-1\}$, η f να είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (x_k, x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f(x_k+0)$ και $f(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν (ως πραγματικοί αριθμοί). Είναι φανερό ότι, αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα σ'ένα διάστημα [a,b], τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη στο [a,b]. Ακόμα, αν f_1 και f_2 είναι δύο συναρτήσεις που είναι συνεχείς κατά τμήματα στο [a,b], τότε η f_1f_2 είναι επίσης συνεχής κατά τμήματα στο [a,b].

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια p-περιοδική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα σ'ένα διάστημα [a,a+p], $a \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας και επιπλέον το ολοκλήρωμα $\int_a^{a+p} f(x)dx$ δεν εξαρτάται απ' τον αριθμό a.

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι <u>άρτια</u> αν και μόνο αν

$$f(-x) = f(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}$$

και <u>περιττή</u> αν και μόνο αν

$$f(-x) = -f(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών συναρτήσεων είναι μια άρτια συνάρτηση, ενώ το γινόμενο μιας άρτιας με μια περιττή συνάρτηση είναι μια περιττή συνάρτηση.

Ας είναι $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση, όπου $\ell > 0$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η f είναι άρτια αν και μόνο αν

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in (0,\ell),$$

ενώ η f είναι περιττή αν και μόνο αν

$$f(0) = f(\ell) = 0 \text{ και } f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in (0,\ell).$$

Ακόμα, αν η f είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$, τότε

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2\int_0^{\ell} f(x)dx, \text{ αν η } f \text{ είναι άρτια}$$

και

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0, \text{ αν η } f \text{ είναι περιττή.}$$

Αν F είναι μια πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $(-\ell,\ell)$ και το όριο $F(\ell-0)$ υπάρχει, τότε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+2\ell) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = F(x) \text{ για } x \in (-\ell,\ell), \quad f(\ell) = F(\ell-0)$$

είναι μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση που καλείται η 2ℓ-<u>περιοδική επέκταση</u> της F. Αν, τώρα, η πραγματική συνάρτηση F ορίζεται στο διάστημα $(0,\ell)$ και τα $F(\ell-0)$ και $F(0+0)$ υπάρχουν, τότε ορίζεται η 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τους τύπους

$$f(x) = F(x) \text{ για } x \in (0,\ell), \quad f(x) = F(-x) \text{ για } x \in (-\ell,0),$$

$$f(0) = F(0+0), \quad f(\ell) = F(\ell-0), \quad f(x+2\ell) = f(x) \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R},$$

η οποία είναι άρτια και καλείται η <u>άρτια</u> 2ℓ-<u>περιοδική</u> <u>επέκταση</u>

της F. Ακόμα, για μια πραγματική συνάρτηση F ορισμένη στο διάστημα $(0,\ell)$, οι τύποι

$$f(x)=F(x) \text{ για } x\in(0,\ell),\quad f(x)=-F(-x) \text{ για } x\in(-\ell,0),$$

$$f(0)=f(\ell)=0,\quad f(x+2\ell)=f(x) \text{ για όλα τα } x\in\mathbb{R}$$

ορίζουν μια περιττή και 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία λέμε ότι είναι η <u>περιττή</u> 2ℓ-<u>περιοδική</u> <u>επέκταση</u> της F.

Θα λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση f είναι <u>συνεχώς</u> <u>παραγωγίσιμη</u> <u>κατά</u> <u>τμήματα</u> <u>στο</u> <u>διάστημα</u> $[a,b]$, αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\ldots<x_{\nu-1}<x_\nu=b$ του $[a,b]$ έτσι ώστε, για κάθε $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να έχει συνεχή παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (x_k,x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν (οπότε, όπως εύκολα διαπιστώνεται, και τα πλευρικά όρια $f(x_k+0)$ και $f(x_{k+1}-0)$ καθώς και τα όρια

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_k+h)-f(x_k+0)}{h} \quad\text{και}\quad \lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_{k+1}+h)-f(x_{k+1}-0)}{h}$$

θα υπάρχουν, και μάλιστα τα δύο τελευταία όρια θα είναι ίσα με τα όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ αντίστοιχα).

Έτσι, μια πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$, αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\ldots<x_{\nu-1}<x_\nu=b$ του $[a,b]$ έτσι ώστε, για κάθε $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η συνάρτηση f_k με

$$f_k(x)=f(x) \text{ για } x\in(x_k,x_{k+1}),\quad f_k(x_k)=f(x_k+0) \text{ και } f_k(x_{k+1})=f(x_{k+1}-0)$$

να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_k,x_{k+1}]$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$, τότε αυτή είναι και συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα αυτό.

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια p-περιοδική συνάρτηση, όπου $p>0$, και η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σ'ένα διάστημα $[a,a+p]$, $a\in\mathbb{R}$, τότε αυτή είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$. Λέμε ότι η f είναι <u>δύο</u> <u>φορές</u> <u>συνεχώς</u> <u>παραγωγίσιμη</u> <u>κατά</u> <u>τμήματα</u> <u>στο</u> $[a,b]$, αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\ldots<x_{\nu-1}<x_\nu=b$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε, για κάθε $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο (x_k,x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f''(x_k+0)$ και $f''(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν [οπότε θα υπάρχουν και τα όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$]. Αν η f είναι δύο φορές συνεχώς πα-

ραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[a,b]$, τότε αυτή είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα αυτό (και συνεχής κατά τμήματα στο $[a,b]$).

Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια p-περιοδική συνάρτηση, όπου $p > 0$, και η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σ'ένα διάστημα $[a,a+p]$, $a \in \mathbb{R}$, τότε αυτή είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα.

Θα "προσεγγίσουμε", τώρα, κατά κάποιο τρόπο τις σειρές Fourier των περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων.

Ας είναι ℓ ένας θετικός αριθμός και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση έτσι ώστε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad x \in \mathbb{R} \text{ ομοιόμορφα.}$$

Τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής και 2ℓ-περιοδική. Επιπλέον, οι συντελεστές a_0 και a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ δίνονται απ'τους τύπους:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

και

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

Πραγματικά· η συνέχεια της f είναι φανερή, ενώ το γεγονός ότι αυτή είναι 2ℓ-περιοδική προκύπτει απ'το δεδομένο ότι οι συναρτήσεις $\cos\frac{n\pi x}{\ell}$, $x \in \mathbb{R}$ και $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι 2ℓ-περιοδικές. Τώρα, είναι εύκολο ν'αποδείξουμε ότι για τυχόντες θετικούς ακεραίους n και m είναι

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = 0 \text{ και } \int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = 0,$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \ell \text{ και } \int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \ell,$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = 0 \text{ και } \int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = 0 \text{ για } n \neq m,$$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = 0.$$

'Ετσι, επειδή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, έχουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + b_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right) = \frac{a_0}{2}\cdot 2\ell = a_0\ell$$

και επομένως

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx.$$

Στη συνέχεια, πάλι επειδή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, για τυχόν $m\in\{1,2,\dots\}$ παίρνουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx + b_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx\right)$$

$$= a_m\int_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = a_m\ell$$

και ανάλογα

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx + b_n\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx\right)$$

$$= b_m\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = b_m\ell$$

και άρα

$$a_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{m\pi x}{\ell}\,dx \quad \text{και} \quad b_m = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx.$$

0.2. Σειρές Fourier

Ας είναι ℓ μια θετική σταθερά και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Τότε ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

και

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (n=1,2,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται <u>συντελεστές</u> <u>Fourier</u> της συνάρτησης f και η σειρά συναρτήσεων

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

λέγεται <u>σειρά</u> <u>Fourier</u> της f. Αντί του διαστήματος $[-\ell,\ell]$ ως διαστήματος ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier της συνάρτησης f μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[c,c+2\ell]$, όπου $c \in \mathbb{R}$. <u>Αν</u> <u>η</u> <u>συνάρτηση</u> f <u>είναι</u> <u>άρτια</u>, <u>τότε</u> <u>η</u> <u>σειρά</u> <u>Fourier</u> <u>της</u> f <u>είναι</u>

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{σειρά Fourier συνημιτόνων}),$$

<u>όπου</u>

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, dx \quad \text{και} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Ενώ, <u>αν</u> <u>η</u> f <u>είναι</u> <u>περιττή</u>, <u>τότε</u> <u>η</u> <u>σειρά</u> <u>Fourier</u> <u>αυτής</u> <u>είναι</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{σειρά Fourier ημιτόνων})$$

<u>με</u>

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $(-\ell,\ell)$ και το $f(\ell-0)$ υπάρχει, τότε η σειρά Fourier (εφόσον ορίζεται) της 2ℓ-περιοδικής επέκτασης της f θα λέμε ότι είναι η σειρά Fourier της f. Επίσης, αν η πραγματική συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα $(0,\ell)$ και τα όρια $f(\ell-0)$ και $f(0+0)$ υπάρχουν, τότε η σειρά Fourier (εφόσον ορίζεται) της άρτιας 2ℓ-περιοδικής επέκτασης της f λέμε ότι είναι η <u>σειρά</u> <u>Fourier</u> <u>συνημιτόνων</u> της συνάρτησης f. Ανάλογα, για μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $(0,\ell)$, η <u>σειρά</u> <u>Fourier</u> <u>ημιτόνων</u> αυτής ορίζεται να είναι η σειρά Fourier (εφόσον υπάρχει) της περιττής 2ℓ-περιοδικής επέκτασης της f.

Ας είναι $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο 2ℓ-περιοδικές συναρτήσεις. Αν οι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι συνεχείς κατά τμήματα στο $[-\ell,\ell]$ και στο διάστημα αυτό διαφέρουν σε σημεία με πεπερασμένο πλήθος, τότε αυτές, όπως είναι φανερό, έχουν την ίδια σειρά Fourier. Αποδεικνύεται ακόμα ότι, αν οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς και οι σειρές Fourier αυτών ταυτίζονται, τότε αναγκαστικά είναι $f_1 = f_2$.

Ας θεωρήσουμε, τέλος, την ειδική περίπτωση (που είναι και η πιο απλή και συνηθισμένη περίπτωση) όπου έχουμε μια 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Τότε οι συντελεστές Fourier της f δίνονται απ'τους τύπους

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1,2,\dots)$$

και η σειρά Fourier της f είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

0.3. <u>Κατά σημείο σύγκλιση των σειρών Fourier</u>

Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$ και ας είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

η σειρά Fourier αυτής.

Ας είναι x_0 ένα σημείο της πραγματικής ευθείας. Τότε μπαίνει το ερώτημα κατά πόσο η σειρά Fourier της f στο x_0 συγκλίνει. Η σύγκλιση της σειράς Fourier της f στο x_0 μπορεί να εξασφαλισθεί κάτω από ορισμένες συνθήκες για τη συμπεριφορά της f γύρω απ'το σημείο x_0. Αν η σειρά Fourier της f στο x_0 συγκλίνει, τότε έχουμε το πρόβλημα της εύρεσης του αθροίσματος αυτής και του συσχετισμού αυτού με την τιμή της f στο x_0.

Αν A είναι ένα υποσύνολο της πραγματικής ευθείας και για όλα τα $x \in A$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση f <u>αναπτύσσεται σε σειρά Fourier στο σύνολο</u> A. Αν $A = \mathbb{R}$, τότε θα λέμε ότι η f <u>αναπτύσσεται σε σειρά Fourier</u>.

Χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα.

<u>ΛΗΜΜΑ</u> (<u>Λήμμα Riemann-Lebesgue</u>). <u>Αν g είναι μια πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα</u> $[a,b]$, <u>τότε</u>

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η g είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Για κάθε θετικό αριθμό λ, θέτουμε

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx.$$

Ας είναι $\lambda > 0$. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = x-\pi/\lambda$, $x \in [a,b]$, παίρνουμε

$$I(\lambda) = \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(t+\pi/\lambda)\sin(\lambda t-\pi)\,dt = -\int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(t+\pi/\lambda)\sin\lambda t\,dt,$$

δηλαδή

$$I(\lambda) = -\int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,dx.$$

'Ετσι, έχουμε

$$\begin{aligned}2I(\lambda) &= \int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,dx\\ &= -\int_{a-\pi/\lambda}^{a} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,dx + \int_{b-\pi/\lambda}^{b} g(x)\sin\lambda x\,dx\ +\\ &\qquad + \int_a^{b-\pi/\lambda}[g(x)-g(x+\pi/\lambda)]\sin\lambda x\,dx.\end{aligned}$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, θα είναι και φραγμένη στο διάστημα αυτό, δηλαδή θα υπάρχει μια θετική σταθερά M τέτοια ώστε

$$|g(x)| \leq M \text{ για όλα τα } x \in [a,b].$$

'Ετσι, παίρνουμε

$$\left|\int_{a-\pi/\lambda}^{a} g(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,dx\right| = \left|\int_a^{a+\pi/\lambda} g(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leq \int_a^{a+\pi/\lambda}|g(x)|\,|\sin\lambda x|\,dx$$

$$\leq M\int_a^{a+\pi/\lambda}dx = \frac{\pi M}{\lambda}$$

και

$$\left|\int_{b-\pi/\lambda}^{a} g(x)\sin\lambda x\,dx\right| \leq \frac{\pi M}{\lambda}.$$

Υποθέτουμε, στη συνέχεια, ότι $a < b-\pi/\lambda$, δηλαδή ότι $\lambda > \pi/(b-a)$. Η συνέχεια της συνάρτησης g στο συμπαγές διάστημα $[a,b]$ συνεπάγεται την ομοιόμορφη συνέχεια αυτής στο διάστημα αυτό. Θεωρούμε ένα τυχόν $\varepsilon > 0$. Τότε θα υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε για τυχόντα x_1, x_2 στο $[a,b]$ να ισχύει

$$|g(x_1)-g(x_2)| < \varepsilon/(b-a), \text{ αν } |x_1-x_2| < \delta.$$

Άρα, θα έχουμε

$$|g(x)-g(x+\pi/\lambda)| < \varepsilon/(b-a) \text{ για όλα τα } x \in [a,b-\pi/\lambda],$$

εφόσον $\lambda > \pi/\delta$. Θέτουμε $\Lambda = \max\{\pi/(b-a), \pi/\delta\}$. Τότε, για $\lambda > \Lambda$, είναι

$$\left|\int_a^{b-\pi/\lambda} [g(x)-g(x+\pi/\lambda)]\sin\lambda x\,dx\right| \leqq \frac{\varepsilon}{b-a}\left(b-a-\frac{\pi}{\lambda}\right) = \varepsilon\left[1-\frac{\pi/(b-a)}{\lambda}\right] < \varepsilon.$$

Έτσι, παίρνουμε

$$2|I(\lambda)| < \frac{2\pi M}{\lambda} + \varepsilon \text{ για κάθε } \lambda > \Lambda.$$

Εκλέγουμε ένα αριθμό $\Lambda^* > \Lambda$ τέτοιον ώστε $2\pi M/\lambda < \varepsilon$ για όλα τα $\lambda \geqq \Lambda^*$. Τότε, $|I(\lambda)| < \varepsilon$ για $\lambda \geqq \Lambda^*$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\Lambda^* > 0$ έτσι ώστε

$$|I(\lambda)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } \lambda \geqq \Lambda^*,$$

που σημαίνει ότι $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = 0$.

Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση όπου η g είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = b$ του $[a,b]$ έτσι ώστε, για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η g να είναι συνεχής στο (x_k, x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $g(x_k+0)$ και $g(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν. Για τυχόν $k \in \{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η συνάρτηση g_k με

$$g_k(x) = g(x) \text{ για } x \in (x_k, x_{k+1}),\ g_k(x_k) = g(x_k+0),\ g_k(x_{k+1}) = g(x_{k+1}-0)$$

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ και έτσι (σύμφωνα με τα παραπάνω) είναι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Άρα, έχουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=0}^{\nu-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\sin\lambda x\,dx$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\sin\lambda x\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu-1} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> A_0. <u>Ας είναι</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ <u>μια</u> 2ℓ-<u>περιοδική συνάρτηση, που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα</u> $[-\ell,\ell]$, <u>και ας είναι</u> a_0 <u>και</u> a_n,b_n $(n=1,2,\dots)$ <u>οι συντελεστές Fourier αυτής</u>.

<u>Ας είναι</u> x_0 <u>ένα σημείο τέτοιο ώστε τα όρια</u>

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$$

<u>να υπάρχουν</u>. <u>Τότε</u>

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x_0}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x_0}{\ell}\right).$$

<u>Αν επιπλέον η</u> f <u>είναι συνεχής στο</u> x_0, <u>τότε</u>

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x_0}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x_0}{\ell}\right).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε θετικό ακέραιο n, θέτουμε

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x_0}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x_0}{\ell}\right).$$

Ας είναι $n>0$ ένας ακέραιος. 'Εχουμε

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx\right]\cos\frac{k\pi x_0}{\ell} + \left[\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx\right]\sin\frac{k\pi x_0}{\ell}\right\}$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cos\frac{k\pi x_0}{\ell} + \sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{k\pi x_0}{\ell}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi(x-x_0)}{\ell}\right]dx.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t=x-x_0$, το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell-x_0}^{\ell-x_0} f(t+x_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi t}{\ell}\right)dt.$$

Αλλά η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$h(t)=f(t+x_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi t}{\ell}\right)$$

είναι 2ℓ-περιοδική (και συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$). Έτσι, παίρνουμε

$$\int_{-\ell-x_0}^{\ell-x_0} h(t)\,dt=\int_{-\ell-x_0}^{(-\ell-x_0)+2\ell} h(t)\,dt=\int_{-\ell}^{\ell} h(t)\,dt.$$

Έχουμε λοιπόν

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x+x_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx=s_n^+(x_0)+s_n^-(x_0),$$

όπου

$$s_n^+(x_0)=\frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x+x_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx$$

και

$$s_n^-(x_0)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{0} f(x+x_0)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx.$$

Ας είναι πάλι n ένας θετικός ακέραιος και ας θέσουμε $m=n+1/2$. Απ' την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\frac{\sin(n+1/2)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad 0<\alpha\leq\pi,$$

παίρνουμε

$$s_n^+(x_0)=\frac{1}{2\ell}\int_{0}^{\ell} f(x+x_0)\,\frac{\sin\frac{m\pi x}{\ell}}{\sin\frac{\pi x}{2\ell}}\,dx.$$

Θεωρούμε, στη συνέχεια, τη συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0+0)}{\frac{2\ell}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2\ell}}, & \text{αν } 0<x\leq\ell\\[2ex] \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}, & \text{αν } x=0.\end{cases}$$

Η συνάρτηση g ορίζεται, λόγω της υπόθεσης του Θεωρήματος. Η g είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[0,\ell]$, αφού αυτό συμβαίνει για την f στο διάστημα $[x_0, x_0+\ell]$ και επειδή

$$\lim_{x\to 0+0} g(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x_0+x)-f(x_0+0)}{\frac{2\ell}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2\ell}}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x_0+x)-f(x_0+0)}{x}\right]\left[\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin\frac{\pi x}{2\ell}}{\frac{\pi x}{2\ell}}\right]^{-1}$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x_0+x)-f(x_0+0)}{x} = g(0).$$

Τώρα, έχουμε

$$s_n^+(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\ell g(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx + \frac{1}{\ell}\, f(x_0+0)\int_0^\ell \frac{\sin\frac{m\pi x}{\ell}}{2\sin\frac{\pi x}{2\ell}}\,dx.$$

Αλλά, είναι

$$\int_0^\ell \frac{\sin\frac{m\pi x}{\ell}}{2\sin\frac{\pi x}{2\ell}}\,dx = \int_0^\ell\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\ell \cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx = \frac{\ell}{2}$$

και έτσι

$$s_n^+(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\ell g(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx + \frac{f(x_0+0)}{2}.$$

'Οταν $n\to\infty$, είναι $m\to\infty$. 'Ετσι, με τη βοήθεια του Λήμματος, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\ell g(x)\sin\frac{m\pi x}{\ell}\,dx = 0,$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} s_n^+(x_0) = f(x_0+0)/2.$$

Κατά ένα ανάλογο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} s_n^-(x_0) = f(x_0-0)/2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} s_n^+(x_0) + \lim_{n\to\infty} s_n^-(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

δηλαδή

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x_0}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x_0}{\ell}\right) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημά μας.

Απ'το Θεώρημα A_0 προκύπτει αμέσως το παρακάτω συμπέρασμα για την κατά σημείο σύγκλιση των σειρών Fourier.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. Ας είναι $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση, που είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell, \ell]$, και ας είναι a_0 και a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ οι συντελεστές Fourier αυτής. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής, τότε αυτή αναπτύσσεται σε σειρά Fourier.

0.4. Η ανισότητα του Bessel. Ο τύπος του Parseval

Έχουμε το επόμενο συμπέρασμα:

Ας είναι $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση, που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell, \ell]$, και ας είναι a_0 και a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ οι συντελεστές Fourier αυτής. Τότε ισχύει η παρακάτω ανισότητα (γνωστή ως ανισότητα του Bessel)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} [f(x)]^2 dx.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Ας είναι n ένας θετικός ακέραιος και ας θέσουμε

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε

$$0 \leq \int_{-\ell}^{\ell} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\ell}^{\ell} [f(x)]^2 dx - 2\int_{-\ell}^{\ell} f(x) s_n(x) dx + \int_{-\ell}^{\ell} [s_n(x)]^2 dx.$$

Αλλά, είναι

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) s_n(x) dx = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right] dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{k\pi x}{\ell} dx + b_k \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\right]$$

$$= \ell \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right].$$

Επίσης, παίρνουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell}[s_n(x)]^2dx = \int_{-\ell}^{\ell}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right]^2dx$$

$$=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\int_{-\ell}^{\ell}dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\int_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{k\pi x}{\ell}dx+b_k^2\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{k\pi x}{\ell}dx\right)$$

$$+a_0\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx+b_k\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx\right)$$

$$+2\sum_{\substack{k,\lambda=1\\ k\neq\lambda}}^{n}\left(a_k a_\lambda\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cos\frac{\lambda\pi x}{\ell}dx+b_k b_\lambda\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}dx\right)$$

$$+\sum_{k,\lambda=1}^{n}a_k b_\lambda\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}dx$$

$$=\ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

'Ετσι, έχουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell}[f(x)]^2dx-2\ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\ell\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geqq 0,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[f(x)]^2dx\geqq\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

Παίρνοντας τα όρια για $n\to\infty$, φθάνουμε στην ανισότητα του Bessel.

Στην πραγματικότητα, η ανισότητα του Bessel ισχύει ως ισότητα. Η απόδειξη του συμπεράσματος αυτού θα παραλειφθεί. 'Εχουμε λοιπόν το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β. Ας είναι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση, που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$, και ας είναι a_0 και a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ οι συντελεστές Fourier αυτής. Τότε ισχύει η ισότητα (Τύπος του Parseval)

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[f(x)]^2dx.$$

0.5. Ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών Fourier

Αποδεικνύεται ότι: Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση που είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα

$[-\ell,\ell]$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f σε κάθε συμπαγές διάστημα που δεν περιέχει σημεία ασυνέχειας της f. Εδώ θα περιορισθούμε στην περίπτωση συνεχών συναρτήσεων και θ'αποδείξουμε, με τη βοήθεια της ανισότητας του Bessel, το παρακάτω Θεώρημα για την ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών Fourier.

ΘΕΩΡΗΜΑ C. Ας είναι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής 2ℓ-περιοδική συνάρτηση που είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f. Ακόμα, η σειρά Fourier της f συγκλίνει απόλυτα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),\quad x\in\mathbb{R}$$

η σειρά Fourier της συνάρτησης f. Επειδή η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$, μπορούμε να θεωρήσουμε μια διαμέριση $-\ell=x_0<x_1<\ldots<x_{\nu-1}<x_\nu=\ell$ του $[-\ell,\ell]$ έτσι ώστε, για κάθε $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να έχει συνεχή παράγωγο στο (x_k,x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν. Έτσι, οι συνθήκες

$$f_1(x)=f'(x)\ \text{για}\ x\in\bigcup_{k=0}^{\nu-1}(x_k,x_{k+1}),\quad f_1(x_{k+1})=0\quad (k=0,1,\ldots,\nu-1),$$

$$f_1(x+2\ell)=f_1(x)\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

ορίζουν μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Ας είναι

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+B_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),\quad x\in\mathbb{R}$$

η σειρά Fourier της συνάρτησης f_1. Θ'αποδείξουμε ότι

$$A_0=0\ \text{και}\ A_n=\frac{n\pi}{\ell}b_n,\quad B_n=-\frac{n\pi}{\ell}a_n\quad (n=1,2,\ldots).$$

Ας είναι $k\in\{0,1,\ldots,\nu-1\}$. Επειδή η f είναι συνεχής και τα όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ υπάρχουν, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(x_k)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}\quad\text{και}\quad f'_-(x_{k+1})=\lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_{k+1}+h)-f(x_{k+1})}{h}$$

και μάλιστα είναι

$$f'_+(x_k) = f'(x_k+0) \text{ και } f'_-(x_{k+1}) = f'(x_{k+1}-0).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$ και επομένως παίρνουμε

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}$$

και, για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{n\pi}{\ell}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

και

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \frac{n\pi}{\ell}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Έτσι, έχουμε

$$A_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_1(x)\,dx = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\nu-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\,dx = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\nu-1} f(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{\ell}\,[f(\ell)-f(-\ell)] = 0$$

και για $n = 1,2,\ldots$

$$A_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\nu-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\nu-1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{n\pi}{\ell}\,\frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{\nu-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\, f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{-\ell}^{\ell} + \frac{n\pi}{\ell}\,\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\,[f(\ell)\cos n\pi - f(-\ell)\cos(-n\pi)] + \frac{n\pi}{\ell}\, b_n = \frac{n\pi}{\ell}\, b_n$$

και ανάλογα

$$B_n = \frac{1}{\ell}\,[f(\ell)\sin n\pi - f(-\ell)\sin(-n\pi)] - \frac{n\pi}{\ell}\,a_n = -\frac{n\pi}{\ell}\,a_n.$$

Η ανισότητα του Bessel για τη σειρά Fourier της συνάρτησης f_1 δίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2+B_n^2) \leq \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}[f_1(x)]^2dx,$$

που σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2+B_n^2)$ συγκλίνει. Αλλά, για κάθε θετικό ακέραιο m, είναι

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n^2+b_n^2)^{1/2} = \frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{n^2}(A_n^2+B_n^2)\right]^{1/2}$$

και, με την ανισότητα του Schwarz, προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n^2+b_n^2)^{1/2} \leq \frac{\ell}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left[\sum_{n=1}^{m}(A_n^2+B_n^2)\right]^{1/2}.$$

'Αρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2)^{1/2} \leq \frac{\ell}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2+B_n^2)\right]^{1/2} < \infty,$$

δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)^{1/2}$ συγκλίνει. Εξάλλου, είναι

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right| \leq (a_n^2+b_n^2)^{1/2} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (n=1,2,\ldots).$$

'Ετσι, η σειρά Fourier της συνάρτησης f,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad x\in\mathbb{R},$$

συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα. Η συνέχεια της f και το ότι είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[-\ell,\ell]$ συνεπάγονται, σύμφωνα με το Θεώρημα A, ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει κατά σημείο προς τη συνάρτηση f. Η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη, όπως αποδείχθηκε παραπάνω.

0.6. Παραγώγιση και ολοκλήρωση των σειρών Fourier

Το παρακάτω θεώρημα (Θεώρημα D) δίνει τις προϋποθέσεις κάτω απ'τις οποίες επιτρέπεται να γίνει παραγώγιση όρο προς όρο της σειράς Fourier μιας συνάρτησης. Μια βασική προϋπόθεση γι'αυτό είναι η συνέχεια της συνάρτησης. Σ'αντίθεση με την παραγώγιση όρο προς όρο των σειρών Fourier, η ολοκλήρωση όρο προς όρο της σειράς

Fourier μιας συνάρτησης γίνεται πάντοτε (Θεώρημα E) σ'οποιοδήποτε συμπαγές διάστημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ D</u>. <u>Ας είναι</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>μια συνεχής</u> <u>2ℓ-περιοδική συνάρτηση, που είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα</u> $[-\ell,\ell]$, <u>και ας είναι</u> a_0 <u>και</u> a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ <u>οι συντελεστές Fourier αυτής</u>. <u>Τότε</u>

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2} = \frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\,a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} + n\,b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε μια διαμέριση $-\ell = x_0 < x_1 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \ell$ του διαστήματος $[-\ell,\ell]$ τέτοια ώστε, για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο (x_k, x_{k+1}) και τα όρια $f''(x_k+0)$ και $f''(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν. Τότε, για οποιοδήποτε $k \in \{0,1,\ldots,k-1\}$, η f έχει συνεχή παράγωγο στο (x_k, x_{k+1}) και τα όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ υπάρχουν. Στη συνέχεια, θεωρούμε την 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με τους παρακάτω τύπους

$$f_1(x) = f'(x) \quad \text{για } x \in \bigcup_{k=0}^{\nu-1}(x_k, x_{k+1}), \quad f_1(x_{k+1}) = 0 \quad (k=0,1,\ldots,\nu-1).$$

Η f_1 είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[-\ell,\ell]$. Όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος C, αποδεικνύουμε ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης f_1 είναι

$$\frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\,a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} + n\,b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αλλά, η f_1 είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[-\ell,\ell]$ και έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα A, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ θα είναι

$$\frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\,a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} + n\,b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \frac{f_1(x+0)+f_1(x-0)}{2} = \frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2}.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ E</u>. <u>Ας είναι</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα</u> $[-\ell,\ell]$, <u>και ας είναι</u> a_0 <u>και</u> a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ <u>οι συντελεστές Fourier αυτής</u>. <u>Τότε για τυχόντα</u> a <u>και</u> b, $-\infty < a < b < \infty$, <u>ισχύει</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_a^b dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^b \cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + b_n\int_a^b \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα, και επομένως ο τύπος

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

ορίζει μια συνεχή συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η F είναι 2ℓ-περιοδική, αφού η συνάρτηση f είναι 2ℓ-περιοδική. Πραγματικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F(x+2\ell) = \int_0^{x+2\ell} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt + \int_x^{x+2\ell} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]dt$$

$$= F(x) + \int_x^{x+2\ell} f(t)dt - \ell a_0 = F(x) + \left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt - \ell a_0\right] = F(x).$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τη σειρά Fourier της F

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ας είναι, τώρα, $-\ell = x_0 < x_1 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \ell$ μια διαμέριση του διαστήματος $[-\ell,\ell]$ τέτοια ώστε, για κάθε $k \in \{0,1,\ldots,\nu-1\}$, η f να είναι συνεχής στο (x_k, x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f(x_k+0)$ και $f(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν. Ας θεωρήσουμε τυχόν $k \in \{0,1,\ldots,\nu-1\}$. Θέτουμε

$$g_k(x) = f(x) \text{ για } x \in (x_k, x_{k+1}) \text{ και } g_k(x_k) = f(x_k+0)$$

και έχουμε για κάθε $x \in (x_k, x_{k+1})$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{x_k} f(t)dt + \int_{x_k}^x g_k(t)dt - \frac{a_0}{2}x\right] = g_k(x) - \frac{a_0}{2}.$$

Επομένως,

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \text{ για κάθε } x \in (x_k, x_{k+1}).$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε

$$F'(x_k+0) = f(x_k+0) - \frac{a_0}{2} \text{ και } F'(x_{k+1}-0) = f(x_{k+1}-0) - \frac{a_0}{2}.$$

Άρα, η συνάρτηση F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα C, η σειρά Fourier της F συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση F. Ακόμα, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος C, διαπιστώνουμε ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης $f - \frac{a_0}{2}$ είναι

$$\frac{\pi}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\,B_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}-n\,A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{\pi n}{\ell}B_n=a_n \quad \text{και} \quad \frac{-\pi n}{\ell}A_n=b_n \qquad (n=1,2,\dots).$$

Επομένως,

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+\frac{1}{n}a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\quad \text{για } x\in\mathbb{R}.$$

Τώρα, παίρνουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt+\frac{a_0}{2}\int_a^b dt=\frac{a_0}{2}\int_a^b dt+F(b)-F(a)$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^b dt+\left[\frac{A_0}{2}+\frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}b_n\cos\frac{n\pi b}{\ell}+\frac{1}{n}a_n\sin\frac{n\pi b}{\ell}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{A_0}{2}+\frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}b_n\cos\frac{n\pi a}{\ell}+\frac{1}{n}a_n\sin\frac{n\pi a}{\ell}\right)\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^b dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\ell}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_a^b-b_n\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_a^b\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^b dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^b\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx+b_n\int_a^b\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right).$$

0.7. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x+x^2 \text{ για } x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi], \text{ και } f(0)=1.$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}$$

και για $n=1,2,\dots$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}(x+x^2)\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\ (1+2x)\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi n^2}\ (1+2x)\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^3}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{4\cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi n}(x+x^2)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2x)\cos nx\, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(x+x^2)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}(1+2x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin nx\, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(x+x^2)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{\pi n^3}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2\cos n\pi}{n} = -\frac{2(-1)^n}{n}.$$

Έτσι η σειρά Fourier της συνάρτησης f είναι

$$\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{n}\cos nx - \sin nx\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = x$ για $x \in [0,\pi)$, $f(x) = -\pi$ για $x \in (\pi, 2\pi)$ και $f(\pi) = 2$.

<u>Λύση</u>. Η f είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[0,2\pi]$. Για τους συντελεστές Fourier αυτής έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-\pi)\, dx = -\frac{\pi}{2}$$

και για $n = 1,2,\dots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-\pi)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi n}x\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\ [\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

και

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-\pi)\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n}\,(1-2\cos n\pi)$$

$$= \frac{1-2(-1)^n}{n}.$$

'Αρα, η σειρά Fourier της συνάρτησης f είναι

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 4-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$f(x)=1$ για $x\in(-2,1)$, $f(x)=0$ για $x\in(1,2)$, $f(1)=\pi$ και $f(2)=-1$.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-2,2]$ και οι συντελεστές Fourier αυτής είναι

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} dx = \frac{3}{2}$$

και για $n=1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

και

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right].$$

Επομένως, η σειρά Fourier της f είναι

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^n-\cos(n\pi/2)}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right], \quad x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x) = |\sin x| \text{ για } x\in(-\pi,\pi].$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Επίσης, η f είναι άρτια. 'Ετσι, η σειρά Fourier της f είναι

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0$$

και για $n=2,3,\ldots$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{-\cos(1-n)x}{1-n}\bigg|_0^{\pi}\right]=\frac{2[1+(-1)^n]}{\pi(1-n^2)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{2n}=\frac{4}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{και } a_{2n+1}=0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Έτσι, η σειρά Fourier της συνάρτησης f είναι

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nx, \quad x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x \text{ για } x\in(-\pi,\pi), \text{ και } f(\pi)=0.$$

Λύση. Η f είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[-\pi,\pi]$ και περιττή. Έτσι, η f έχει ως σειρά Fourier την

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x\in\mathbb{R},$$

όπου, για κάθε $n=1,2,\ldots,$ είναι

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}x\cos nx\bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n^2}\sin nx\bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Δηλαδή, η σειρά Fourier της f είναι

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx, \quad x\in\mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. (i) Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης: $F(x)=x+x^2$ για $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, και $F(0)=1$. (ii) Να βρεθεί η σειρά Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης $F(x)=\sin x$ για $x\in(0,\pi)$. (iii) Να βρεθεί η σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης $F(x)=x$ για $x\in(0,\pi)$.

Λύση. (i) Η 2π-περιοδική επέκταση της F είναι η συνάρτηση f του Παραδείγματος 1. Έτσι, η σειρά Fourier της F είναι

$$\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{n}\cos nx-\sin nx\right),\quad -\pi<x<\pi.$$

(ii) Η συνάρτηση f του Παραδείγματος 4 είναι η άρτια 2π-περιοδική επέκταση της συνάρτησης F. Άρα, η F έχει τη σειρά Fourier συνημιτόνων

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nx,\quad 0<x<\pi.$$

(iii) Η συνάρτηση f του Παραδείγματος 5 είναι η περιττή 2π-περιοδική επέκταση της F και, έτσι, η σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης F είναι

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx,\quad 0<x<\pi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

(i) $g(x)=x+x^2$ για $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, $g(0)=-2$ και $g(\pi)=0$.

(ii) $g(x)=|\sin x|$ για $x\in\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και $g(\pi)=-2$.

(iii) $g(x)=x$ για $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, $g(0)=1$ και $g(\pi)=2$.

Λύση. (i) Παρατηρούμε ότι $g(x)=f(x)$ για όλα τα $x\in[-\pi,\pi]-\{-\pi,0,\pi\}$, όπου f είναι η συνάρτηση του Παραδείγματος 1. Έτσι, η σειρά Fourier της g είναι η ίδια με εκείνη της συνάρτησης f (Παράδειγμα 1).

(ii) Η συνάρτηση g έχει ως σειρά Fourier τη σειρά Fourier της συνάρτησης f του Παραδείγματος 4, αφού $g(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]-\{-\pi,\frac{\pi}{2},\pi\}$.

(iii) Η σειρά Fourier της g είναι η ίδια με τη σειρά Fourier της συνάρτησης f του Παραδείγματος 5, γιατί $g(x)=f(x)$ για $x\in[-\pi,\pi]-\{-\pi,0,\pi\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = 2\pi + x$ για $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = x$ για $x \in [0,\pi] - \{\pi/2\}$, και $f(\pi/2) = 1$.

Στη συνέχεια, να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ και η σειρά Fourier αυτής είναι (όπως εύκολα προκύπτει)

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{h} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{h} = 1,$$

το θεώρημα A_0 εξασφαλίζει ότι

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right] = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2},$$

δηλαδή

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Να βρεθεί και να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = 0$ για $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = \pi - x$ για $x \in (0,\pi)$, $f(0) = 1$ και $f(\pi) = \pi$.

Στη συνέχεια, να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Λύση. Η f είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[-\pi,\pi]$. Εύκολα βρίσκουμε τους συντελεστές Fourier αυτής, οπότε έχουμε τη σειρά Fourier της f

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι, ως εύκολα προκύπτει, συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ και επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Α, έχουμε

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right] \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $x \in (-\pi,0) \cup (0,\pi)$, τότε η συνέχεια της f στο x εξασφαλίζει ότι

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = f(x).$$

Επίσης, είναι $f(0+0)=\pi$ και $f(0-0)=0$, και άρα

$$\frac{1}{2}[f(0+0)+f(0-0)] = \frac{\pi}{2}.$$

Ακόμα, έχουμε $f(\pi-0)=0$ και, λόγω του ότι η f είναι 2π-περιοδική, είναι

$$f(\pi+0) = \lim_{x\to\pi+0} f(x) = \lim_{x\to\pi+0} f(x-2\pi) = \lim_{y\to-\pi+0} f(y) = f(-\pi+0) = 0,$$

και έτσι

$$\frac{1}{2}[f(\pi+0)+f(\pi-0)] = 0.$$

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε ένα τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $x_0 \in (-\pi,\pi]$ και ένας ακέραιος λ έτσι ώστε $x = x_0+2\lambda\pi$ και, επειδή η f είναι 2π-περιοδική, εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$f(x+0) = f(x_0+0) \text{ και } f(x-0) = f(x_0-0),$$

οπότε

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].$$

Μετά απ'τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right] = \begin{cases} f(x), \text{αν } x\neq\lambda\pi \text{ για κάθε ακέραιο } \lambda \\ \frac{\pi}{2}, \text{ αν } x=2\lambda\pi \text{ για κάποιο ακέραιο } \lambda \\ 0, \text{αν } x=(2\lambda-1)\pi \text{ για κάποιο ακέραιο} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά Fourier στο σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{\lambda\pi : \lambda \text{ ακέραιος}\}.$$

Ειδικά, για $x=0$, παίρνουμε

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

απ'όπου προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Με τη βοήθεια της σειράς Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \text{ για } x \in (-\pi,\pi), \text{ και } f(\pi) = 0,$$

να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

<u>Λύση</u>. Η σειρά Fourier της f είναι (Παράδειγμα 5)

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ο τύπος του Parseval (Θεώρημα B) δίνει

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\right]^2 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

και επομένως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Ν'αποδειχθεί ότι η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^2 \text{ για } x \in (-\pi,\pi]$$

συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f.

<u>Λύση</u>. Η συνάρτηση f είναι συνεχής. Επίσης, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα C, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα προς την συνάρτηση f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Με τη βοήθεια της σειράς Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = |\sin x| \text{ για } x \in (-\pi,\pi],$$

ν'αποδειχθεί ότι

$$\cos x = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-4n^2} \sin 2nx \text{ για κάθε } x \in (0,\pi).$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι η ίδια με εκείνη του Παραδείγματος 4, και επομένως η σειρά Fourier αυτής είναι

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2nx, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής. Ακόμα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[-\pi,\pi]$, και έτσι το Θεώρημα D εξασφαλίζει ότι για όλα τα $x\in(0,\pi)$

$$\cos x = f'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}(\cos 2nx)'$$

$$= -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-4n^2}\sin 2nx.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13. Με τη βοήθεια της σειράς Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x+x^2 \text{ για } x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi], \text{ και } f(0)=1,$$

ν'αποδειχθεί ότι

$$3x^2+2x^3-2\pi^2x = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{2}{n}\sin nx+\cos nx-1\right), \quad 0<x\leq\pi$$

και να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Λύση. Η σειρά Fourier της f είναι (Παράδειγμα 1)

$$\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{n}\cos nx-\sin nx\right), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα E, για κάθε x με $0<x\leq\pi$ παίρνουμε

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{\pi^2}{3}\int_0^x dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{n}\int_0^x\cos nt\,dt-\int_0^x\sin nt\,dt\right)$$

ή

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{2}{n}\sin nx+\cos nx-1\right),$$

δηλαδή

$$3x^2+2x^3-2\pi^2x = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{2}{n}\sin nx+\cos nx-1\right).$$

Ειδικά, για $x=\pi$, βρίσκουμε

$$3\pi^2+2\pi^3-2\pi^3 = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}[(-1)^n-1],$$

απ'όπου παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

0.8. Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

(i) $f(x) = x$ για $x \in (-\pi,0)$, $f(x) = 1$ για $x \in (0,\pi)$, και $f(0) = f(\pi) = 2$.

(ii) $f(x) = 1$ για $x \in (-\pi,0]$, $f(x) = x^2$ για $x \in (0,\pi)$, και $f(\pi) = 0$.

(iii) $f(x) = x \sin x$ για $x \in (-\pi,0)\ (0,\pi)$, $f(0) = 1$ και $f(\pi) = -1$.

(iv) $f(x) = x^2$ για $x \in (-\pi,\pi)$, και $f(\pi) = 0$.

(v) $f(x) = |x|$ για $x \in (-\pi,\pi)$, και $f(\pi) = 1$.

(vi) $f(x) = \sin x$ για $x \in (-\pi,\pi)$, και $f(\pi) = 1$.

2. Να βρεθεί η σειρά Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = x^2$ για $x \in (0,\pi)$.

(ii) $f(x) = \pi + x$ για $x \in (0,\pi)$.

(iii) $f(x) = 0$ για $x \in (0,\pi/2)$, $f(x) = 1$ για $x \in [\pi/2,\pi)$.

3. Να βρεθεί η σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = \pi - x$ για $x \in (0,\pi)$.

(ii) $f(x) = x$ για $x \in (0,\pi/2)$, $f(x) = \cos x$ για $x \in [\pi/2,\pi)$.

(iii) $f(x) = e^x$ για $x \in (0,\pi)$.

4. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = x$ για $x \in (0,\pi)$, $f(x) = 1$ για $x \in [\pi,2\pi]$, και $f(x+2\pi) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = x^2$ για $x \in (-1,0) \cup (0,1)$, $f(0) = f(1) = \pi$, και $f(x+2) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $f(x) = x+1$ για $x \in (-2,0)$, $f(x) = 1$ για $x \in [0,2)$, $f(2) = 1/2$, και $f(x+4) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(iv) $f(x) = -1$ για $x \in (-1,0)$, $f(x) = 1$ για $x \in (0,1)$, $f(0) = f(1) = 2$, και $f(x+2) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

5. Να βρεθούν η σειρά Fourier συνημιτόνων και η σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = x$ για $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ για $x \in [1,2)$.

(ii) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ για $x \in (0,2)$.

(iii) $f(x) = e^x$ για $x \in (0,1)$.

6. Να βρεθεί και να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά Fourier της συνάρτησης f με:

(i) $f(x) = x(\pi+x)$ για $x \in (-\pi,0]$, $f(x) = (\pi-x^2)^2$ για $x \in (0,\pi]$, και $f(x+2\pi) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = |x|$ για $x \in (-2,2)$, $f(2) = 0$, και $f(x+4) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $f(x) = 1/4$ για $x \in (-\pi,0)$, $f(x) = (\pi x-1)/4$ για $x \in (0,\pi]$, $f(0) = 1$, και $f(x+2\pi) = f(x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

7. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f με

$f(x) = x^2$ για $x \in (-\pi,\pi]$, και $f(x+2\pi)=f(x)$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

αναπτύσσεται σε σειρά Fourier.

8. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x) = x^2$ για $x \in (-\pi,0) \cup (0,\pi)$, $f(0) = 1$ και $f(\pi) = 0$

και, στη συνέχεια, να βρεθούν τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

9. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{n^2} \cos n\pi x = \frac{(2|x|-1)\pi^2}{4} \text{ για κάθε } x \in (-1,1]$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

10. Ν'αποδειχθεί ότι η 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x)=\pi$ για $x\in(-\pi,0)$, $f(x)=x$ για $x\in(0,\pi]$, και $f(0)=\pi/2$

αναπτύσσεται σε σειρά Fourier.

11. Δίνεται η 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$f(x)=-\cos x$ για $x\in(-\pi,0)$, $f(x)=\cos x$ για $x\in(0,\pi)$, και $f(0)=f(\pi)=\lambda$. Να βρεθεί το λ ώστε η f ν'αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Στη συνέχεια, να βρεθεί η σειρά Fourier της f και ν'αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{(4n-3)(4n-1)}=\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\,.$$

12. Ν'αποδειχθεί ότι:

(i) $x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\cos nx-\pi\sin nx\right)$ για κάθε $x\in(0,2\pi)$.

(ii) $\pi-x=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

13. Με τη βοήθεια της σειράς Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x \text{ για } x\in(0,2\pi], \text{ και } f(0)=\pi,$$

ν'αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

14. Δίνεται η 2-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^2 \text{ για } x\in(-1,1), \text{ και } f(1)=0.$$

Να βρεθεί η σειρά Fourier της f και, στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\,.$$

15. Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

(i) $f(x)=x^4$ για $x\in(-\pi,\pi]$.

(ii) $f(x)=|x|$ για $x\in(-\pi,\pi]$.

(iii) $f(x)=-\pi x$ για $x\in(-\pi,0]$, $f(x)=x^2$ για $x\in(0,\pi]$.

(iv) $f(x)=-1$ για $x\in(-\pi,0)$, $f(x)=x$ για $x\in[0,\pi]$.

16. Με τη βοήθεια της σειράς Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^2 \text{ για } x\in(-\pi,\pi],$$

ν'αποδειχθεί ότι

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \text{ για κάθε } x\in(-\pi,\pi)$$

και να βρεθεί, στη συνέχεια, το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} .$$

17. Με τη βοήθεια της σειράς Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x \text{ για } x \in (-\pi,\pi), \text{ και } f(\pi) = 0,$$

ν'αποδειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

18. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 3\pi+2x \text{ για } x \in (-\pi,0),\ f(x) = \pi+2x \text{ για } x \in [0,\pi),\ f(\pi) = 1$$

και, στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι

$$x^2-\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos 2nx-1) \text{ για κάθε } x \in (0,\pi].$$

Ακόμα, να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

19. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$f(x) = x$ για $x \in [0,\pi/2)$, $f(x) = \pi-x$ για $x \in [\pi/2,3\pi/2)$, και
$f(x) = x-2\pi$ για $x \in [3\pi/2,2\pi)$.

Στη συνέχεια, να βρεθούν τα αθροίσματα των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} .$$

Επίσης, ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε σειρά Fourier.

20. Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^3-\pi^2 x \text{ για } x \in (-\pi,\pi), \text{ και } f(\pi) = 0$$

και, στη συνέχεια, να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6}.$$

1. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Εδάφιο αυτό θα δώσουμε την έννοια της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές) και θα περιορισθούμε, στη συνέχεια, στην περίπτωση των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, τις οποίες θα ταξινομήσουμε σε τρείς κατηγορίες (υπερβολικές, παραβολικές, ελλειπτικές). Θ'ασχοληθούμε με την αναγωγή αυτών στις κανονικές μορφές (Θεωρήματα 1,2,3,3' και 4) και παραπέρα με την αναγωγή τους σε ακόμα πιο απλές μορφές (Θεωρήματα 5,6,7,7' και 8). Θα δοθούν αρκετά παραδείγματα και θα προταθούν για λύση ορισμένες ασκήσεις.

1.1. Γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές) είναι μια εξίσωση της μορφής

$$(E) \qquad Az_{xx}+2Bz_{xy}+Cz_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz = \Phi,$$

όπου A,B,C,D,E,F και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και μια τουλάχιστο απ'τις A,B και C δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω (ένας τόπος του $\mathbb{R}^2$ είναι ένα μη κενό, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Το σύνολο Ω λέμε ότι είναι ο τόπος ορισμού της (E) και οι συναρτήσεις A,B,C,D,E και F λέμε ότι είναι οι συντελεστές αυτής. 'Οταν οι συντελεστές της (E) είναι πραγματικές σταθερές, τότε θα λέμε ότι αυτή είναι μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Αν Φ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο Ω, τότε η (E) λέγεται μη ομογενής· στην περίπτωση όπου Φ = 0 στο Ω ή (E) γίνεται

$$(E_0) \qquad Az_{xx}+2Bz_{xy}+Cz_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz = 0$$

και λέγεται ομογενής. Επίσης, λέμε ότι η (E_0) είναι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της (E).

Μια συνάρτηση z ορισμένη στον τόπο Ω θα λέμε ότι είναι μια λύση της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (E) αν και μόνο αν αυτή είναι C^2 στο Ω (δηλαδή είναι συνεχής και εχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης στο Ω) και για όλα τα $(x,y) \in \Omega$ είναι

$$A(x,y)z_{xx}(x,y)+2B(x,y)z_{xy}(x,y)+C(x,y)z_{yy}(x,y)+D(x,y)z_x(x,y)+$$
$$+E(x,y)z_y(x,y)+F(x,y)z(x,y)=\Phi(x,y).$$

Ας σημειώσουμε ότι είναι $z_{xy}=z_{yx}$ για τυχούσα λύση z της (E).

Είναι φανερό ότι η μηδενική συνάρτηση στον τόπο Ω είναι μια λύση της ομογενούς γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης (E_0) (μηδενική λύση). Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ο τελεστής L, όπου

$$L\phi = A\phi_{xx}+2B\phi_{xy}+C\phi_{yy}+D\phi_x+E\phi_y+F\phi$$

για κάθε πραγματική συνάρτηση φ που είναι C^2 στο Ω, είναι γραμμικός, δηλαδή τέτοιος ώστε

$$L(c_1\phi_1+c_2\phi_2)=c_1L\phi_1+c_2L\phi_2$$

για τυχούσες σταθερές c_1, c_2 και για οποιεσδήποτε συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2 που είναι C^2 στο Ω. Επομένως, το άθροισμα δύο λύσεων της (E_0) και το γινόμενο μιας πραγματικής σταθεράς με μια λύση της (E_0) είναι επίσης λύσεις της (E_0). Ακόμα, αν z* είναι μια (μερική) λύση της (E), τότε z είναι μια λύση της (E) αν και μόνο αν z-z* είναι μια λύση της (E_0). Έτσι, οι λύσεις της (E) είναι ακριβώς τα αθροίσματα των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (E_0) με μια μερική λύση της (E).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (E) έχει σταθερούς συντελεστές, δηλαδή ότι A,B,C, D,E και F είναι πραγματικοί αριθμοί και $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Η (E) θα λέγεται: (i) υπερβολική αν και μόνο αν $B^2-AC>0$, (ii) παραβολική αν και μόνο αν $B^2-AC=0$, και (iii) ελλειπτική αν και μόνο αν $B^2-AC<0$. Ο αριθμός B^2-AC καλείται διακρίνουσα της (E). Για $A = C = 0$ και $B=\frac{1}{2}$, η (E) είναι υπερβολική και παίρνει τη μορφή

$$z_{xy}+Dz_x+Ez_y+Fz=\Phi.$$

Η μορφή αυτή καλείται πρώτη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης. Όταν $A=1$, $B=0$ και $C=-1$, η (E) είναι πάλι υπερβολική της μορφής

$$z_{xx}-z_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz=\Phi,$$

η οποία λέγεται δεύτερη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης. Επίσης, για $A=1$ και $B=C=0$ ή αντίστοιχα $C=1$ και $A=B=0$, η (E) είναι παραβολική και έχει τη μορφή

$$z_{xx}+Dz_x+Ez_y+Fz=\Phi$$

ή αντίστοιχα

$$z_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz=\Phi.$$

Καθεμιά απ'τις μορφές αυτές λέμε ότι είναι η κανονική μορφή της παραβολικής εξίσωσης. Ακόμα, όταν $A=C=1$ και $B=0$, η (E) είναι ελλειπτική και έχει τη μορφή

$$z_{xx}+z_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz=\Phi,$$

η οποία λέγεται κανονική μορφή της ελλειπτικής εξίσωσης.

Πολλά προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής οδηγούν σε γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, και ιδιαίτερα στις εξισώσεις:

(E_1) $\quad z_{tt}-c^2z_{xx}=0$ (c θετική σταθερά),

(E_2) $\quad z_t-k\,z_{xx}=0$ (k θετική σταθερά),

(E_3) $\quad z_{xx}+z_{yy}=0.$

Η εξίσωση (E_1) λέγεται (μονοδιάστατη) κυματική εξίσωση, η (E_2) καλείται (μονοδιάστατη) εξίσωση θερμότητας, και η (E_3) λέγεται (διδιάστατη) εξίσωση δυναμικού ή εξίσωση του Laplace. Οι τρείς αυτές εξισώσεις είναι γνωστές ως οι κλασσικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής. Παρατηρούμε ότι η (E_1) είναι υπερβολική, η (E_2) είναι παραβολική και η (E_3) είναι ελλειπτική.

Πιο γενικά, μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (με n ανεξάρτητες μεταβλητές, όπου $n\geq 2$) είναι μια εξίσωση της μορφής

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i u_{x_ix_i} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} 2M_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} N_i u_{x_i} + Fu=\Phi,$$

όπου Λ_i $(i=1,\ldots,n)$, M_{ij} $(i,j=1,\ldots,n; i<j)$, N_i $(i=1,\ldots,n)$, F και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^n$ και μια τουλάχιστο απ'τις Λ_i $(i=1,\ldots,n)$, M_{ij} $(i,j=1,\ldots,n;i<j)$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω. Για παράδειγμα, οι παρακάτω εξισώσεις, με c και k θετικές σταθερές, είναι γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

$u_{tt}-c^2(u_{xx}+u_{yy})=0$ (διδιάστατη κυματική εξίσωση),

$u_{tt}-c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0$ (τρισδιάστατη κυματική εξίσωση),

$u_t-k(u_{xx}+u_{yy})=0$ (διδιάστατη εξίσωση θερμότητας),

$u_t-k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0$ (τρισδιάστατη εξίσωση θερμότητας),

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$ (τρισδιάστατη εξίσωση δυναμικού ή εξίσωση Laplace).

1.2. Αναγωγή στις κανονικές μορφές

Θα θεωρήσουμε εδώ γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή εξισώσεις της μορφής

$$\text{(E)} \qquad Az_{xx}+2Bz_{xy}+Cz_{yy}+Dz_x+Ez_y+Fz=\Phi,$$

όπου A,B,C,D,E και F είναι πραγματικές σταθερές και $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, και Φ είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$. Θ'ασχοληθούμε με την αναγωγή της (Ε) στις κανονικές μορφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (Ε) είναι υπερβολική, δηλαδή ότι $B^2-AC>0$. Τότε υπάρχει ένας (γραμμικός) μετασχηματισμός της μορφής

$$u=\alpha_1x+\beta_1y,\ v=\alpha_2x+\beta_2y \quad (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \neq 0)$$

που μετασχηματίζει την (Ε) στην πρώτη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης:

$$(\text{E}^*) \qquad z_{uv}=D^*z_u+E^*z_v+F^*z+\Phi^*,$$

όπου D^*,E^* και F^* είναι πραγματικοί αριθμοί και Φ^* είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον τόπο Ω^* που είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό. Αν $A\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=\lambda_1x+y,\ v=\lambda_2x+y,$$

όπου

$$\lambda_1=\frac{1}{A}\left(-B+\sqrt{B^2-AC}\right),\ \lambda_2=\frac{1}{A}\left(-B-\sqrt{B^2-AC}\right).$$

Αν $A=0$, $B\neq 0$ και $C\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=x,\ v=x-\frac{2B}{C}y.$$

Αν, $A=0$, $B\neq 0$ και $C=0$, τότε ο ταυτοτικός μετασχηματισμός

$$u=x,\ v=y$$

είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $A\neq 0$ και ας θέσουμε

$$u=\lambda_1x+y,\ v=\lambda_2x+y,$$

όπου λ_1,λ_2 είναι οι δύο πραγματικές και άνισες ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0.$$

Τότε έχουμε

$$z_x = \lambda_1 z_u + \lambda_2 z_v, \quad z_y = z_u + z_v, \quad z_{xx} = \lambda_1^2 z_{uu} + 2\lambda_1\lambda_2 z_{uv} + \lambda_2^2 z_{vv},$$

$$z_{xy} = \lambda_1 z_{uu} + (\lambda_1+\lambda_2) z_{uv} + \lambda_2 z_{vv}, \quad z_{yy} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}$$

και έτσι η εξίσωση (E) γίνεται

$$(A\lambda_1^2+2B\lambda_1+C)z_{uu}+2[A\lambda_1\lambda_2+B(\lambda_1+\lambda_2)+C]z_{uv}+(A\lambda_2^2+2B\lambda_2+C)z_{vv}+(D\lambda_1+E)z_u+$$
$$+(D\lambda_2+E)z_v+Fz=\overline{\Phi},$$

όπου

$$\overline{\Phi}(u,v) = \Phi\left(\frac{u-v}{\lambda_1-\lambda_2}, \ \frac{-\lambda_2 u+\lambda_1 v}{\lambda_1-\lambda_2}\right), \quad (u,v) \in \Omega^*$$

και Ω^* είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό μας. Αλλά είναι

$$A\lambda_1^2+2B\lambda_1+C = A\lambda_2^2+2B\lambda_2+C = 0$$

και

$$A\lambda_1\lambda_2+B(\lambda_1+\lambda_2)+C = A\frac{C}{A}+B\left(-\frac{2B}{A}\right)+C = -\frac{2}{A}\,(B^2-AC) \neq 0.$$

Άρα, θέτοντας

$$D^* = \frac{A(D\lambda_1+E)}{4(B^2-AC)}, \quad E^* = \frac{A(D\lambda_2+E)}{4(B^2-AC)}, \quad F^* = \frac{AF}{4(B^2-AC)}$$

και

$$\Phi^* = -\frac{1}{4(B^2-AC)}\,\overline{\Phi},$$

καταλήγουμε στην εξίσωση (E*).

Θεωρούμε, στη συνέχεια, την περίπτωση όπου $A=0$, $B\neq 0$ και $C\neq 0$. Σ'αυτή την περίπτωση θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$u = x, \quad v = x - \frac{2B}{C}\,y.$$

Τότε είναι

$$z_x = z_u + z_v, \quad z_y = -\frac{2B}{C}\,z_v, \quad z_{xx} = z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv},$$

$$z_{xy} = -\frac{2B}{C}\,(z_{uv}+z_{vv}), \quad z_{yy} = \frac{4B^2}{C^2}\,z_{vv}$$

και επομένως η (E) γίνεται

$$-\frac{4B^2}{C}\,z_{uv}+Dz_u+\frac{DC-2EB}{C}\,z_v+Fz = \overline{\Phi}$$

με

$$\overline{\Phi}(u,v) = \Phi\left(u, \ \frac{C(u-v)}{2B}\right), \quad (u,v) \in \Omega^*,$$

όπου Ω^* είναι η εικόνα του Ω με το μετασχηματισμό. Έτσι, για

$$D^* = \frac{DC}{4B^2},\ E^* = \frac{DC-2EB}{4B^2},\ F^* = \frac{FC}{4B^2} \text{ και } \Phi^* = -\frac{C}{4B^2}\overline{\Phi}$$

έχουμε την εξίσωση (E^*).

Τώρα, αν $A=0$, $B\neq 0$ και $C=0$, τότε η εξίσωση (E) γράφεται

$$2Bz_{xy}+Dz_x+Ez_y+Fz = \Phi$$

ή

$$z_{xy}=D^*z_x+E^*z_y+F^*z+\Phi^*,$$

όπου

$$D^* = -\frac{D}{2B},\ E^* = -\frac{E}{2B},\ F^* = -\frac{F}{2B} \text{ και } \Phi^* = \frac{1}{2B}\Phi.$$

Έτσι, στην περίπτωση αυτή, με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό $u=x$, $v=y$ αναγόμαστε στην εξίσωση (E^*).

Τέλος, παρατηρούμε ότι, αφού $B^2-AC>0$, οι τρείς παραπάνω περιπτώσεις είναι ακριβώς όλες οι δυνατές περιπτώσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (E) είναι υπερβολική, δηλαδή ότι $B^2-AC>0$. Τότε υπάρχει ένας (γραμμικός) μετασχηματισμός της μορφής

$$u=\alpha_1x+\beta_1y,\ v=\alpha_2x+\beta_2y\ \ (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0)$$

που μετασχηματίζει την (E) στην δεύτερη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης:

$$(E^*)\qquad z_{uu}-z_{vv} = D^*z_u+E^*z_v+F^*z+\Phi^*,$$

όπου D^*, E^* και F^* είναι πραγματικοί αριθμοί και Φ^* είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον τόπο Ω^* που είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό. Αν $A\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=-\frac{2B}{A}x+2y,\ v=\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A}x.$$

Αν $A=0$, $B\neq 0$ και $C\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=2x-\frac{2B}{C}y,\ v=\frac{2B}{C}y.$$

Αν $A=0$, $B\neq 0$ και $C=0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=x+y,\ v=x-y.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $A\neq 0$, θέτουμε

$$\bar{x} = \lambda_1 x+y, \quad \bar{y} = \lambda_2 x+y,$$

όπου λ_1, λ_2 με $\lambda_1 > \lambda_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $A\lambda^2+2B\lambda+C = 0$. Αν $A = 0$, $B \neq 0$ και $C \neq 0$, θέτουμε

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = x - \frac{2B}{C} y.$$

Τέλος, αν $A = 0$, $B \neq 0$ και $C = 0$, θέτουμε

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y.$$

Σ'όλες αυτές τις περιπτώσεις, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, η εξίσωση (E) μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση της μορφής

$$(\bar{E}) \qquad z_{\bar{x}\bar{y}} = \bar{D} z_{\bar{x}} + \bar{E} z_{\bar{y}} + \bar{F} z + \bar{\Phi},$$

όπου $\bar{D}$, $\bar{E}$ και $\bar{F}$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\bar{\Phi}$ είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον τόπο $\bar{\Omega}$ που είναι η εικόνα του Ω με τον παραπάνω μετασχηματισμό.

Εκτελούμε τώρα τον μετασχηματισμό

$$u = \bar{x}+\bar{y}, \quad v = \bar{x}-\bar{y}.$$

Έχουμε

$$z_{\bar{x}} = z_u + z_v, \quad z_{\bar{y}} = z_u - z_v, \quad z_{\bar{x}\bar{y}} = z_{uu} - z_{vv}$$

και έτσι η $(\bar{E})$ γίνεται

$$z_{uu} - z_{vv} = (\bar{D}+\bar{E}) z_u + (\bar{D}-\bar{E}) z_v + \bar{F} z + \Phi^*$$

με

$$\Phi^* = \bar{\Phi}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right), \quad (u,v) \in \Omega^*,$$

όπου Ω^* είναι η εικόνα του $\bar{\Omega}$ με τον μετασχηματισμό. Άρα, θέτοντας

$$D^* = \bar{D}+\bar{E}, \quad E^* = \bar{D}-\bar{E} \quad \text{και} \quad F^* = \bar{F},$$

φθάνουμε στην εξίσωση (E*).

Η σύνθεση των δύο παραπάνω μετασχηματισμών είναι ένας μετασχηματισμός που μετασχηματίζει την (E) στην (E*). Αν $A \neq 0$, τότε είναι

$$u = \bar{x}+\bar{y} = (\lambda_1 x+y)+(\lambda_2 x+y) = (\lambda_1+\lambda_2)x+2y = -\frac{2B}{A} x+2y,$$

$$v = \bar{x}-\bar{y} = (\lambda_1 x+y)+(\lambda_2 x+y) = (\lambda_1-\lambda_2)x = \frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A} x.$$

Για $A = 0$, $B \neq 0$ και $C \neq 0$, είναι

$$u = \bar{x}+\bar{y} = x+\left(x - \frac{2B}{C} y\right) = 2x - \frac{2B}{C} y, \quad v = \bar{x}-\bar{y} = x-\left(x - \frac{2B}{C} y\right) = \frac{2B}{C} y.$$

Τέλος, αν $A=0$, $B\neq 0$ και $C=0$, τότε

$$u=\bar{x}+\bar{y}=x+y,\quad v=\bar{x}-\bar{y}=x-y.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (E) είναι παραβολική, δηλαδή ότι $B^2-AC=0$. Τότε υπάρχει ένας (γραμμικός) μετασχηματισμός της μορφής

$$u=\alpha_1 x+\beta_1 y,\quad v=\alpha_2 x+\beta_2 y\quad (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R}\ \text{και}\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0)$$

που μετασχηματίζει την (E) στην κανονική μορφή της παραβολικής εξίσωσης:

$$(E^*)\qquad z_{uu}=D^*z_u+E^*z_v+F^*z+\Phi^*,$$

όπου D^*, E^* και F^* είναι πραγματικοί αριθμοί και Φ^* είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον τόπο Ω^* που είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό. Αν $A\neq 0$ και $C\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=x,\quad v=x-\frac{B}{C}y.$$

Αν $A\neq 0$ και $C=0$, τότε ο ταυτοτικός μετασχηματισμός

$$u=x,\quad v=y$$

είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός. Αν $A=0$ και $C\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=y,\quad v=x.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι $A\neq 0$ και $C\neq 0$ (οπότε $B\neq 0$) και ας θέσουμε

$$u=x,\quad v=x-\frac{B}{C}y.$$

Τότε είναι

$$z_x=z_u+z_v,\quad z_y=-\frac{B}{C}z_v,\quad z_{xx}=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv},$$

$$z_{xy}=-\frac{B}{C}(z_{uv}+z_{vv}),\quad z_{yy}=\frac{B^2}{C^2}z_{vv}$$

και η εξίσωση (E) γίνεται

$$Az_{uu}+\frac{2(AC-B^2)}{C}z_{uv}+\frac{AC-B^2}{C}z_{vv}+Dz_u+\frac{DC-EB}{C}z_v+Fz=\bar{\Phi}$$

ή (αφού $AC-B^2=0$)

$$Az_{uu}+Dz_u+\frac{DC-EB}{C}z_v+Fz=\bar{\Phi},$$

όπου

$$\overline{\Phi}(u,v) = \Phi\left(u, \frac{C}{B}(u-v)\right), \quad (u,v) \in \Omega^*$$

και Ω^* είναι η εικόνα του Ω με το μετασχηματισμό. Θέτοντας λοιπόν

$$D^* = -\frac{D}{A}, \quad E^* = \frac{EB-DC}{AC}, \quad F^* = -\frac{F}{A} \text{ και } \Phi^* = \frac{1}{A}\overline{\Phi},$$

φθάνουμε στη μορφή (E*).

Ας είναι, τώρα, $A \neq 0$ και $C = 0$. Στην περίπτωση αυτή είναι και $B = 0$, οπότε η (E) γίνεται

$$Az_{xx}+Dz_x+Ez_y+Fz = \Phi.$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$z_{xx} = D^*z_x+E^*z_y+F^*z+\Phi^*,$$

όπου

$$D^* = -\frac{D}{A}, \quad E^* = -\frac{E}{A}, \quad F^* = -\frac{F}{A} \text{ και } \Phi^* = \frac{1}{A}\Phi.$$

Άρα, καταλήγουμε στη μορφή (E*) με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό

$$u = x, \quad v = y.$$

Ας θεωρήσουμε τέλος την περίπτωση όπου $A = 0$ και $C \neq 0$. Τότε θα είναι επίσης $B = 0$. Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$u = y, \quad v = x,$$

οπότε είναι

$$z_x = z_v, \quad z_y = z_u, \quad z_{yy} = z_{uu}$$

και η (E) δίνει

$$Cz_{uu}+Ez_u+Dz_v+Fz = \overline{\Phi},$$

όπου

$$\overline{\Phi}(u,v) = \Phi(v,u), \quad (u,v) \in \Omega^*$$

και Ω^* είναι η εικόνα του Ω με το μετασχηματισμό. Έτσι, για

$$D^* = -\frac{E}{C}, \quad E^* = -\frac{D}{C}, \quad F^* = -\frac{F}{C} \text{ και } \Phi^* = \frac{1}{C}\Phi$$

έχουμε την εξίσωση (E*).

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι παραπάνω τρείς περιπτώσεις είναι οι μόνες δυνατές, αφού η σχέση $B^2-AC = 0$ συνεπάγεται ότι μια τουλάχιστον απ'τις σταθερές A,C είναι μη μηδενική (δεδομένου ότι $A^2+B^2+C^2 \neq 0$).

Το παρακάτω θεώρημα προκύπτει απ'το θεώρημα 3 με μια εναλλαγή του ρόλου των μεταβλητών x και y.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3'. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (E) είναι παραβολική, δηλαδή ότι $B^2-AC=0$. Τότε υπάρχει ένας (γραμμικός) μετασχηματισμός της μορφής

$$u=\alpha_1x+\beta_1y, \quad v=\alpha_2x+\beta_2y \quad (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0)$$

που μετασχηματίζει την (E) στην κανονική μορφή της παραβολικής εξίσωσης:

$$(E^*) \qquad z_{vv}=D^*z_u+E^*z_v+F^*z+\Phi^*,$$

όπου D^*,E^* και F^* είναι πραγματικοί αριθμοί και Φ^* είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον τόπο Ω^* που είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό. Αν $A\neq 0$ και $C\neq 0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=-\frac{B}{A}x+y, \quad v=y.$$

Αν $A\neq 0$ και $C=0$, ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=y, \quad v=x.$$

Αν $A=0$ και $C\neq 0$, τότε ο ταυτοτικός μετασχηματισμός

$$u=x, \quad v=y$$

είναι ένας τέτοιος μετασχηματισμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (E) είναι ελλειπτική, δηλαδή ότι $B^2-AC<0$. Τότε υπάρχει ένας (γραμμικός) μετασχηματισμός της μορφής

$$u=\alpha_1x+\beta_1y, \quad v=\alpha_2x+\beta_2y \quad (\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0)$$

που μετασχηματίζει την (E) στην κανονική μορφή της ελλειπτικής εξίσωσης:

$$(E^*) \qquad z_{uu}+z_{vv}=D^*z_u+E^*z_v+F^*z+\Phi^*,$$

όπου D^*,E^* και F^* είναι πραγματικοί αριθμοί και Φ^* είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον τόπο Ω^* που είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι

$$u=-\frac{B}{A}x+y, \quad v=\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}x.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε ότι είναι $A\neq 0$, αφού $B^2-AC<0$. Ο μετασχηματισμός μας δίνει

$$z_x=-\frac{B}{A}z_u+\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}z_v,\ z_y=z_u,\ z_{xx}=\frac{B^2}{A^2}z_{uu}-2\frac{B\sqrt{AC-B^2}}{A^2}z_{uv}+\frac{AC-B^2}{A^2}z_{vv},$$

$$z_{xy}=-\frac{B}{A}z_{uu}+\frac{\sqrt{AC-B^2}}{A}z_{uv},\ z_{yy}=z_{uu}$$

και έτσι η (Ε) γίνεται

$$\frac{AC-B^2}{A}(z_{uu}+z_{vv})+\frac{EA-DB}{A}z_u+\frac{D\sqrt{AC-B^2}}{A}z_v+Fz=\overline{\Phi},$$

όπου

$$\overline{\Phi}=\Phi\left(\frac{A}{\sqrt{AC-B^2}}v,\ u+\frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}v\right),\ (u,v)\in\Omega^*$$

και Ω^* είναι η εικόνα του Ω με τον μετασχηματισμό. Τώρα, θέτουμε

$$D^*=\frac{DB-EA}{AC-B^2},\ E^*=-\frac{D}{\sqrt{AC-B^2}},\ F^*=-\frac{AF}{AC-B^2}$$

και

$$\Phi^*=\frac{A}{AC-B^2}\Phi,$$

οπότε παίρνουμε την εξίσωση (E^*).

1.3. Αναγωγή σε ακόμα πιο απλές μορφές

Στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε με την αναγωγή των γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης στις κανονικές μορφές αυτών. Εδώ θ'ασχοληθούμε με μια παραπέρα αναγωγή αυτών σε ακόμα πιο απλές μορφές. Μια τέτοια αναγωγή είναι ενδεχόμενο να οδηγεί στην εύρεση της γενικής λύσης μιας γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Ας θεωρήσουμε τις γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

$(E_h)_1$ $\quad z_{xy}=Dz_x+Ez_y+Fz+\Phi,$

$(E_h)_2$ $\quad z_{xx}-z_{yy}=Dz_x+Ez_y+Fz+\Phi,$

$(E_p)_1$ $\quad z_{xx}=Dz_x+Ez_y+Fz+\Phi,$

$(E_p)_2$ $\quad z_{yy}=Dz_x+Ez_y+Fz+\Phi,$

(E_e) $\quad z_{xx}+z_{yy}=Dz_x+Ez_y+Fz+\Phi,$

όπου D, E και F είναι πραγματικές σταθερές και Φ είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση σ'ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$.

Ας είναι α και β δύο πραγματικοί αριθμοί και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση T με

$$T(x,y) = e^{\alpha x+\beta y} \text{ για } (x,y) \in \Omega.$$

Θα μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις $(E_h)_1, (E_h)_2, (E_p)_1, (E_p)_2$ και (E_e) με την αντικατάσταση

$$z = wT.$$

Έχουμε αμέσως

$$z_x = (w_x+\alpha w)T,\ z_y = (w_y+\beta w)T,\ z_{xx} = (w_{xx}+2\alpha w_x+\alpha^2 w)T,$$
$$z_{xy} = (w_{xy}+\beta w_x+\alpha w_y+\alpha\beta w)T,\ z_{yy} = (w_{yy}+2\beta w_y+\beta^2 w)T.$$

Έτσι:

(i) Η εξίσωση $(E_h)_1$ γίνεται

$$w_{xy} = (D-\beta)w_x+(E-\alpha)w_y+(F+D\alpha+E\beta-\alpha\beta)w+\Phi/T.$$

Εκλέγοντας $\alpha = E$ και $\beta = D$, παίρνουμε την εξίσωση

$$w_{xy} = (F+DE)w+\Phi/T.$$

(ii) Η $(E_h)_2$ γράφεται

$$w_{xx}-w_{yy} = (D-2\alpha)w_x+(E+2\beta)w_y+(F+D\alpha+E\beta-\alpha^2+\beta^2)w+\Phi/T$$

και για $\alpha = D/2$ και $\beta = -E/2$ γίνεται

$$w_{xx}-w_{yy} = [F+(D^2-E^2)/4]w+\Phi/T.$$

(iii) Η $(E_p)_1$ γίνεται

$$w_{xx} = (D-2\alpha)w_x+Ew_y+(F+D\alpha+E\beta-\alpha^2)w+\Phi/T$$

και, αν $\alpha = D/2$ και $\beta = 0$, προκύπτει

$$w_{xx} = Ew_y+(F+D^2/4)w+\Phi/T.$$

(iv) Η $(E_p)_2$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$w_{yy} = Dw_x+(E-2\beta)w_y+(F+D\alpha+E\beta-\beta^2)w+\Phi/T,$$

η οποία, όταν $\alpha = 0$ και $\beta = E/2$, γίνεται

$$w_{yy} = Dw_x+(F+E^2/4)w+\Phi/T.$$

(v) Η εξίσωση (E_e) γίνεται

$$w_{xx}+w_{yy} = (D-2\alpha)w_x+(E-2\beta)w_y+(F+D\alpha+E\beta-\alpha^2-\beta^2)w+\Phi/T.$$

Για $\alpha = D/2$ και $\beta = E/2$, η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$w_{xx}+w_{yy} = [F+(D^2+E^2)/4]w+\Phi/T.$$

Μετά απ'τα παραπάνω, έχουμε τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Ας είναι

$$S(x,y) = e^{-(Ex+Dy)} \text{ για } (x,y) \in \Omega.$$

Η αντικατάσταση $w = zS$ μετασχηματίζει την $(E_h)_1$ στην εξίσωση

$$w_{xy} = (F+DE)w+\Phi S.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. Ας είναι

$$S(x,y) = e^{-(Dx-Ey)/2} \text{ για } (x,y) \in \Omega.$$

Η αντικατάσταση $w = zS$ μετασχηματίζει τη $(E_h)_2$ στην εξίσωση

$$w_{xx}-w_{yy} = [F+(D^2-E^2)/4]w+\Phi S$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. Ας είναι

$$S(x,y) = e^{-(D/2)x} \text{ για } (x,y) \in \Omega.$$

Η αντικατάσταση $w = zS$ μετασχηματίζει την $(E_p)_1$ στην εξίσωση

$$w_{xx} = Ew_y+(F+D^2/4)w+\Phi S.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 7'. Ας είναι

$$S(x,y) = e^{-(E/2)y} \text{ για } (x,y) \in \Omega.$$

Η αντικατάσταση $w = zS$ μετασχηματίζει την $(E_p)_2$ στην εξίσωση

$$w_{yy} = Dw_x+(F+E^2/4)w+\Phi S.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Ας είναι

$$S(x,y) = e^{-(Dx+Ey)/2} \text{ για } (x,y) \in \Omega.$$

Η αντικατάσταση $w = zS$ μετασχηματίζει την (E_e) στην εξίσωση

$$w_{xx}+w_{yy} = [F+(D^2+E^2)/4]w+\Phi S.$$

1.4. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $z(x,y) = y/z$, $x>0$, $y \in \mathbb{R}$ είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$-yz_{xy}+z_{yy}+z_x = 0; \; x > 0, \; y \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Για όλα τα $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$z_x(x,y) = -y/x^2, \; z_{xy}(x,y) = -1/x^2, \; z_{yy}(x,y) = 0$$

και έτσι

$$-yz_{xy}(x,y)+z_{yy}(x,y)+z_x(x,y) = -y(-1/x^2)-y/x^2 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xy} = 0.$$

<u>Λύση</u>. Η εξίσωση γράφεται $(z_x)_y = 0$ και έτσι έχουμε

$$z_x(x,y) = f_1(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου f_1 είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Επομένως, είναι

$$z(x,y) = \int_0^x f_1(t)dt+F_2(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_2 είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης. Θέτουμε

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t)dt \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F_1 έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης. Ας σημειωθεί ότι, απ'τον ορισμό, κάθε λύση z θα είναι C^2 στο $\mathbb{R}^2$. Έτσι: <u>Όλες οι λύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης</u>

$$z_{xy} = 0$$

δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = F_1(x)+F_2(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

<u>όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο</u> $\mathbb{R}$ <u>με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης</u>.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xy}+z_x = x^2y.$$

<u>Λύση</u>. Θέτουμε $z_x = Z$, οπότε η εξίσωση γράφεται

$$Z_y+Z = x^2y.$$

Έτσι, για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$Z(x,y) = e^{-y}\left[f_1(x)+x^2\int_1^y te^t dt\right] = e^{-y}f_1(x)+x^2(y-1)$$

ή

$$z_x(x,y) = e^{-y}f_1(x)+x^2(y-1),$$

όπου f_1 είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Στη συνέχεια, παίρνουμε

$$z(x,y) = e^{-y}\int_0^x f_1(t)dt + \frac{x^3}{3}(y-1)+F_2(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_2 είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης. Έτσι, όλες οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = e^{-y}F_1(x) + \frac{x^3}{3}(y-1)+F_2(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xy} = xy,$$

αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι $z^* = \frac{1}{4}x^2y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι μια μερική λύση της.

<u>Λύση</u>. Είναι εύκολο να δούμε ότι z^* είναι μια μερική λύση. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι

$$z_{xy} = 0,$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται (Παράδειγμα 2) απ'τον τύπο

$$\tilde{z}(x,y) = F_1(x)+F_2(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Έτσι, όλες οι λύσεις της εξίσωσής μας είναι $z = \tilde{z}+z^*$, δηλαδή

$$z(x,y) = F_1(x)+F_2(y) + \frac{1}{4}x^2y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να ταξινομηθούν, ως υπερβολικές, παραβολικές ή ελλειπτικές, οι παρακάτω γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(i) $z_{xx}-3z_{xy}+z_{yy}-z_x+2z = x^2y.$

(ii) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}-z_y = x^2+y^2.$

(iii) $z_{xx}-z_{xy}+3z_{yy}-4z_x+z = e^{xy}.$

<u>Λύση</u>. (i) Η εξίσωση είναι υπερβολική, γιατί $\left(-\frac{3}{2}\right)^2-1\cdot1 = \frac{5}{4} > 0$. (ii) Η εξίσωση είναι παραβολική, αφού $1^2-1\cdot1 = 0$. (iii) Η εξίσωση

αυτή είναι ελλειπτική, γιατί $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1\cdot 3=-\frac{11}{4}<0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Οι παρακάτω δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις (οι οποίες είναι υπερβολικές) ν'αναχθούν στην πρώτη καθώς και στη δεύτερη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης:

(i) $z_{xx}+4z_{xy}-5z_{yy}+6z_x+3z_y-9z=2x+y$.

(ii) $z_{xy}+2z_{yy}-z_x+z=xy$.

<u>Λύση</u>. (i) Θέτουμε (πρβλ. Θεώρημα 1)

$$u=x+y,\ v=-5x+y,$$

οπότε η εξίσωσή μας γίνεται

$$-36z_{uv}+9z_u-27z_v-9z=2\,\frac{1}{6}\,(u-v)+\frac{1}{6}\,(5u+v)$$

ή

$$z_{uv}=\frac{1}{4}\,z_u-\frac{3}{4}\,z_v-\frac{1}{4}\,z-\frac{1}{216}\,(7u-v).$$

Αν κάνουμε το μετασχηματισμό (πρβλ. Θεώρημα 2)

$$u=-4x+y,\ v=6x,$$

τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$-36(z_{uu}-z_{vv})-18z_u+36z_v-9z=\frac{1}{3}\,(3u+4v)$$

ή

$$z_{uu}-z_{vv}=-\frac{1}{2}\,z_u+z_v-\frac{1}{4}\,z-\frac{1}{108}\,(3u+4v).$$

(ii) Με τον μετασχηματισμό (πρβλ. Θεώρημα 1)

$$u=x,\ v=x-\frac{1}{2}\,y$$

η εξίσωση γίνεται

$$-\frac{1}{2}\,z_{uv}-z_u-z_v+z=2u(u-v)$$

ή

$$z_{uv}=-2z_u-2z_v+2z-4u(u-v).$$

Αν θέσουμε (πρβλ. Θεώρημα 2)

$$u=2x-\frac{1}{2}\,y,\ v=\frac{1}{2}\,y,$$

τότε η εξίσωση γράφεται

$$-\frac{1}{2}\,(z_{uu}-z_{vv})-2z_u+z=(u+v)v$$

ή

$$z_{uu}-z_{vv}=-4z_u+2z-2(u+v)v.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Η παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση (η οποία είναι παραβολική) ν'αναχθεί στην κανονική μορφή της παραβολικής εξίσωσης:

$$z_{xx}-6z_{xy}+9z_{yy}+2z_x+3z_y-z=9e^{3x+2y}.$$

Λύση. Κάνουμε τον μετασχηματισμό (πρβλ. Θεώρημα 3)

$$u=x,\ v=x+\frac{1}{3}y,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$z_{uu}=-2z_u-3z_v+z+9e^{3(-u+2v)}.$$

Επίσης, για (πρβλ. Θεώρημα 3')

$$u=3x+y,\ v=y$$

η εξίσωση γράφεται

$$9z_{vv}+9z_u+3z_v-z=9e^{u+v}$$

ή

$$z_{vv}=-z_u-\frac{1}{3}z_v+\frac{1}{9}z+e^{u+v}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Η παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση (η οποία είναι ελλειπτική) ν'αναχθεί στην κανονική μορφή της ελλειπτικής εξίσωσης:

$$z_{xx}+2z_{xy}+5z_{yy}+z_x-2z_y-3z=x^2+y^2.$$

Λύση. Θέτοντας (πρβλ. Θεώρημα 4)

$$u=-x+y,\ v=2x,$$

η εξίσωση γίνεται

$$4(z_{uu}+z_{vv})-3z_u+2z_v-3z=(2u^2+2uv+v^2)/2$$

ή

$$z_{uu}+z_{vv}=\frac{3}{4}z_u-\frac{1}{2}z_v+\frac{3}{4}z+(2u^2+2uv+v^2)/8.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις ν'αναχθούν σε πιο απλές μορφές:

(i) $z_{xy}=z_x-z_y+2z+x^2+y^2.$

(ii) $z_{xx}-z_{yy}=-2z_x+z_y-z+xy.$

(iii) $z_{xx}=z_x-z_y+3z-x+y,\ z_{yy}=z_x+2z_y-z+xy.$

(iv) $z_{xx}+z_{yy}=z_x+2z_y+z+e^{xy}.$

Λύση. (i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 5, η αντικατάσταση

$$w(x,y) = z(x,y)e^{x-y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

μετασχηματίζει την εξίσωση στην

$$w_{xy} = w+(x^2+y^2)e^{-x+y}.$$

(ii) Κάνουμε την αντικατάσταση

$$w(x,y) = z(x,y)e^{x+y/2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται (Θεώρημα 6)

$$w_{xx}-w_{yy} = -\frac{1}{4}\, w+xye^{x+y/2}.$$

(iii) Για την πρώτη εξίσωση, θέτουμε

$$w(x,y) = z(x,y)e^{-x/2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

οπότε αυτή γράφεται (Θεώρημα 7)

$$w_{xx} = -w_y + \frac{13}{4}\, w+(-x+y)e^{-x/2}.$$

Η δεύτερη εξίσωση μετασχηματίζεται (Θεώρημα 7΄) στην

$$w_{yy} = w_x+xye^{y},$$

με την αντικατάσταση

$$w(x,y) = z(x,y)e^{y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(iv) Η αντικατάσταση

$$w(x,y) = z(x,y)e^{-(x+2y)/2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

μετασχηματίζει (Θεώρημα 8) την εξίσωση στην

$$w_{xx}+w_{yy} = \frac{9}{4}\, w+e^{xy-(x+2y)/2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$3z_{xx}+10z_{xy}+3z_{yy} = 0.$$

Λύση. Η εξίσωση αυτή είναι υπερβολική, γιατί $5^2-3\cdot 3 = 16 > 0$. Με τον μετασχηματισμό (πρβλ. Θεώρημα 1)

$$u = -\frac{1}{3}\, x+y, \quad v = -3x+y$$

η εξίσωση ανάγεται στην πρώτη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης:

$$z_{uv} = 0.$$

Όλες οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι (Παράδειγμα 2)

$$z(u,v) = F_1(u)+F_2(v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Όλες οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται απ' τον τύπο

$$z(x,y) = F_1\left(-\frac{1}{3} x+y\right)+F_2(-3x+y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$4z_{xx}+5z_{xy}+z_{yy}+z_x+z_y = 2.$$

Λύση. Κάνουμε τον μετασχηματισμό (πρβλ. Θεώρημα 1)

$$u = -x+y, \quad v = -\frac{1}{4} x+y,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$z_{uv} - \frac{1}{3} z_v = -\frac{8}{9}.$$

Με τρόπο ανάλογο μ' αυτόν που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 3, βρίσκουμε ότι οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης:

$$z(u,v) = \frac{8}{3} v+F_1(u) + \frac{1}{3} F_2(v)e^{u/3}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Έτσι, οι λύσεις της εξίσωσής μας δίνονται απ' τον τύπο

$$z(x,y) = \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{4} x+y\right)+F_1(-x+y) + \frac{1}{3} F_2\left(-\frac{1}{4} x+y\right)e^{(-x+y)/3}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12. Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xy} = -3z_x+2z_y+6z.$$

Λύση. Θέτουμε (πρβλ. Θεώρημα 5)

$$w(x,y) = z(x,y)e^{-2x+3y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$w_{xy} = 0.$$

Έτσι (πρβλ. Παράδειγμα 2), οι λύσεις δίνονται απ' τον τύπο

$$z(x,y) = [F_1(x)+F_2(y)]e^{2x-3y}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης.

1.5. Ασκήσεις

1. Ν'αποδειχθεί ότι καθεμιά απ'τις παρακάτω συναρτήσεις είναι λύση της αντίστοιχης μερικής διαφορικής εξίσωσης:

(i) $z(x,y)=e^x\sin y,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2;\ z_{xx}+z_{yy}=0.$

(ii) $z(x,y)=\log(x^2+y^2),\ x>0,\ y>0;\ z_{xx}+z_{yy}=0.$

(iii) $z(x,y)=\sin(x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2;\ z_{xx}-z_{yy}=0.$

(iv) $z(x,y)=f(x+y)+g(x-y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2;\ z_{xx}-z_{yy}=0.$

(v) $z(x,y)=f(2x+y)+g(x-y)-xy;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2;\ z_{xx}-z_{xy}-2z_{yy}=1.$

Στις περιπτώσεις (iv) και (v) οι συναρτήσεις f και g είναι πραγματικές, ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης.

2. Να επιλυθούν οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_{xx}+z=0.$ (iii) $z_{xx}-z=x^2$

(ii) $z_{xy}+z_x=0.$ (iv) $z_{xy}+z_x=y.$

3. Για καθεμιά απ'τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις να βρεθεί μια μερική λύση της μορφής $z^*(x,y)=e^{\lambda x+\mu y},(x,y)\in\mathbb{R}^2$, όπου λ,μ είναι πραγματικές σταθερές:

(i) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}-5z_x-5z_y+6z=0.$

(ii) $z_{xx}-2z_{xy}+z_{yy}-2z_x+2z_y-3z=0.$

(iii) $z_{xx}+4z_{xy}+4z_{yy}+6z_x+12z_y+8z=0.$

(iv) $2z_{xx}-z_{xy}-2z_{yy}-z_x+2z_y+2z=0.$

4. Ας υποθέσουμε ότι f είναι μια πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης, και ας είναι λ μια πραγματική σταθερά. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$z(x,y)=f(\lambda x+y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$Az_{xx}+2Bz_{xy}+Cz_{yy}=0,$$

όπου A,B και C είναι πραγματικές σταθερές με $A^2+B^2+C^2\neq 0$, αν και μόνο αν λ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $A\lambda^2+2B\lambda+C=0$. Στη συνέχεια, να βρεθούν οι λύσεις αυτής της μορφής για καθεμιά απ'τις μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_{xx}-4z_{xy}+3z_{yy}=0$. (iii) $2z_{xx}-12z_{xy}+5z_{yy}=0$.

(ii) $z_{xx}-2z_{xy}=0$. (iv) $z_{xx}-z_{yy}=0$.

5. Να ταξινομηθούν, ως υπερβολικές, παραβολικές ή ελλειπτικές οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_{xx}+z_{xy}+z_{yy}=0$.

(ii) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$.

(iii) $z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}=0$.

(iv) $2z_{xx}-3z_{xy}+z_{yy}-z_{x}=0$.

(v) $z_{xx}+z_{xy}-3z_{yy}-7z_{x}-8z_{y}=e^{xy}$.

(vi) $z_{xx}-4z_{xy}+4z_{yy}-z_{x}=x^{2}y$.

(vii) $2z_{xx}+3z_{xy}+4z_{yy}+z_{x}-z_{y}=e^{xy}+1$.

6. Οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις (οι οποίες είναι υπερβολικές) ν'αναχθούν στην πρώτη καθώς και στη δεύτερη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης:

(i) $z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}=0$.

(ii) $z_{xx}+z_{xy}-3z_{yy}+7z_{x}-z_{y}=1$.

(iii) $z_{xx}-3z_{xy}+z_{yy}-z_{x}=0$.

(iv) $z_{xx}+z_{xy}-3z_{yy}+7z_{x}-8z_{y}+z=e^{xy}$.

(v) $z_{xy}-2z_{yy}+7z_{x}-z_{y}+z=x+y$.

7. Οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις (οι οποίες είναι παραβολικές) ν'αναχθούν στην κανονική μορφή της παραβολικής εξίσωσης:

(i) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}=0$.

(ii) $z_{xx}+2z_{xy}+z_{yy}+7z_{x}+z_{y}-z=e^{x+y}$.

(iii) $z_{xx}-6z_{xy}+9z_{yy}+z_{x}=1+e^{xy}$.

8. Οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις (οι οποίες είναι ελλειπτικές) ν'αναχθούν στην κανονική μορφή της ελλειπτικής εξίσωσης:

(i) $z_{xx}+z_{xy}+z_{yy}=0$.

(ii) $2z_{xx}+3z_{xy}+4z_{yy}+z_x-z_y+2z=x\cos y$.

(iii) $2z_{xx}-2z_{xy}+5z_{yy}-z=0$.

9. Να επιλυθούν οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις,αφού πρώτα αναχθούν στην πρώτη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης:

(i) $z_{xx}-2z_{yy}=0$. (iii) $z_{xx}+z_{xy}=1$.

(ii) $z_{xx}-3z_{xy}+2z_{yy}=0$. (iv) $z_{xx}-5z_{xy}+z_{yy}=0$.

10. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$Az_{xx}+2Bz_{xy}+Cz_{yy}+Dz_x+Ez_y+F_z=\Phi,$$

όπου A,B,C,D,E,F και Φ είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις σ' ένα τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$ και μια τουλάχιστον απ'τις A,B και C δεν μηδενίζεται πουθενά στο Ω. Θα λέμε ότι η εξίσωση αυτή είναι: (I) υπερβολική αν και μόνο αν $B^2-AC>0$ στο Ω, (II) παραβολική αν και μόνο αν $B^2-AC=0$ στο Ω, και (III) ελλειπτική αν και μόνο αν $B^2-AC<0$ στο Ω. Να ταξινομηθούν, ως υπερβολικές, παραβολικές ή ελλειπτικές, οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_{xx}+2xz_{xy}+(1-y^2)z_{yy}=0$, $x^2+y^2>1$.

(ii) $z_{xx}+2xz_{xy}+(1-y^2)z_{yy}=0$, $x^2+y^2<1$.

(iii) $xz_{xx}-z_{yy}+x^2z_x-z_y=y$, $x>0$, $y\in\mathbb{R}$.

(iv) $x^2z_{xx}-2xyz_{xy}+y^2z_{yy}+z_x-z=e^{xy}$, $x>0$, $y>0$.

(v) $z_{xx}-yz_{xy}+xz_x+yz_y+z=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

(vi) $e^xz_{xx}+e^yz_{yy}-z_x+xyz_y-z=2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

11. Να μετασχηματισθεί καθεμιά απ'τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις με τον σημειούμενο μετασχηματισμό:

(i) $y^2z_{xx}-x^2z_{yy}=0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; $u=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$,
$v=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$.

(ii) $x^2z_{xx}+2xyz_{xy}+y^2z_{yy}=0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$; $u=y/x$, $v=y$.

(iii) $z_{xx}+x^2z_{yy}=0$, $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$; $u=2y$, $v=-x^2$.

12. Με την αντικατάσταση

$$u = \log x, \quad v = \log y,$$

να μετασχηματισθούν οι παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} - 2xz_x + 2yz_y = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

(ii) $x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} - 3y^2 z_{yy} + xz_x - 3yz_y = 2\log(xy) + 4x$, $x > 0$, $y > 0$.

(iii) $xy\, z_{xy} - y^2 z_{yy} - 2xz_x + 2yz_y - 2z = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

13. Καθεμιά απ'τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις να μετασχηματισθεί σε μια εξίσωση της μορφής $w_{uv} = cw$ (c σταθερά):

(i) $z_{xx} - z_{yy} + 3z_x - 2z_y + z = 0$.

(ii) $3z_{xx} + 7z_{xy} + 2z_{yy} + z_y + z = 0$.

(iii) $z_{xx} + 3z_{xy} + 2z_{yy} - z_x + 3z_y + 2z = 0$.

14. Δίνεται η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xx} = az_y + bz_x - (b^2/4)z,$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές. Με μια κατάλληλη αλλαγή της άγνωστης συνάρτησης, να μετασχηματισθεί αυτή σε μια εξίσωση της μορφής $w_{xx} = aw_y$.

2. Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Στο Εδάφιο αυτό θ'ασχοληθούμε με την κυματική εξίσωση. Θα μελετήσουμε προβλήματα αρχικών τιμών (Θεωρήματα 9 και 10) και προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών (Θεωρήματα 11 και 12). Ειδικά, για τα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών θ'αναπτύξουμε τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Θα δώσουμε μερικά παραδείγματα και θα προτείνουμε ασκήσεις για λύση.

2.1. Προβλήματα αρχικών τιμών

Ας θεωρήσουμε την (μονοδιάστατη) κυματική εξίσωση

$$(W_0) \qquad z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0 \quad (c \text{ θετική σταθερά}).$$

Η εξίσωση (W_0) είναι υπερβολική και έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, μπορεί ν'αναχθεί στην πρώτη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης μ'ένα γραμμικό μετασχηματισμό· πιο συγκεκριμένα, ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$u = x+ct, \quad v = x-ct$$

ανάγει την (W_0) στην εξίσωση

$$z_{uv} = 0.$$

Έτσι (πρβλ. Παράδειγμα 2 του Εδαφίου 1), συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

Όλες οι λύσεις της εξίσωσης (W_0) δίνονται απ' τον τύπο

$$z(x,t) = F_1(x+ct)+F_2(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης.

Ας είναι p μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$ και q μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Όταν αναζητούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης (W_0) που πληρούν τις συνθήκες

$$(*) \quad z(x,0) = p(x), \ x \in \mathbb{R} \ \text{και} \ z_t(x,0) = q(x), \ x \in \mathbb{R},$$

τότε λέμε ότι έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών $(W_0)-(*)$. Λέμε επίσης ότι $(W_0)-(*)$ είναι ένα πρόβλημα του Cauchy. Οι συνθήκες (*) λέγονται αρχικές συνθήκες και οι συναρτήσεις p και q καλούνται αρχικά δεδομένα. Το παρακάτω Θεώρημα εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών $(W_0)-(*)$ έχει μια μοναδική λύση που εκφράζεται συναρτήσει των αρχικών δεδομένων p και q.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. Ας είναι p μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$ και q μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Τότε η κυματική εξίσωση (W_0) έχει μια μοναδική λύση z που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$(*) \quad z(x,0) = p(x), \ x \in \mathbb{R} \ \text{και} \ z_t(x,0) = q(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Η λύση αυτή δίνεται απ' τον τύπο (τύπος του D'Alembert)

$$z(x,t) = \frac{p(x+ct)+p(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(\tau)\,d\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(W_0)-(*)$ θα είναι της μορφής

$$z(x,t) = F_1(x+ct)+F_2(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου F_1 και F_2 θα είναι πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Η πρώτη απ'τις αρχικές συνθήκες (*) δίνει

$$p(x) = z(x,0) = F_1(x)+F_2(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή $F_1+F_2=p$, ενώ απ'τη δεύτερη απ'αυτές προκύπτει

$$q(x) = z_t(x,0) = cF_1'(x)-cF_2'(x) \text{ για όλα τα } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή $c(F_1'-F_2')=q$. Είναι λοιπόν

$$F_1'+F_2'=p' \text{ και } F_1'-F_2'=q/c$$

και επομένως

$$F_1'=\frac{1}{2}\left(p'+\frac{1}{c}q\right) \text{ και } F_2'=\frac{1}{2}\left(p'-\frac{1}{c}q\right).$$

'Αρα, για όλα τα $\xi\in\mathbb{R}$ είναι

$$F_1(\xi)=\frac{1}{2}p(\xi)+\frac{1}{2c}\int_0^{\xi}q(\tau)d\tau+c_1 \text{ και } F_2(\xi)=\frac{1}{2}p(\xi)-\frac{1}{2c}\int_0^{\xi}q(\tau)d\tau+c_2,$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. 'Ετσι, έχουμε

$$\begin{aligned} z(x,t) &= F_1(x+ct)+F_2(x-ct)=\frac{1}{2}p(x+ct)+\frac{1}{2}p(x-ct)\\ &\quad+\frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct}q(\tau)d\tau-\int_0^{x-ct}q(\tau)d\tau\right]+c_1+c_2\\ &=\frac{p(x+ct)+p(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}q(\tau)d\tau+c_1+c_2. \end{aligned}$$

Αλλά, είναι

$$p(x)=z(x,0)=p(x)+c_1+c_2,\ x\in\mathbb{R},$$

απ'όπου προκύπτει ότι $c_1+c_2=0$. Αποδείχθηκε λοιπόν ο τύπος του D'Alembert.

Αν (x_0,t_0) είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$, $t_0>0$, τότε απ'τον τύπο του D'Alembert φαίνεται ότι η τιμή της μοναδικής λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (W_0)-(*) στο σημείο αυτό εξαρτάται απ' τις τιμές των αρχικών δεδομένων p και q στο διάστημα $[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$· το διάστημα αυτό λέγεται διάστημα εξάρτησης στο σημείο (x_0,t_0) του προβλήματος αρχικών τιμών (W_0)-(*).

Ας είναι p και q όπως στο Θεώρημα 9. Τότε η μοναδική λύση z του προβλήματος αρχικών τιμών (W_0)-(*) εξαρτάται συνεχώς απ'τα αρχικά δεδομένα p και q, δηλαδή: Αν $\tilde{p}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$ και $\tilde{q}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, και $\tilde{z}$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $(W_0)-(\tilde{*})$, όπου

$$(\tilde{*}) \qquad \tilde{z}(x,0)=\tilde{p}(x),\ x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ \tilde{z}_t(x,0)=\tilde{q}(x),\ x\in\mathbb{R},$$

τότε, για κάθε $\varepsilon>0$ και κάθε διάστημα $[t_1,t_2]$, υπάρχει $\delta>0$ (που εξαρτάται μόνο απ'το ε και το διάστημα $[t_1,t_2]$) έτσι ώστε

$$|\tilde{z}(x,t)-z(x,t)|<\varepsilon \ \text{ για όλα τα } x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ t\in[t_1,t_2],$$

εφόσον

$$|\tilde{p}(x)-p(x)|<\delta \ \text{ και } \ |\tilde{q}(x)-q(x)|<\delta \ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$ και ένα οποιοδήποτε διάστημα $[t_1,t_2]$ και θέτουμε $\delta=\varepsilon/(1+t_0)$, όπου $t_0=\max\{|t_1|,|t_2|\}$. Τότε, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ και $t\in[t_1,t_2]$, έχουμε (με χρήση του τύπου του D'Alembert)

$$\begin{aligned}|z(x,t)-\tilde{z}(x,t)| &= \Big|\tfrac{1}{2}[\tilde{p}(x+ct)-p(x+ct)]+\tfrac{1}{2}[\tilde{p}(x-ct)-p(x-ct)]+\\ &\qquad +\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}[\tilde{q}(\tau)-q(\tau)]d\tau\Big|\\ &\leq \tfrac{1}{2}|\tilde{p}(x+ct)-p(x+ct)|+\tfrac{1}{2}|\tilde{p}(x-ct)-p(x-ct)|\\ &\qquad +\frac{1}{2c}\Big|\int_{x-ct}^{x+ct}|\tilde{q}(\tau)-q(\tau)|d\tau\Big|\\ &< \tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}\delta+\delta|t| = \delta(1+|t|)\leq\delta(1+t_0)=\varepsilon.\end{aligned}$$

Θα θεωρήσουμε, τώρα, την πιο γενική περίπτωση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$(W) \qquad z_{tt}-c^2z_{xx}=\Phi \ \text{ (c θετική σταθερά)},$$

όπου Φ είναι μια C^2 πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$. Θ'ασχοληθούμε με το πρόβλημα αρχικών τιμών $(W)-(*)$, όπου

$$(*) \qquad z(x,0)=p(x),\ x\in\mathbb{R} \ \text{ και } \ z_t(x,0)=q(x),\ x\in\mathbb{R}$$

και p,q είναι όπως στο Θεώρημα 9. Έτσι, θα γενικεύσουμε το Θεώρημα 9.

Η συνάρτηση

$$w(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\left[\int_{x-ct+cT}^{x+ct-cT}\Phi(X,T)\,dX\right]dT,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2$$

<u>είναι μια λύση της εξίσωσης</u> (W) <u>που πληροί τις αρχικές συνθήκες</u>

$$w(x,0)=0,\ x\in\mathbb{R}\ \ \underline{\text{και}}\ \ w_t(x,0)=0,\ x\in\mathbb{R}.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Για όλα τα $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ παίρνουμε (όπου $D_1\Phi$ παριστάνει τη μερική παράγωγο της Φ ως προς την πρώτη μεταβλητή της):

$$w_t(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-ct+cT}^{x+ct-cT}\Phi(X,T)\,dX\right]dT=\frac{1}{2}\int_0^t[\Phi(x+ct-cT,T)+$$
$$+\Phi(x-ct+cT,T)]dT,$$

$$w_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\Phi(x+ct-cT,T)+\Phi(x-ct+cT,T)]\right\}dT$$

$$=\frac{c}{2}\int_0^t[D_1\Phi(x+ct-cT,T)-D_1\Phi(x-ct+cT,T)]dT,$$

$$w_x(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_{x-ct+cT}^{x+ct-cT}\Phi(X,T)\,dX\right]dT=\frac{1}{2c}\int_0^t[\Phi(x+ct-cT,T)-$$
$$-\Phi(x-ct+cT,T)]dT,$$

$$w_{xx}(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\Phi(x+ct-cT,T)-\Phi(x-ct+cT,T)]\right\}dT$$

$$=\frac{1}{2c}\int_0^t[D_1\Phi(x+ct-cT,T)-D_1\Phi(x-ct+cT,T)]dT$$

και έτσι είναι αληθής ο ισχυρισμός μας.

Συνδυάζοντας τώρα το παραπάνω συμπέρασμα με το Θεώρημα 9, καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 10</u>. <u>Ας είναι</u> p <u>μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο</u> $\mathbb{R}$ <u>και</u> q <u>μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο</u> $\mathbb{R}$. <u>Τότε η εξίσωση</u> (W) <u>έχει μια μοναδική λύση</u> z <u>που πληροί τις αρχικές συνθήκες</u>

$$(*)\qquad z(x,0)=p(x),\ x\in\mathbb{R}\ \ \underline{\text{και}}\ \ z_t(x,0)=q(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

<u>Η λύση αυτή δίνεται απ'τον τύπο</u>

$$z(x,t)=\frac{p(x+ct)+p(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}q(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2c}\int_0^t\left[\int_{x-ct+cT}^{x+ct-cT}\Phi(X,T)\,dX\right]dT$$

<u>για όλα τα</u> $(x,t)\in\mathbb{R}^2$.

<u>Αν</u> p <u>και</u> q <u>είναι όπως στο Θεώρημα</u> 10, <u>η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών</u> (W)-(*) <u>εξαρτάται συνεχώς απ'τα αρχικά</u>

δεδομένα p και q. Πραγματικά· η μοναδική λύση του (W)-(*) είναι $z = z_0 + w$, όπου z_0 είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (W_0)-(*) [(W_0) είναι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της (W)] και w είναι η λύση της (W) που δόθηκε παραπάνω. Έτσι, η z εξαρτάται συνεχώς απ'τις p και q, επειδή το ίδιο συμβαίνει για την z_0 και αφού η w δεν εξαρτάται απ'τις συναρτήσεις p και q.

2.2. Προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Ας είναι c και ℓ δύο θετικές σταθερές, f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0,\ell]$, και m_1 και m_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στον ημιάξονα $[0,\infty)$. Τότε το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνάρτησης z ορισμένης στο σύνολο $\bar{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$ που να είναι C^2 στον τόπο $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \ell, t > 0\}$ και να πληροί τις συνθήκες

$$(\Pi) \quad \begin{cases} z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0, \; 0 < x < \ell, \; t > 0 & (a) \\ z(x,0) = f(x), \; 0 \leq x \leq \ell & (b) \\ z_t(x,0) = g(x), \; 0 \leq x \leq \ell & (c) \\ z(0,t) = m_1(t), \; t \geq 0 & (d) \\ z(\ell,t) = m_2(t), \; t \geq 0, & (e) \end{cases}$$

λέμε ότι είναι ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Η συνθήκη (a) εκφράζει ότι ο περιορισμός της συνάρτησης z στον τόπο Ω είναι μια λύση της εξίσωσης

$$z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Οι συνθήκες (b) και (c) λέγονται αρχικές συνθήκες, ενώ οι συνθήκες (d) και (e) καλούνται συνοριακές συνθήκες.

Για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών έχουμε το ακόλουθο θεώρημα σχετικά με το μονοσήμαντο των λύσεων αυτού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (Π) έχει το πολύ μια λύση z που να είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι z^* και $\tilde{z}$ δύο λύσεις του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (Π) που είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$. Θέτουμε $z = z^* - \tilde{z}$ και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση z είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$ και επιπλέον αυτή είναι μια λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} z_{tt}-c^2z_{xx}=0, & 0<x<\ell,\ t>0 \\ z(x,0)=z_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq \ell \\ z(0,t)=z(\ell,t)=0, & t\geq 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\{c^2[z_x(x,t)]^2+[z_t(x,t)]^2\}dx,\ t\geq 0.$$

Τότε, για όλα τα $t\geq 0$, έχουμε

$$\frac{dI}{dt}(t)=\int_0^{\ell}[c^2z_x(x,t)z_{xt}(x,t)+z_t(x,t)z_{tt}(x,t)]dx$$

$$=\int_0^{\ell}[c^2z_x(x,t)z_{xt}(x,t)+z_t(x,t)c^2z_{xx}(x,t)]dx$$

$$=c^2\int_0^{\ell}(z_xz_t)_x(x,t)dx=c^2[z_x(\ell,t)z_t(\ell,t)-z_x(0,t)z_t(0,t)].$$

Αλλά, απ'τη συνθήκη $z(0,t)=0$ για $t\geq 0$ προκύπτει ότι $z_t(0,t)=0$, $t\geq 0$. Όμοια, η συνθήκη $z(\ell,t)=0$ για $t\geq 0$ δίνει $z_t(\ell,t)=0, t\geq 0$. Έτσι, είναι

$$\frac{dI}{dt}(t)=0 \text{ για όλα τα } t\geq 0,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση I είναι σταθερή. Επειδή $z(x,0)=0$ για $0\leq x\leq \ell$, είναι $z_x(x,0)=0$, $0\leq x\leq \ell$. Εξάλλου, έχουμε $z_t(x,0)=0$ για $0\leq x\leq \ell$. Επομένως, παίρνουμε για κάθε $t\geq 0$

$$I(t)=I(0)=\int_0^{\ell}\{c^2[z_x(x,0)]^2+[z_t(x,0)]^2\}dx=0,$$

δηλαδή

$$I(t)=0 \text{ για όλα τα } t\geq 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$z_x(x,t)=z_t(x,t)=0 \text{ για κάθε } (x,t)\in\overline{\Omega}$$

και επομένως η συνάρτηση z είναι σταθερή. Έτσι, επειδή $z(x,0)=0$ για $0\leq x\leq \ell$, η z είναι η μηδενική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, που σημαίνει ότι $z^*=\tilde{z}$.

Στο υπόλοιπο μέρος αυτής της παραγράφου, θ'ασχοληθούμε με το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$(P)\quad \begin{cases} z_{tt}-c^2 z_{xx}=0,\ 0<x<\ell,\ t>0 & \text{(i)}\\ z(x,0)=f(x),\ 0\leq x\leq \ell & \text{(ii)}\\ z_t(x,0)=g(x),\ 0\leq x\leq \ell & \text{(iii)}\\ z(0,t)=z(\ell,t)=0,\ t\geq 0 & \text{(iv)}\end{cases}$$

όπου c <u>και</u> ℓ <u>είναι θετικές σταθερές</u>, <u>και</u> f <u>και</u> g <u>είναι πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα</u> $[0,\ell]$.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (P) θα εφαρμόσουμε μια πολύ χρήσιμη μέθοδο, τη <u>μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών</u>.

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (P) έχει μια λύση z της μορφής

$$z(x,t)=X(x)T(t),\ 0\leq x\leq \ell,\ t\geq 0,$$

όπου $X\neq 0$ και $T\neq 0$. Τότε η συνθήκη (i) γίνεται

$$X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}-c^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}=0,\ 0<x<\ell,\ t>0$$

και έτσι, θέτοντας $V=\{(x,t) : 0<x<\ell, t>0,\ X(x)\neq 0,\ T(t)\neq 0\}$, παίρνουμε

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}\ \text{για}\ (x,t)\in V.$$

Το πρώτο μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ανεξάρτητο του t και το δεύτερο μέλος αυτής είναι ανεξάρτητο του x. Έτσι, θα υπάρχει μια σταθερά λ τέτοια ώστε για κάθε $(x,t)\in V$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=\lambda$$

ή

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda X(x)=0\ \text{και}\ \frac{d^2T(t)}{dt^2}-\lambda c^2T(t)=0.$$

Παρατηρούμε ότι, αν οι τελευταίες δύο ισότητες ισχύουν για όλα τα (x,t) με $0<x<\ell$ και $t>0$, τότε η συνθήκη (i) πληρούται, αφού για $0<x<\ell$ και $t>0$ έχουμε

$$z_{tt}(x,t)-c^2z_{xx}(x,t)=X(x)\frac{d^2T(t)}{dt^2}-c^2T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

$$= X(x)[\lambda c^2 T(t)] - c^2 T(t)[\lambda X(x)] = 0.$$

Ακόμα, παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες (iv) γίνονται

$$X(0)T(t) = X(\ell)T(t) = 0, \quad t \geqq 0$$

ή, αφού $T \neq 0$,

$$X(0) = X(\ell) = 0.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στο να θεωρήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών (προβλήματα ιδιοτιμών έχουν μελετηθεί στην Παράγραφο 5.2 του Κεφαλαίου III)

$$(\varphi) \quad \frac{d^2X(x)}{dx^2} - \lambda X(x) = 0, \quad x \in [0,\ell]; \; X(0) = X(\ell) = 0$$

καθώς και την διαφορική εξίσωση

$$(\sigma(\lambda)) \qquad \frac{d^2T(t)}{dt^2} - \lambda c^2 T(t) = 0, \quad t \geqq 0.$$

Είναι φανερό ότι, αν λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του προβλήματος ιδιοτιμών (φ), $X_0(x)$, $0 \leqq x \leqq \ell$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση αυτού αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ_0 και $T_0(t)$, $t \geqq 0$ είναι μια μη μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(\sigma(\lambda_0))$, τότε η συνάρτηση $z_0(x,t) = X_0(x)T_0(t)$, $0 \leqq x \leqq \ell$, $t \geqq 0$ πληροί τις συνθήκες (i) και (iv) του προβλήματός μας (P).

Ας επιλύσουμε, τώρα, το πρόβλημα ιδιοτιμών (φ). Η διαφορική εξίσωση έχει τη γενική λύση

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{αν } \lambda > 0 \\ A + Bx, & \text{αν } \lambda = 0 \\ A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x), & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

για $x \in [0,\ell]$, όπου A και B είναι αυθαίρετες σταθερές. Οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\begin{cases} A+B = 0 \text{ και } Ae^{\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{-\sqrt{\lambda}\ell} = 0, & \text{αν } \lambda < 0 \\ A = 0 \text{ και } A + B\ell = 0, & \text{αν } \lambda = 0 \\ A = 0 \text{ και } A\cos(\sqrt{-\lambda}\ell) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0, & \text{αν } \lambda < 0. \end{cases}$$

Για $\lambda \geqq 0$, παίρνουμε $A = B = 0$ και άρα $X(x) = 0$, $x \in [0,\ell]$. Θεωρούμε, λοιπόν, την περίπτωση $\lambda < 0$. Τότε $A = 0$ και $B\sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0$. Είναι $B \neq 0$, αφού για $B = 0$ έχουμε τη μηδενική λύση, και έτσι

$$\sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0,$$

δηλαδή

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\ell} \text{ για κάποιο θετικό ακέραιο } n.$$

Επομένως, η ακολουθία ιδιοτιμών του (φ) είναι

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1,2,\ldots$$

και, αν $(B_n)_{n=1,2,\ldots}$ είναι μια αυθαίρετη ακολουθία μη μηδενικών σταθερών, τότε

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in [0,\ell]; \; n = 1,2,\ldots$$

είναι μια ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος ιδιοτιμών (φ). Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι, για τυχόντα θετικό ακέραιο n, οι μη μηδενικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(\sigma(\lambda_n)) \qquad \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0$$

δίνονται απ'τον τύπο

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right), \quad t \geq 0,$$

όπου C_n και D_n είναι αυθαίρετες σταθερές με $|C_n|+|D_n| > 0$, και επομένως η συνάρτηση

$$z_n(x,t) = X_n(t)T_n(t) = B_n\left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)\left[C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right]$$

$$= \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \; t \geq 0$$

(όπου θέσαμε $a_n = B_n C_n$ και $b_n = B_n D_n$, οπότε $|a_n|+|b_n| > 0$) πληροί τις συνθήκες (i) και (iv) του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (P). Για τυχούσες, λοιπόν, ακολουθίες σταθερών $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ και $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ έχουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$z_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \; t \geq 0,$$

κάθε όρος της οποίας πληροί τις συνθήκες (i) και (iv) του προβλήματος (P). (Αν, για κάποιο θετικό ακέραιο n, είναι $a_n = b_n = 0$, τότε $z_n(x,t) = 0$ για όλα τα (x,t) με $0 \leq x \leq \ell$ και $t \geq 0$, και επομένως η συνάρτηση z_n πληροί και σ'αυτή την περίπτωση τις συνθήκες (i) και (iv)).

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell}\, t\right)\right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \; t \geq 0,$$

όπου a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ είναι σταθερές, και ας υποθέσουμε ότι αυτή συγκλίνει προς μια συνάρτηση $z(x,t)$, $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$. Η συνάρτηση z πληροί τη συνθήκη (ii) του προβλήματος (P) αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Επίσης, με την προϋπόθεση ότι η z έχει συνεχή μερική παράγωγο ως προς t στο σύνολο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell,\ t \geq 0\}$ και ότι αυτή προκύπτει με παραγώγιση όρο προς όρο της σειράς που ορίζει την z, έχουμε ότι η συνθήκη (iii) του (P) πληρούται αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell} = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Μια <u>πιθανή</u> λύση, λοιπόν, του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (P) είναι η συνάρτηση z, όπου οι σταθερές a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ πληρούν τις παραπάνω σχέσεις.

Μετά απ'την παραπάνω ανάλυση, δίνουμε το ακόλουθο θεώρημα για την επίλυση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (P).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 12</u>. <u>Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση</u> f <u>έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο διάστημα</u> $[0,\ell]$ <u>και</u> $f(0) = f(\ell) = f''(0) = f''(\ell) = 0$, <u>και ότι η</u> g <u>έχει συνεχή παράγωγο στο</u> $[0,\ell]$ <u>και</u> $g(0) = g(\ell) = 0$. <u>Τότε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών</u> (P) <u>έχει μια μοναδική λύση</u> z <u>που είναι</u> C^2 <u>στο</u> $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$. <u>Η λύση αυτή δίνεται απ'τον τύπο</u>

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right)\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega},$$

<u>όπου</u>

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \ \text{ και } \ b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ για } x \in [0,\ell], \quad \tilde{f}(x) = -f(-x) \text{ για } x \in (-\ell,0).$$

Η συνάρτηση $\tilde{f}$ είναι περιττή, αφού $f(0) = f(\ell) = 0$. Ακόμα, η $\tilde{f}$ έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, επειδή η συνάρτηση f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,\ell]$ και $f''(0) = f''(\ell) = 0$. Η σειρά Fourier της συνάρτησης $\tilde{f}$ είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου για $n = 1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \tilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Α (για την κατά σημείο σύγκλιση των σειρών Fourier), θα έχουμε

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $g(0) = g(\ell) = 0$ και θεωρούμε την περιττή 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{g}(x) = g(x) \text{ για } x \in [0,\ell], \quad \tilde{g}(x) = -g(-x) \text{ για } x \in (-\ell,0).$$

Αυτή έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, αφού η g έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0,\ell]$. Η σειρά Fourier της $\tilde{g}$ είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου

$$b_n^* = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{g}(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Το Θεώρημα Α εξασφαλίζει ότι

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \sin \frac{n\pi x}{\ell} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας λοιπόν

$$b_n = \frac{\ell}{n\pi c}\, b_n^* = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots),$$

παίρνουμε

$$\tilde{g}(x) = \frac{\pi c}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 9, η κυματική εξίσωση (W_0) έχει μια μοναδική λύση $\tilde{z}$ που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$\tilde{z}(x,0) = \tilde{f}(x), \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \tilde{z}_t(x,0) = \tilde{g}(x), \ x \in \mathbb{R}$$

και μάλιστα η λύση αυτή δίνεται απ'τον τύπο του D' Alembert

$$\tilde{z}(x,t) = \frac{\tilde{f}(x+ct)+\tilde{f}(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(\tau)\, d\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Με χρήση του Θεωρήματος Ε (για την όρο προς όρο ολοκλήρωση των σειρών Fourier), για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\tilde{z}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi(x+ct)}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\pi c}{\ell} n b_n \sin \frac{n\pi\tau}{\ell}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sin \frac{n\pi(x+ct)}{\ell} + \sin \frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\cos \frac{n\pi(x+ct)}{\ell} + \cos \frac{n\pi(x-ct)}{\ell} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right).$$

'Αρα, είναι

$$\tilde{z}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{\ell} t\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Τώρα, ας είναι z ο περιορισμός της συνάρτησης $\tilde{z}$ στο σύνολο $\bar{\Omega}$. Τότε η συνάρτηση z είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$ και πληροί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του προβλήματος (P). Επιπλέον, αμέσως διαπιστώνουμε ότι αυτή πληροί και τη συνθήκη (iv). Λαμβάνοντας υπόψη και το Θεώρημα 10, μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση z είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (P), που είναι C^2 στο $\bar{\Omega}$.

2.3. Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $z_{tt} - z_{xx} = 0$; $z(x,0) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $z_{tt} - 4z_{xx} = 0$; $z(x,0) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>. (i) Είναι (Θεώρημα 9)

$$z(x,t) = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tau \, d\tau = \frac{3(x+t)^2 + (x-t)^2}{4} = x^2 + xt + t^2$$

για όλα τα $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) 'Εχουμε (Θεώρημα 9)

$$z(x,t) = \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \tau^2 d\tau = \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} +$$

$$+ \frac{(x+2t)^3 - (x-2t)^3}{4}$$

$$= \sin x \cos 2t + 3x^2 t + 4t^3, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $z_{tt} - z_{xx} = 1$; $z(x,0) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $z_{tt} - 4z_{xx} = xt$; $z(x,0) = x$, $x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. (i) Σύμφωνα με το Θεώρημα 10, παίρνουμε για $(x,t)\in\mathbb{R}^2$

$$z(x,t)=\frac{\sin(x+t)+\sin(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tau\,d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_{x-t+T}^{x+t-T}dX\right)dT$$

$$=\sin x\cos t+xt+\int_0^t(t-T)\,dT=\sin x\cos t+xt+\frac{t^2}{2}\,.$$

(ii) Για κάθε $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, είναι (Θεώρημα 10)

$$z(x,t)=\frac{(x+2t)+(x-2t)}{2}+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\cos\tau\,d\tau+\frac{1}{4}\int_0^t\left(\int_{x-2t+2T}^{x+2t-2T}XT\,dX\right)dT$$

$$=x+\cos x\sin t\cos t+x\int_0^t T(t-T)\,dT$$

$$=x+\cos x\sin t\cos t+\frac{1}{6}xt^3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} z_{tt}-4z_{xx}=0, & 0<x<\pi,\ t>0\\ z(x,0)=\sin 2x, & 0\leq x\leq\pi\\ z_t(x,0)=x(\pi-x), & 0\leq x\leq\pi\\ z(0,t)=z(\pi,t)=0, & t\geq 0.\end{cases}$$

Λύση. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών που δόθηκε είναι της μορφής (P) με $c=2$, $\ell=\pi$ και

$$f(x)=\sin 2x\ \text{ για } 0\leq x\leq\pi,\quad g(x)=x(\pi-x)\ \text{ για } 0\leq x\leq\pi.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο διάστημα $[0,\pi]$ και είναι τέτοια ώστε $f(0)=f(\pi)=f''(0)=$ $=f''(\pi)=0$. Επίσης, η g πληροί τις σχέσεις $g(0)=g(\pi)=0$ και έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,\pi]$. Σύμφωνα, λοιπόν, με το Θεώρημα 12, το πρόβλημά μας έχει μια μοναδική λύση z που είναι C^2 στο $\overline{\Omega}=\{(x,t):$ $0\leq x\leq 0, t\geq 0\}$. Αυτή δίνεται απ'τον τύπο

$$z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nt+b_n\sin 2nt)\sin nx,\quad (x,t)\in\overline{\Omega},$$

όπου

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\sin nx\,dx\ \text{ και }\ b_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\ldots).$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1 \text{ και } a_n = 0 \quad (n = 3,4,\dots)$$

και

$$b_{2n} = 0 \ (n = 1,2,\dots) \text{ και } b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \quad (n = 1,2,\dots).$$

'Αρα, για όλα τα $(x,t) \in \overline{\Omega}$ είναι

$$z(x,t) = \cos 4t \sin 2x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^4} \sin 2(2n-1)t \sin(2n-1)x.$$

2.4. Ασκήσεις

1. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $z_{tt} - z_{xx} = 0;\ z(x,0) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$.

(ii) $z_{tt} - z_{xx} = 0;\ z(x,0) = \log(1+x^2),\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

(iii) $z_{tt} - \frac{1}{2} z_{xx} = 0;\ z(x,0) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

(iv) $z_{tt} - \frac{1}{2} z_{xx} = 0;\ z(x,0) = xe^x,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

2. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $z_{tt} - z_{xx} = e^x;\ z(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

(ii) $z_{tt} - z_{xx} = \sin x;\ z(x,0) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = 1+x,\ x \in \mathbb{R}$.

(iii) $z_{tt} - 2z_{xx} = x+3t;\ z(x,0) = 2,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = x^2+x,\ x \in \mathbb{R}$.

(iv) $z_{tt} - 3z_{xx} = e^{x+t};\ z(x,0) = x,\ x \in \mathbb{R}$ και $z_t(x,0) = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

3. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ z(x,0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ z_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ z(0,t) = z(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} z_{tt} - 4z_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ z(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ z_t(x,0) = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ z(0,t) = z(1,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ z(x,0) = \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi \\ z_t(x,0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ z(0,t) = z(\pi,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$(\text{iv})\quad \begin{cases} z_{tt}-z_{xx}=0, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ z(x,0)=\sin^3 x, & 0\leq x\leq\pi \\ z_t(x,0)=x(\pi-x), & 0\leq x\leq\pi \\ z(0,t)=z(\pi,t)=0, & t\geq 0. \end{cases}$$

$$(\text{v})\quad \begin{cases} z_{tt}-9z_{xx}=0, & 0<x<2,\ t>0 \\ z(x,0)=x^3(2-x)^3, & 0\leq x\leq 2 \\ z_t(x,0)=\sin(\pi x/2), & 0\leq x\leq 2 \\ z(0,t)=z(2,t)=0, & t\geq 0. \end{cases}$$

3. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Εδώ θ'ασχοληθούμε με την (μονοδιάστατη) εξίσωση θερμότητας. Θα δώσουμε την Αρχή μεγίστου-ελαχίστου (Θεώρημα 13) και θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Για το πρόβλημα αυτό, θα δώσουμε ένα συμπέρασμα (Θεώρημα 14) για το μονοσήμαντο των λύσεών του και, σε μια ειδική περίπτωση, θα δώσουμε τη λύση αυτού (Θεώρημα 15). Θα παρατεθούν μερικά παραδείγματα και θα δοθούν ορισμένες ασκήσεις για λύση.

3.1. Η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου. Ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

Ένα σημαντικό συμπέρασμα για την (μονοδιάστατη) εξίσωση θερμότητας

$$(\text{H})\qquad z_t-kz_{xx}=0 \quad (k \text{ θετική σταθερά})$$

είναι το παρακάτω Θεώρημα, γνωστό ως Αρχή μεγίστου-ελαχίστου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 (Αρχή μεγίστου-ελαχίστου). Ας θεωρήσουμε τον τόπο

$$Q=\{(x,t)\ :\ 0<x<\ell,\ 0<t<\tau\},$$

όπου ℓ και τ είναι θετικές σταθερές, και ας είναι

$$\overline{Q}=\{(x,t)\ :\ 0\leq x\leq\ell, 0\leq t\leq\tau\} \text{ και } Q^*=\{(x,t)\ :\ 0<x<\ell, 0<t\leq\tau\}.$$

Ας είναι, ακόμα, z μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\overline{Q}$, η οποία είναι C^2 στο Q^* και τέτοια ώστε

$$z_t(x,t)-kz_{xx}(x,t)=0 \text{ για όλα τα } (x,t)\in Q^*.$$

<u>Τότε η μεγίστη τιμή M και η ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης z στο $\overline{Q}$ λαμβάνονται στο σύνολο $\overline{Q}-Q^*$.</u>

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή της z στο $\overline{Q}$ λαμβάνεται στο $\overline{Q}-Q^*$, γιατί τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το συμπέρασμα αυτό για τη συνάρτηση $-z$, για να διαπιστώσουμε ότι και η ελάχιστη τιμή της z στο $\overline{Q}$ λαμβάνεται επίσης στο σύνολο $\overline{Q}-Q^*$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση z είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $\overline{Q}$ και συμβολίζουμε με M τη μεγίστη τιμή της z στο $\overline{Q}$. Επίσης, επειδή το σύνολο $\overline{Q}-Q^*$ είναι και αυτό συμπαγές, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μέγιστη τιμή M^* της z στο $\overline{Q}-Q^*$. Είναι φανερό ότι $M^* \leq M$. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι $M^* = M$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $M^* < M$. Τότε υπάρχει ένα σημείο $(x_0,t_0) \in Q^*$ τέτοιο ώστε

$$z(x_0,t_0) = M.$$

Ορίζουμε, στη συνέχεια, τη συνάρτηση

$$\tilde{z}(x,t_0) = z(x,t) + \frac{M-M^*}{2\ell^2}(x-x_0)^2, \quad (x,t) \in \overline{Q}$$

και έχουμε $\tilde{z}(x_0,t_0) = z(x_0,t_0) = M$ και

$$\tilde{z}(x,t) \leq M^* + \frac{M-M^*}{2\ell^2}\ell^2 = M^* + \frac{M-M^*}{2} = \frac{M+M^*}{2} < M \text{ για } (x,t) \in \overline{Q}-Q^*.$$

'Ετσι, η μέγιστη τιμή Λ της συνάρτησης $\tilde{z}$ στο $\overline{Q}$ λαμβάνεται στο σύνολο Q^*. Ας είναι $(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \in Q^*$ με $\Lambda = \tilde{z}(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0)$. Τότε έχουμε

$$\begin{cases} \tilde{z}_t(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) = 0 \text{ και } \tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \leq 0, \text{ αν } (\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \in Q \\ \tilde{z}_t(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \geq 0 \text{ και } \tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \leq 0, \text{ αν } (\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \in Q^*-Q \end{cases}$$

και επομένως πάντοτε είναι

$$\tilde{z}_t(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) - k\tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \geq 0.$$

Αλλά, απ'την άλλη μεριά, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) - k\tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) &= [z_t(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) - kz_{xx}(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0)] - k\frac{M-M^*}{\ell^2} \\ &= -k\frac{M-M^*}{\ell^2} < 0, \end{aligned}$$

και έτσι φθάνουμε σ'ένα άτοπο.

Ας είναι

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \ell, t > 0\} \text{ και } \overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\},$$

όπου ℓ είναι μια θετική σταθερά. Ακόμα, ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ell]$ και g_1, g_2 δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στον ημιάξονα $[0,\infty)$ με $g_1(0) = f(0)$ και $g_2(0) = f(\ell)$. Τότε το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνεχούς συνάρτησης z στο $\overline{\Omega}$, της οποίας ο περιορισμός στο Ω να είναι μια λύση στον τόπο Ω της εξίσωσης θερμότητας (H) και η οποία να πληροί τις συνθήκες

$$(*)\qquad \begin{cases} z(x,0) = f(x), \ 0 \leq x \leq \ell & \text{(a)} \\ z(0,t) = g_1(t), \ t \geq 0 & \text{(b)} \\ z(\ell,t) = g_2(t), \ t \geq 0, & \text{(c)} \end{cases}$$

λέμε ότι είναι ένα <u>πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών</u>. Η συνθήκη (a) λέγεται <u>αρχική συνθήκη</u>, ενώ οι συνθήκες (b) και (c) καλούνται <u>συνοριακές συνθήκες</u>. Το πρόβλημα αυτό έχει το πολύ μια λύση, όπως εξασφαλίζει το παρακάτω θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 14</u>. <u>Ας θεωρήσουμε τον τόπο</u> $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \ell, t > 0\}$, <u>όπου</u> ℓ <u>είναι μια θετική σταθερά, και ας είναι</u> f <u>μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο</u> $[0,\ell]$ <u>και</u> g_1, g_2 <u>δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο</u> $[0,\infty)$ <u>με</u> $g_1(0) = f(0)$, $g_2(0) = f(\ell)$. <u>Τότε υπάρχει το πολύ μια συνεχής συνάρτηση</u> z <u>στο</u> $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$, <u>η οποία να είναι μια λύση στο</u> Ω <u>της εξίσωσης</u> (H) <u>και να πληροί τις συνθήκες</u> (*).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι z^* και $\tilde{z}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $\overline{\Omega}$, οι οποίες είναι λύσεις στο Ω της (H) και πληρούν τις συνθήκες (*), και ας θέσουμε $z = z^* - \tilde{z}$. Τότε η z είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, που είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (H) και πληροί τις συνθήκες

$$z(x,0) = 0, \ 0 \leq x \leq \ell \ \text{και} \ z(0,t) = z(\ell,t) = 0, \ t \geq 0.$$

Θεωρούμε, στη συνέχεια, ένα τυχόντα αριθμό $\tau > 0$ και θέτουμε

$$\overline{Q}_\tau = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq \tau\} \ \text{και} \ Q^*_\tau = \{(x,t) : 0 < x < \ell, 0 < t \leq \tau\}.$$

Παρατηρούμε ότι η z είναι συνεχής στο $\overline{Q}_\tau$. Επίσης, η z είναι C^2 στο Q^*_τ και τέτοια ώστε $z_t(x,t) - kz_{xx}(x,t) = 0$ για $(x,t) \in Q^*_\tau$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 13, η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της z στο $\overline{Q}_\tau$ λαμβάνονται στο σύνολο

$$\overline{Q}_\tau - Q^*_\tau = \{(x,0) : 0 \leq x \leq \ell\} \cup \{(0,t) : 0 \leq t \leq \tau\} \cup \{(\ell,t) : 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Αλλά, είναι $z(x,t) = 0$ για $(x,t) \in \overline{Q}_\tau - Q^*_\tau$. Επομένως, $z(x,t) = 0$ για όλα τα $(x,t)\in\overline{Q}_\tau$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\tau>0$ είναι

$$z(x,t)=0,\ \ 0\leq x\leq \ell,\ \ 0\leq t\leq \tau.$$

Άρα, έχουμε

$$z(x,t)=0 \text{ για όλα τα } 0\leq x\leq \ell,\ t\geq 0,$$

που σημαίνει ότι $z^*=\tilde{z}$.

Ας είναι $\ell,\Omega,\overline{\Omega},f,g_1$ και g_2 όπως στο Θεώρημα 14 και z μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (Η) και πληροί τις συνθήκες (*). Τότε η z εξαρτάται συνεχώς απ' τις συναρτήσεις f και g_1,g_2, δηλαδή: Αν $\tilde{f}$ είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $[0,\ell]$ και $\tilde{g}_1,\tilde{g}_2$ είναι δύο συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $[0,\infty)$ με $\tilde{g}_1(0)=\tilde{f}(0)$, $\tilde{g}_2(0)=\tilde{f}(\ell)$, και $\tilde{z}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι μια λύση στο Ω της (Η) και πληροί τις συνθήκες

$$(\tilde{*})\qquad \begin{cases} \tilde{z}(x,0)=\tilde{f}(x),\ \ 0\leq x\leq \ell \\ \tilde{z}(0,t)=\tilde{g}_1(t),\ \ t\geq 0 \\ \tilde{z}(\ell,t)=g_2(t),\ \ t\geq 0, \end{cases}$$

τότε για κάθε $\varepsilon>0$ είναι

$$|z(x,t)-\tilde{z}(x,t)|<\varepsilon \text{ για όλα τα } (x,t)\in\overline{\Omega},$$

εφόσον

$$|f(x)-\tilde{f}(x)|<\varepsilon \text{ για } 0\leq x\leq \ell,\ \ |g_1(t)-\tilde{g}_1(t)|<\varepsilon \text{ για } t\geq 0 \text{ και}$$
$$|g_2(t)-\tilde{g}_2(t)|<\varepsilon \text{ για } t\geq 0.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Θεωρούμε ένα θετικό αριθμό ε και υποθέτουμε ότι

$$|F(x)|<\varepsilon \text{ για } 0\leq x\leq \ell,\ \ |G_1(t)|<\varepsilon \text{ για } t\geq 0 \text{ και } |G_2(t)|<\varepsilon \text{ για } t\geq 0,$$

όπου $F=f-\tilde{f}$, $G_1=g_1-\tilde{g}_1$ και $G_2=g_2-\tilde{g}_2$. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $u=z-\tilde{z}$ είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, είναι μια λύση στο Ω της (Η) και πληροί τις συνθήκες

$$\begin{cases} u(x,0)=F(x),\ \ 0\leq x\leq \ell \\ u(0,t)=G_1(t),\ \ t\geq 0 \\ u(\ell,t)=G_2(t),\ \ t\geq 0. \end{cases}$$

Ας είναι τ ένας θετικός αριθμός. Όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος 14, διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της u στο $\{(x,t):0\leq x\leq \ell,\ 0\leq t\leq \tau\}$ λαμβάνονται στο σύνολο

$$\{(x,0) : 0 \le x \le \ell\} \cup \{(0,t) : 0 \le t \le \tau\} \cup \{(\ell,t) : 0 \le t \le \tau\}$$

και επομένως

$$-\varepsilon < u(x,t) < \varepsilon \text{ ή } |u(x,t)| < \varepsilon \text{ για } 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le \tau.$$

Αυτό όμως ισχύει για κάθε $\tau > 0$ και άρα

$$|u(x,t)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } 0 \le x \le \ell,\ t \ge 0.$$

Μια άμεση συνέπεια του παραπάνω συμπεράσματος είναι η ακόλουθη:

Ας είναι ℓ, Ω και $\overline{\Omega}$ όπως στο Θεώρημα 14. Επίσης, ας είναι $(f_n)_{n=1,2,...}$ μια ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,\ell]$ και $(g_{1n})_{n=1,2,...}$, $(g_{2n})_{n=1,2,...}$ δύο ακολουθίες συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,\infty)$ με $g_{1n}(0) = f_n(0)$, $g_{2n}(0)=f_n(\ell)$ $(n = 1,2,...)$. Ακόμα, για κάθε θετικό ακέραιο n, ας είναι z_n μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (H) και πληροί τις συνθήκες

$$z_n(x,0) = f_n(x) \text{ για } 0 \le x \le \ell \text{ και } z_n(0,t) = g_{1n}(t),\ z_n(\ell,t) = g_{2n}(t) \text{ για } t \ge 0.$$

Αν η ακολουθία $(f_n)_{n=1,2,...}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\ell]$ και οι ακολουθίες $(g_{1n})_{n=1,2,...}$, $(g_{2n})_{n=1,2,...}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$, τότε η ακολουθία $(z_n)_{n=1,2,...}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε, τώρα, τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, για να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση z στο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \le x \le \ell, t \ge 0\}$ (ℓ θετική σταθερά), η οποία να είναι μια λύση στον τόπο $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \ell, t > 0\}$ της εξίσωσης θερμότητας (H) και να πληροί τις συνθήκες

$$\begin{cases} z(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \ell & \text{(i)} \\ z(0,t) = 0,\ t \ge 0 & \text{(ii)} \\ z(\ell,t) = 0,\ t \ge 0, & \text{(iii)} \end{cases}$$

όπου f είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ell]$ με $f(0) = f(\ell) = 0$. Η z θα είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 14, η μοναδική τέτοια συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε ότι η ζητούμενη συνάρτηση z είναι της μορφής $z(x,t) = X(x)T(t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$, όπου $X \neq 0$ και $T \neq 0$. Τότε έχουμε

$$X(x)\,\frac{dT(t)}{dt} - kT(t)\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} = 0, \quad (x,t)\in\Omega$$

και έτσι, αν θέσουμε $V=\{(x,t)\in\Omega : X(x)\neq 0, T(t)\neq 0\}$, θα είναι

$$\frac{1}{X(x)}\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{k}\,\frac{1}{T(t)}\,\frac{dT(t)}{dt} \quad \text{για } (x,t)\in V.$$

Στην ισότητα αυτή το πρώτο μέλος είναι ανεξάρτητο του t και το δεύτερο μέλος είναι ανεξάρτητο του x, και επομένως υπάρχει μια σταθερά λ, τέτοια ώστε για $(x,t)\in V$

$$\frac{1}{X(x)}\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{k}\,\frac{1}{T(t)}\,\frac{dT(t)}{dt} = \lambda$$

ή

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - \lambda X(x) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dT(t)}{dt} - k\lambda T(t) = 0.$$

Αν οι τελευταίες ισότητες ισχύουν για όλα τα $(x,t)\in\Omega$, τότε είναι

$z_t(x,t) - kz_{xx}(x,t) = X(x)[k\lambda T(t)] - k[\lambda X(x)]T(t) = 0$ για κάθε $(x,t)\in\Omega$.

Εξάλλου, οι συνθήκες (ii) και (iii) δίνουν

$$X(0)T(t) = X(\ell)T(t) = 0 \quad \text{για } t\geq 0,$$

απ' όπου προκύπτει

$$X(0) = X(\ell) = 0,$$

αφού $T\neq 0$. Τα παραπάνω μας οδηγούν στη θεώρηση του προβλήματος ιδιοτιμών

$$(\varphi) \qquad \frac{d^2X(x)}{dx^2} - \lambda X(x) = 0, \quad x\in[0,\ell]; \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

και της διαφορικής εξίσωσης

$$(\sigma(\lambda)) \qquad \frac{dT(t)}{dt} - k\lambda T(t) = 0, \quad t\geq 0.$$

Τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αν λ_0 είναι μια ιδιοτιμή του (φ), $X_0(x)$, $0\leq x\leq \ell$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση αυτού αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ_0 και $T_0(t)$, $t\geq 0$ είναι μια μη μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(\sigma(\lambda_0))$, τότε η συνάρτηση $z_0(x,t) = X_0(x)T_0(t)$, $(x,t)\in\overline{\Omega}$ είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (H) και πληροί τις συνθήκες (ii) και (iii).

Για την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών (φ), παρατηρούμε ότι η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{αν } \lambda > 0 \\ A+Bx, & \text{αν } \lambda = 0 \\ A\cos(\sqrt{-\lambda}x)+B\sin(\sqrt{-\lambda}x), & \text{αν } \lambda < 0, \end{cases}$$

για $x \in [0,\ell]$, όπου A και B είναι αυθαίρετες σταθερές. Για $\lambda \geq 0$, οι συνοριακές συνθήκες $X(0) = X(\ell) = 0$ δίνουν $A = B = 0$ και επομένως $X(x) = 0$, $0 \leq x \leq \ell$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\lambda < 0$ και παίρνουμε $A=0$ και $\sin(-\sqrt{\lambda}\ell) = 0$, αφού $B \neq 0$ (για $B = 0$ έχουμε πάλι τη μηδενική λύση). Έτσι, η ακολουθία των ιδιοτιμών του (φ) είναι

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1,2,\ldots$$

και, για τυχόντα θετικό ακέραιο n και για τυχούσα σταθερά $B_n \neq 0$, η συνάρτηση

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

είναι μια ιδιοσυνάρτηση του (φ) αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ_n. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι, αν n είναι θετικός ακέραιος, οι μη μηδενικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $(\sigma(\lambda_n))$ δίνονται απ'τον τύπο

$$T_n(t) = C_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right], \quad t \geq 0,$$

όπου $C_n \neq 0$ είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Μετά απ'τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, αν $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ είναι μια αυθαίρετη ακολουθία σταθερών, τότε κάθε όρος της ακολουθίας συναρτήσεων

$$z_n(x,t) = b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}$$

είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (Η) και πληροί τις συνθήκες (ii) και (iii). [Αν για κάποιο θετικό ακέραιο n είναι $b_n = 0$, τότε z_n είναι η μηδενική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, είναι μια λύση στο Ω της (Η) και πληροί τις (ii) και (iii)].

Θεωρούμε, τώρα, τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega},$$

όπου b_n $(n = 1,2,\ldots)$ είναι σταθερές, και υποθέτουμε ότι αυτή συγκλίνει προς μια συνάρτηση $z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Η οριακή συνάρτηση z πληροί τη συνθήκη (i) αν και μόνο αν

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Μια πιθανή, λοιπόν, λύση του προβλήματός μας είναι η συνάρτηση z, όπου οι σταθερές b_n $(n = 1,2,\ldots)$ πληρούν την τελευταία ισότητα.

Η παραπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο ακόλουθο Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 15</u>. <u>Ας θεωρήσουμε τον τόπο</u>

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \ell, t > 0\},$$

<u>όπου ℓ είναι μια θετική σταθερά, και ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ell]$ με $f(0) = f(\ell) = 0$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[0,\ell]$. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση z στο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \le x \le \ell, t \ge 0\}$, η οποία είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (H) και πληροί τις συνθήκες</u>

$$\begin{cases} z(x,0) = f(x), \ 0 \le x \le \ell & \text{(i)} \\ z(0,t) = 0, \ t \ge 0 & \text{(ii)} \\ z(\ell,t) = 0, \ t \ge 0 & \text{(iii)}. \end{cases}$$

<u>Η συνάρτηση αυτή δίνεται απ' τον τύπο</u>

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega},$$

<u>όπου</u>

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(\ell) = 0$ και θεωρούμε την 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ για } x \in [0,\ell], \ \tilde{f}(x) = -f(-x) \text{ για } x \in (-\ell,0).$$

Η συνάρτηση $\tilde{f}$ είναι περιττή. Επίσης, η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Έτσι, η σειρά Fourier της $\tilde{f}$ είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Επειδή η $\tilde{f}$ είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$) και συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$, το Θεώρημα C (για την ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών Fourier) εξασφαλίζει ότι η σειρά Fourier της $\tilde{f}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση $\tilde{f}$, δηλαδή είναι

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad x\in\mathbb{R} \text{ ομοιόμορφα.}$$

'Αρα, αν περιορισθούμε στο διάστημα $[0,\ell]$, θα έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0\leq x\leq \ell \text{ ομοιόμορφα.}$$

Στη συνέχεια, θ'αποδείξουμε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t)\in\bar{\Omega}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση $z(x,t)$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Αν αυτό αποδειχθεί, τότε η z θα είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και θα πληροί, όπως αμέσως φαίνεται, τις συνθήκες (i),(ii) και (iii). Θ'απομένει,λοιπόν, τότε ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση z είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (H). Η μοναδικότητα της λύσης z του προβλήματός μας εξασφαλίζεται απ'το Θεώρημα 14.

Θέτουμε

$$s_n(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda \sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}, \quad 0\leq x\leq \ell \quad (n=1,2,\ldots)$$

και παρατηρούμε ότι $(s_n)_{n=1,2,\ldots}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\ell]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα, αφού η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$, $0\leq x\leq \ell$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Ακόμα, θέτουμε

$$S_n(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda \exp\left[-\left(\frac{\lambda\pi}{\ell}\right)^2 kt\right]\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}, \quad (x,t)\in\bar{\Omega} \quad (n=1,2,\ldots)$$

και παρατηρούμε ότι, για κάθε $n\in\{1,2,\ldots\}$, η συνάρτηση S_n είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και πληροί της συνθήκες

$$S_n(x,0) = s_n(x) \text{ για } 0\leq x\leq \ell \text{ και } S_n(0,t) = S_n(\ell,t) = 0 \text{ για } t\geq 0.$$

Επίσης, για κάθε θετικό ακέραιο n, η S_n είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (H), γιατί για όλα τα $(x,t)\in\Omega$ είναι

$$\frac{\partial S_n}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{n} -\left(\frac{\lambda\pi}{\ell}\right)^2 k b_\lambda \exp\left[-\left(\frac{\lambda\pi}{\ell}\right)^2 kt\right]\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell}$$

$$-k\sum_{\lambda=1}^{n} -\left(\frac{\lambda\pi}{\ell}\right)^2 b_\lambda \exp\left[-\left(\frac{\lambda\pi}{\ell}\right)^2 kt\right]\sin\frac{\lambda\pi x}{\ell} = 0.$$

Ακόμα, έχουμε $s_n(0) = s_n(\ell) = 0$ $(n=1,2,\ldots)$. 'Ετσι, σύμφωνα με το τελευταίο συμπέρασμα που έχει δοθεί ως μια συνέπεια της Αρχής μεγίστου-ελαχίστου, η ομοιόμορφη σύγκλιση της $(s_n)_{n=1,2,\ldots}$ στο

$[0,\ell]$ συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων $(S_n)_{n=1,2,\ldots}$ στο $\overline{\Omega}$. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά συναρτήσεων, που ορίζει τη z, συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θ'αποδείξουμε, τώρα, ότι η οριακή συνάρτηση z είναι μια λύση στο Ω της εξίσωσης (Η). Είναι αρκετό ν'αποδείξουμε ότι, για τυχόντα αριθμό ε με $\varepsilon > 0$, η z είναι μια λύση στον τόπο

$$\Omega_\varepsilon = \{(x,t) : 0 < x < \ell, t > \varepsilon\}$$

της (Η). Ας είναι, λοιπόν, ε ένας θετικός αριθμός και, για κάθε $n \in \{1,2,\ldots\}$, ας θέσουμε

$$w_n(x,t) = b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

Τότε είναι

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t), (x,t) \in \overline{\Omega} \text{ ομοιόμορφα.}$$

Οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial x}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο

$$\overline{\Omega}_\varepsilon = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, t \geq \varepsilon\}.$$

Πραγματικά· για κάθε θετικό ακέραιο n είναι

$$|b_n| = \frac{2}{\ell}\left|\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right| \leq \frac{2}{\ell}\int_0^\ell |f(x)|\left|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right|dx \leq \frac{2}{\ell}\int_0^\ell |f(x)|dx \equiv K$$

και επομένως

$$\left|\frac{\partial w_n}{\partial t}(x,t)\right| = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k|b_n|\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right]\left|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right| \leq Mn^2\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k\varepsilon\right],$$

$$\left|\frac{\partial w_n}{\partial x}(x,t)\right| = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)|b_n|\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right]\left|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right| \leq Nn\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k\varepsilon\right]$$

για όλα τα $(x,t) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$, όπου

$$M = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 kK \text{ και } N = \frac{\pi}{\ell}K.$$

Το γεγονός, ότι οι σειρές πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k\varepsilon\right] \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k\varepsilon\right]$$

συγκλίνουν, αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Έτσι, οι μερικές παράγωγοι z_t και z_x ορίζονται και είναι συνεχείς στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$ και δίνονται απ'τους τύπους

$$z_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kb_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell},\ (x,t)\in\overline{\Omega}_\varepsilon$$

και

$$z_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \cos\frac{n\pi x}{\ell},\quad (x,t)\in\overline{\Omega}_\varepsilon .$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε για $n = 1,2,\ldots$ και $(x,t)\in\overline{\Omega}_\varepsilon$

$$\left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 |b_n| \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \left|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right| \leq \frac{M}{k}\, n^2 \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k\varepsilon\right]$$

και άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Επομένως, η μερική παράγωγος z_{xx} ορίζεται και είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$ και μάλιστα

$$z_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 b_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt\right] \sin\frac{n\pi x}{\ell},\ (x,t)\in\overline{\Omega}_\varepsilon .$$

Με ανάλογο τρόπο, διαπιστώνουμε ότι οι μερικές παράγωγοι z_{tt} και z_{xt} υπάρχουν και είναι συνεχείς στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$z_t(x,t) - kz_{xx}(x,t) = 0 \text{ για όλα τα } 0 \leq x \leq \ell,\ t \geq \varepsilon .$$

3.2. <u>Παραδείγματα</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $z(x,t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, η οποία είναι μια λύση στο $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, t > 0\}$ της εξίσωσης $z_t - z_{xx} = 0$ και πληροί τις συνθήκες

$$z(x,0) = \sin 2x \text{ για } 0 \leq x \leq \pi \text{ και } z(0,t) = z(\pi,t) = 0 \text{ για } t \geq 0.$$

<u>Λύση</u>. Σύμφωνα με το Θεώρημα 15, η συνάρτηση z δίνεται απ'τον τύπο

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx,\quad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0,$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \sin nx\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Αμέσως βρίσκουμε ότι $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ και $b_n = 0$ $(n = 3,4,\ldots)$. Έτσι, έχουμε

$$z(x,t) = e^{-4t} \sin 2x,\quad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $z(x,t)$, $0 \leq x \leq 2$, $t \geq 0$, η οποία είναι μια λύση στο $\Omega = \{(x,t) ; 0 < x < 2, t > 0\}$ της εξίσωσης $z_t - 4z_{xx} = 0$ και πληροί τις συνθήκες

$$z(x,0) = x(2-x) \text{ για } 0 \leq x \leq 2 \text{ και } z(0,t) = z(2,t) = 0 \text{ για } t \geq 0.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 15 και παίρνουμε ότι

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \ t \geq 0$$

για

$$b_n = \int_0^2 x(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$b_{2n} = 0 \text{ και } b_{2n-1} = \frac{32}{\pi^3(2n-1)^3} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

οπότε έχουμε

$$z(x,t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2, \ t \geq 0.$$

3.3. Ασκήσεις

1. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $z(x,t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, η οποία είναι μια λύση στο $\{(x,t) : 0 < x < \pi, t > 0\}$ της εξίσωσης $z_t - kz_{xx} = 0$ και πληροί τις συνθήκες $z(x,0) = f(x)$ για $0 \leq x \leq \pi$ και $z(0,t) = z(\pi,t) = 0$ για $t \geq 0$:

(i) $k = 1$, $f(x) = \sin x + 3\sin 4x$ για $0 \leq x \leq \pi$.

(ii) $k = 2$, $f(x) = 1 - \cos 4x$ για $0 \leq x \leq \pi$.

(iii) $k = 3$, $f(x) = -x^2(\pi^2 - 2\pi x + x^2)$ για $0 \leq x \leq \pi$.

(iv) $k = 4$, $f(x) = x$ για $0 \leq x \leq \pi/2$ και $f(x) = \pi - x$ για $\pi/2 < x \leq \pi$.

(v) $k = 1$, $f(x) = \sin^2 2x$ για $0 \leq x \leq \pi$.

2. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $z(x,t)$, $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$, η οποία είναι μια λύση στο $\{(x,t) : 0 < x < \ell, t > 0\}$ της εξίσωσης $z_t - kz_{xx} = 0$ και πληροί τις συνθήκες $z(x,0) = f(x)$ για $0 \leq x \leq \ell$ και $z(0,t) = z(\ell,t) = 0$ για $t \geq 0$:

(i) $k = 1$, $\ell = 2$ και $f(x) = \sin \pi x + \sin 4\pi x$ για $0 \leq x \leq 2$.

(ii) $k = 3$, $\ell = 1$ και $f(x) = \sin 2\pi x$ για $0 \leq x \leq 1$.

(iii) $k=1$, $\ell=1$ και $f(x)=x^2(1-x)$ για $0\leq x\leq 1$.

(iv) $k=4$, $\ell=4$ και $f(x)=x$ για $0\leq x\leq 2$, $f(x)=4-x$ για $2<x\leq 4$.

(v) $k=2$, $\ell=2$ και $f(x)=1-\cos\pi x$ για $0\leq x\leq 2$.

4. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE

Στο Εδάφιο αυτό μελετάται η (διδιάστατη) εξίσωση του Laplace. Δίνεται η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου (Θεώρημα 16) για τις αρμονικές συναρτήσεις σε φραγμένους τόπους και, ως μια συνέπεια αυτής, συμπεραίνεται το μονοσήμαντο λύσεων των προβλημάτων του Dirichlet για φραγμένους τόπους (Θεώρημα 17). Μελετάται το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό κυκλικού δίσκου (Θεωρήματα 18 και 18') καθώς επίσης και για το εσωτερικό ορθογωνίου (Θεώρημα 19). Δίνονται, ακόμα, μερικά παραδείγματα και προτείνονται για λύση ορισμένες ασκήσεις.

4.1. Αρμονικές συναρτήσεις. Η Αρχή μεγίστου-ελαχίστου. Το πρόβλημα του Dirichlet

Ας είναι Ω ένας τόπος του $\mathbb{R}^2$. Μια πραγματική συνάρτηση z, η οποία είναι C^2 στο Ω και τέτοια ώστε

$$z_{xx}(x,y)+z_{yy}(x,y)=0 \text{ για όλα τα } (x,y)\in\Omega,$$

θα λέμε ότι είναι μια <u>αρμονική</u> συνάρτηση στον τόπο Ω. Με άλλα λόγια, κάθε πραγματική συνάρτηση, που είναι λύση στον τόπο Ω της (διδιάστατης) <u>εξίσωσης του Laplace</u>

$$z_{xx}+z_{yy}=0,$$

λέγεται αρμονική στο Ω. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, αν ξ και η είναι πραγματικές σταθερές, z είναι μια αρμονική συνάρτηση στον τόπο Ω και $\tilde{\Omega}=\{(u,v) : (u+\xi,v+\eta)\in\Omega\}$, τότε η συνάρτηση $\tilde{z}(u,v)=z(u+\xi,v+\eta)$, $(u,v)\in\tilde{\Omega}$ είναι επίσης αρμονική στον τόπο $\tilde{\Omega}$. Ακόμα, είναι φανερό, ότι το άθροισμα δύο αρμονικών συναρτήσεων στο Ω καθώς και το γινόμενο μιας πραγματικής σταθεράς με μια αρμονική συνάρτηση στο Ω είναι επίσης αρμονικές συναρτήσεις στον τόπο Ω.

Ένα σημαντικό συμπέρασμα, για αρμονικές συναρτήσεις σε φραγμένους τόπους, είναι το παρακάτω Θεώρημα, γνωστό ως <u>Αρχή μεγίστου-ελαχίστου</u>.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16 (Αρχή μεγίστου-ελαχίστου). Ας είναι Ω ένας φραγμένος τόπος, $\partial\Omega$ το σύνορο αυτού και $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ας είναι, ακόμα, z μια πραγματική συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και αρμονική στο Ω. Τότε η μέγιστη τιμή M και η ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης z στο $\overline{\Omega}$ λαμβάνονται στο σύνορο $\partial\Omega$ του τόπου Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή M της συνάρτησης z στο $\overline{\Omega}$ λαμβάνεται στο $\partial\Omega$, γιατί τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το συμπέρασμα αυτό για τη συνάρτηση $-z$ και να συμπεράνουμε ότι και η ελάχιστη τιμή m της z στο $\overline{\Omega}$ λαμβάνεται επίσης στο σύνορο $\partial\Omega$.

Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $\overline{\Omega}$ και $\partial\Omega$ είναι συμπαγή και ότι η συνάρτηση z είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, και θεωρούμε την μέγιστη τιμή M της συνάρτησης z στο $\overline{\Omega}$ καθώς και τη μέγιστη τιμή M^* της z στο σύνορο $\partial\Omega$. Είναι φανερό ότι $M^* \leq M$. Αρκεί ν'αποδείξουμε ότι $M^* = M$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $M^* < M$ και θεωρούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$ με $M = z(x_0, y_0)$. Είναι $(x_0, y_0) \in \Omega$, αφού $M^* < M$. Θεωρούμε τη διάμετρο d του συνόλου $\overline{\Omega}$,

$$d = \sup\{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]^{1/2} : (x_1, y_1) \in \overline{\Omega},\ (x_2, y_2) \in \overline{\Omega}\}.$$

Είναι $0 < d < \infty$. Στη συνέχεια, θέτουμε

$$\tilde{z}(x,y) = z(x,y) + \frac{M-M^*}{2d^2}\,[(x-y_0)^2+(y-y_0)^2] \quad \text{για } (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{z}(x_0, y_0) = z(x_0, y_0) = M$$

και για κάθε $(x,y) \in \partial\Omega$

$$\tilde{z}(x,y) \leq z(x,y) + \frac{M-M^*}{2} \leq M^* + \frac{M-M^*}{2} = \frac{M^*+M}{2} < M.$$

'Ετσι, η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης $\tilde{z}$ στο συμπαγές σύνολο $\overline{\Omega}$ λαμβάνεται σ'ένα σημείο $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in \Omega$. Είναι

$$\tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \leq 0 \quad \text{και} \quad \tilde{z}_{yy}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \leq 0$$

και άρα

$$\tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) + \tilde{z}_{yy}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \leq 0.$$

Αλλά, λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο ορισμού της συνάρτησης $\tilde{z}$ και το γεγονός ότι η z είναι αρμονική στον τόπο Ω, παίρνουμε

$$\tilde{z}_{xx}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) + \tilde{z}_{yy}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \left[z_{xx}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) + \frac{M-M^*}{d^2}\right] + \left[z_{yy}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) + \frac{M-M^*}{d^2}\right]$$

$$= [z_{xx}(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)+z_{yy}(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)] + \frac{2(M-M^*)}{d^2}$$

$$= \frac{2(M-M^*)}{d^2} > 0,$$

το οποίο είναι ένα άτοπο.

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια του παραπάνω Θεωρήματος είναι το ακόλουθο συμπέρασμα: Ας είναι Ω ένας φραγμένος τόπος, $\partial\Omega$ το σύνορο αυτού και $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ας είναι ακόμα z_1 και z_2 δύο πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι συνεχείς στο $\bar{\Omega}$ και αρμονικές στο Ω. Αν $z_1(x,y) = z_2(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in \partial\Omega$, τότε $z_1(x,y) = z_2(x,y)$ για όλα τα $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Πραγματικά· η συνάρτηση $z = z_1 - z_2$ είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και αρμονική στο Ω, και επομένως αυτή παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο $\partial\Omega$. Αλλά, είναι $z(x,y) = 0$ για κάθε $(x,y) \in \partial\Omega$, και άρα $z(x,y) = 0$ για όλα τα $(x,y) \in \Omega$.

Ας είναι Ω ένας φραγμένος τόπος, $\partial\Omega$ το σύνορο αυτού και $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ας είναι, ακόμα, f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο σύνορο $\partial\Omega$. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνεχούς συνάρτησης z στο $\bar{\Omega}$, η οποία να είναι αρμονική στο Ω και να πληροί την συνθήκη

$$(*) \qquad z(x,y) = f(x,y) \quad \text{για} \quad (x,y) \in \partial\Omega,$$

λέμε ότι είναι ένα πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο Ω. Η συνθήκη (*) λέγεται συνοριακή συνθήκη (του Dirichlet) και η συνάρτηση f καλείται συνοριακή συνάρτηση ή συνοριακό δεδομένο (του Dirichlet).

Για το μονοσήμαντο των λύσεων ενός προβλήματος του Dirichlet έχουμε το παρακάτω Θεώρημα, το οποίο είναι μια άμεση συνέπεια του συμπεράσματος που δόθηκε μετά την απόδειξη της Αρχής μεγίστου-ελαχίστου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17. Ας είναι Ω ένας τόπος, $\partial\Omega$ το σύνορο αυτού και $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ακόμα, ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο σύνορο $\partial\Omega$. Τότε υπάρχει το πολύ μια συνεχής συνάρτηση z στο $\bar{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $z(x,y) = f(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$.

Ας είναι Ω, $\partial\Omega$ και $\bar{\Omega}$ καθώς και f όπως στο Θεώρημα 17. Ας είναι επίσης z μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $z(x,y) = f(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$. Τότε η z εξαρτάται συνεχώς απ'το συνοριακό δεδομένο f, δηλαδή: Αν f^* είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\partial\Omega$ και z^* είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $z^*(x,y) = f^*(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι

$$|z(x,y)-z^*(x,y)| < \varepsilon \text{ για όλα τα } (x,y) \in \overline{\Omega},$$

εφόσον

$$|f(x,y)-f^*(x,y)| < \varepsilon \text{ για } (x,y) \in \partial\Omega.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ: Η συνάρτηση $\tilde{z} = z-z^*$ είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $\tilde{z}(x,y) = \tilde{f}(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$, όπου $\tilde{f} = f-f^*$. Σύμφωνα με την Αρχή μεγίστου-ελαχίστου, η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της $\tilde{z}$ στο $\overline{\Omega}$ λαμβάνονται στο σύνορο $\partial\Omega$ και επομένως υπάρχουν $(x_1,y_1) \in \partial\Omega$ και $(x_2,y_2) \in \partial\Omega$, έτσι ώστε

$$\tilde{f}(x_2,y_2) = \tilde{z}(x_2,y_2) \leq \tilde{z}(x,y) \leq \tilde{z}(x_1,y_1) = \tilde{f}(x_1,y_1) \text{ για όλα τα } (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Αν, λοιπόν, ε είναι ένας θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $|\tilde{f}(x,y)| < \varepsilon$ για $(x,y) \in \partial\Omega$, τότε $-\varepsilon < \tilde{z}(x,y) < \varepsilon$ ή $|\tilde{z}(x,y)| < \varepsilon$ για όλα τα $(x,y) \in \overline{\Omega}$.

Απ'το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει αμέσως η ακόλουθη ενδιαφέρουσα συνέπειά του:

Ας είναι Ω ένας τόπος, $\partial\Omega$ το σύνορο αυτού και $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ας είναι, επίσης, $(f_n)_{n=1,2,...}$ μια ακολουθία συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο σύνορο $\partial\Omega$. Ακόμα, για κάθε $n \in \{1,2,...\}$, ας είναι z_n μια συνεχής συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $z_n(x,y) = f_n(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$. Αν η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n=1,2,...}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (στο $\partial\Omega$), τότε και η ακολουθία $(z_n)_{n=1,2,...}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (στο $\overline{\Omega}$).

4.2. Το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό κυκλικού δίσκου

Θ'ασχοληθούμε πρώτα με το πρόβλημα Dirichlet για το εσωτερικό του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή (0,0), δηλαδή με το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο $\Omega = \{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$.

Σ'αυτή την περίπτωση, έχουμε $\partial\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ και $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega =$
$= \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18. Ας είναι

$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2<1\}$, $\partial\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ και $\overline{\Omega} = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Ας είναι, ακόμα, f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\partial\Omega$. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $z(x,y) = f(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$. Η συνάρτηση αυτή δίνεται απ'τον τύπο

$$z(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ για } (x,y) \in \partial\Omega \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1-x^2-y^2}{1-2x\cos\xi-2y\sin\xi+x^2+y^2} f(\cos\xi,\sin\xi)\,d\xi \text{ για } (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

Η z δίνεται επίσης απ'τον τύπο

$$z(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ για } (x,y) \in \partial\Omega \\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [r^n(a_n\cos n\vartheta + b_n\sin n\vartheta)] \\ \qquad \text{για } x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta \text{ με } 0 \leq r < 1,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\xi, \sin\xi)\,d\xi$$

και για $n = 1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\xi,\sin\xi)\cos n\xi\,d\xi \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\xi,\sin\xi)\sin n\xi\,d\xi.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε πρώτα ότι, για τυχόν $\xi \in [-\pi,\pi]$ και για κάθε $(x,y) \in \Omega$, είναι

$$\begin{aligned} 1-2x\cos\xi-2y\sin\xi+x^2+y^2 &\geq 1-2(|x||\cos\xi|+|y||\sin\xi|)+x^2+y^2 \\ &\geq 1-2\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2 \\ &= \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

'Ετσι, για όλα τα $(x,y) \in \Omega$ ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-x^2-y^2}{1-2x\cos\xi-2y\sin\xi+x^2+y^2} f(\cos\xi,\sin\xi)\,d\xi,$$

το οποίο καλείται <u>ολοκλήρωμα του Poisson για το εσωτερικό του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου</u>. Η συνάρτηση z είναι C^2 στο Ω. Ειδικά, οι μερικές παράγωγοι z_{xx} και z_{yy} είναι

$$z_{xx}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1-x^2-y^2}{1-2x\cos\xi-2y\sin\xi+x^2+y^2}\right)\right]f(\cos\xi,\sin\xi)\,d\xi,\ (x,y)\in\Omega$$

και

$$z_{yy}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-x^2-y^2}{1-2x\cos\xi-2y\sin\xi+x^2+y^2}\right)\right]f(\cos\xi,\sin\xi)\,d\xi,\ (x,y)\in\Omega.$$

Μετά απ'τους υπολογισμούς, προκύπτει ότι

$$z_{xx}(x,y)+z_{yy}(x,y) = 0 \text{ για όλα τα } (x,y)\in\Omega$$

και επομένως η συνάρτηση z είναι αρμονική στο Ω.

Στη συνέχεια, θέτουμε

$$F(\vartheta) = f(\cos\vartheta,\sin\vartheta) \text{ για } -\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

και

$$Z(r,\vartheta) = z(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \text{ για } 0 \leq r \leq 1,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi.$$

Τότε είναι

$$Z(r,\vartheta) = \begin{cases} F(\vartheta), & \text{αν } r=1 \text{ και } -\pi\leq\vartheta\leq\pi \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}F(\xi)\,d\xi, & \text{αν } 0\leq r<1 \text{ και } -\pi\leq\vartheta\leq\pi. \end{cases}$$

Ας είναι r,ϑ δύο τυχόντες αριθμοί με $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$. Τότε ισχύει

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}\,d\xi = 1.$$

Πραγματικά· για τυχόν $\xi\in[-\pi,\pi]$, παίρνουμε

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2} = \frac{1-r^2}{1-re^{-i(\vartheta-\xi)}-re^{i(\vartheta-\xi)}+r^2} = 1+\frac{re^{i(\vartheta-\xi)}}{1-re^{i(\vartheta-\xi)}}+$$

$$+\frac{re^{-i(\vartheta-\xi)}}{1-re^{-i(\vartheta-\xi)}}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\vartheta-\xi)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in(\vartheta-\xi)} =$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n[e^{in(\vartheta-\xi)}+e^{-in(\vartheta-\xi)}]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \cos n(\vartheta-\xi) .$$

Αλλά, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\vartheta-\xi)$, $\xi \in [-\pi,\pi]$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Έτσι, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\xi + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n(\vartheta-\xi)\,d\xi$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\,[\sin n(\vartheta+\pi) - \sin n(\vartheta-\pi)] = 1 .$$

Θ'αποδείξουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση z είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Επειδή η z είναι συνεχής στο Ω καθώς και στο $\partial\Omega$, αρκεί ν'αποδείξουμε ότι

$$\lim_{r\to 1-0} Z(r,\vartheta) = F(\vartheta) \text{ ομοιόμορφα ως προς } \vartheta \in [-\pi,\pi].$$

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα τυχόντα θετικό αριθμό ε. Επειδή η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$, αυτή θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό. Έτσι, υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ με $\delta < \pi$, τέτοιος ώστε για όλα τα ξ,ϑ στο $[-\pi,\pi]$ να είναι

$$|F(\xi)-F(\vartheta)| < \varepsilon, \text{ εφόσον } |\vartheta-\xi| \leqq \delta.$$

Επίσης, η F είναι φραγμένη στο $[-\pi,\pi]$, αφού αυτή είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi,\pi]$. Επομένως, για κάποιον θετικό αριθμό M είναι

$$|F(\xi)| \leqq M \text{ για κάθε } \xi \in [-\pi,\pi].$$

Μετά απ'τα παραπάνω και με τη βοήθεια του τύπου (*), για τυχόντα r,ϑ με $0 \leqq r < 1$, $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ έχουμε

$$|Z(r,\vartheta)-F(\vartheta)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}F(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}F(\vartheta)\,d\xi\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}|F(\xi)-F(\vartheta)|\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{-\pi \\ |\vartheta-\xi|\leqq\delta}}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}|F(\xi)-F(\vartheta)|\,d\xi + \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{-\pi \\ |\vartheta-\xi|\geqq\delta}}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}|F(\xi)-F(\vartheta)|\,d\xi$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\substack{-\pi \\ |\vartheta-\xi|\leq\delta}}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}\, d\xi + $$

$$+\frac{M}{\pi} \int_{\substack{-\pi \\ |\vartheta-\xi|\geq\delta}}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}\, d\xi$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2}\, d\xi + \frac{M(1-r^2)}{\pi(1-2r\cos\delta+r^2)}\int_{-\pi}^{\pi} d\xi$$

$$= \varepsilon+2M\, \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\, .$$

Επειδή $0<\delta<\pi$, είναι $\cos\delta<1$ και επομένως

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} = 0 .$$

Άρα, υπάρχει ένας αριθμός r_0 με $0\leq r_0<1$, έτσι ώστε

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2} < \varepsilon \text{ για όλα τα } r \text{ με } r_0\leq r<1 .$$

Είναι, λοιπόν,

$$|Z(r,\vartheta)-F(\vartheta)| < \varepsilon(1+2M) \text{ για } r_0\leq r<1 \text{ και } -\pi\leq\vartheta\leq\pi .$$

Ο αριθμός r_0 εξαρτάται απ'το ε (και όχι απ'το ϑ) και επομένως $\lim_{r\to 1-0} Z(r,\vartheta) = F(\vartheta)$ ομοιόμορφα ως προς $\vartheta\in[-\pi,\pi]$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση z είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$, είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνθήκη $z(x,y)=f(x,y)$ για $(x,y)\in\partial\Omega$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 17, η συνάρτηση z είναι η μοναδική συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες.

Απομένει ν'αποδείξουμε ότι

$$Z(r,\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [r^n(a_n\cos n\vartheta + b_n\sin n\vartheta)]\, ,\quad 0\leq r<1,\ -\pi\leq\vartheta\leq\pi,$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, d\xi$$

και για $n=1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\, d\xi \text{ και } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\, d\xi .$$

Όπως έχουμε διαπιστώσει παραπάνω, για τυχόντα r,ϑ με $0\leq r<1$,

$-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, είναι

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \cos n(\vartheta-\xi) \text{ για όλα τα } \xi \in [-\pi,\pi],$$

όπου η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\vartheta-\xi)$, $\xi \in [-\pi,\pi]$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Έτσι, για $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, παίρνουμε

$$Z(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-\xi)+r^2} F(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2r^n \cos n(\vartheta-\xi)\right] F(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\vartheta \cos n\xi + \sin n\vartheta \sin n\xi)\right] F(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\,d\xi\right] + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\cos n\xi\,d\xi\right]\cos n\vartheta + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\sin n\xi\,d\xi\right]\sin n\vartheta\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [r^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)].$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή και ακτίνα $\rho > 0$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό $\bar{x} = x/\rho$, $\bar{y} = y/\rho$ και ν'αναχθούμε στο πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή, για το οποίο εφαρμόζεται το Θεώρημα 18. Έτσι, μπορούμε να καταλήξουμε στο παρακάτω θεώρημα, το οποίο είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος 18.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 18΄</u>. <u>Ας είναι</u> ρ <u>ένας θετικός αριθμός και</u> $\Omega=\{(x,y): x^2+y^2<\rho^2\}$, $\partial\Omega=\{(x,y): x^2+y^2=\rho^2\}$ <u>και</u> $\bar{\Omega}=\{(x,y): x^2+y^2\leq\rho^2\}$. <u>Ας είναι, ακόμα,</u> f <u>μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο</u> Ω. <u>Τότε υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση</u> z <u>στο</u> $\bar{\Omega}$, <u>η οποία είναι αρμονική στο</u> Ω <u>και πληροί τη συνοριακή συνθήκη</u> $z(x,y) = f(x,y)$ <u>για</u> $(x,y) \in \partial\Omega$. <u>Η συνάρτηση αυτή δίνεται απ'τον τύπο</u>

$$z(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \ \underline{\text{για}} \ (x,y) \in \Omega \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2-x^2-y^2}{\rho^2-2\rho x\cos\xi-2\rho y\sin\xi+x^2+y^2} f(\rho\cos\xi,\rho\sin\xi)\,d\xi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\text{για}} \ (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

<u>Η</u> z <u>δίνεται</u> <u>επίσης</u> <u>απ'τον</u> <u>τύπο</u>

$$z(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \ \underline{\text{για}} \ (x,y) \in \partial\Omega \\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^n (a_n\cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)\right] \\ \qquad \underline{\text{για}} \ x = r\cos\vartheta, \ y = r\sin\vartheta \ \underline{\mu\varepsilon} \ 0 \le r < \rho, \ -\pi \le \vartheta \le \pi, \end{cases}$$

<u>όπου</u>

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\xi,\rho\sin\xi)\,d\xi$$

<u>και</u> <u>για</u> $n = 1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\xi,\rho\sin\xi)\cos n\xi\,d\xi \ \ \underline{\text{και}} \ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\xi,\rho\sin\xi)\sin n\xi\,d\xi.$$

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό του κυκλικού δίσκου με κέντρο το σημείο (x_0,y_0) και ακτίνα $\rho > 0$ μπορεί, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $\bar{x} = x-x_0$, $\bar{y} = y-y_0$, ν'αναχθεί στο πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή και ακτίνα ρ.

<u>4.3. Το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό ορθογωνίου. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών</u>

Θα μελετήσουμε, τώρα, το πρόβλημα του Dirichlet για το εσωτερικό ορθογωνίου, με τη <u>μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών</u>.

Ας θεωρήσουμε τον τόπο

$$\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 < x < \ell, 0 < y < L\},$$

όπου ℓ και L είναι θετικές σταθερές. Τότε

$$\partial\Omega = \{(x,0) : 0 \le x \le \ell\} \cup \{(x,L) : 0 \le x \le \ell\} \cup \{(0,y) : 0 \le y \le L\} \cup \{(\ell,y) : 0 \le y \le L\}$$

και

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le \ell, 0 \le y \le L\}.$$

Ας θεωρήσουμε, ακόμα, μια συνεχή πραγματική συνάρτηση F στο διάστημα $[0,\ell]$, τέτοια ώστε

$$F(0)=F(\ell)=0.$$

Θέλουμε να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$, η οποία να είναι αρμονική στον τόπο Ω και να πληροί τη συνοριακή συνθήκη

$$\begin{cases} z(x,0)=F(x), & 0\le x\le \ell \quad \text{(i)}\\ z(x,L)=0, & 0\le x\le \ell \quad \text{(ii)}\\ z(0,y)=0, & 0\le y\le L \quad \text{(iii)}\\ z(\ell,y)=0, & 0\le y\le L. \quad \text{(iv)}\end{cases}$$

Έχουμε, λοιπόν, να επιλύσουμε το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο Ω με συνοριακή συνθήκη $z(x,y)=f(x,y)$ για $(x,y)\in\partial\Omega$, όπου f είναι η συνεχής πραγματική συνάρτηση που ορίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$ με τον τύπο

$$f(x,y)=\begin{cases} F(x), & \text{αν } 0\le x\le \ell \text{ και } y=0\\ 0, & \text{αν } 0\le x\le \ell \text{ και } y=L\\ 0, & \text{αν } x=0 \text{ και } 0\le y\le L\\ 0, & \text{αν } x=\ell \text{ και } 0\le y\le L.\end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $z(x,y)=X(x)Y(y)$ για $(x,y)\in\overline{\Omega}$, όπου $X\neq 0$ και $Y\neq 0$. Για κάθε $(x,y)\in\Omega$, έχουμε

$$z_{xx}(x,y)=\frac{d^2X(x)}{dx^2}\,Y(y) \quad \text{και} \quad z_{yy}(x,y)=X(x)\,\frac{d^2Y(y)}{dy^2}.$$

Άρα, η z είναι αρμονική στο Ω αν και μόνο αν

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}\,Y(x)+X(x)\,\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0 \quad \text{για όλα τα } (x,y)\in\Omega.$$

Αν θέσουμε $V=\{(x,y) : X(x)\neq 0 \text{ και } Y(y)\neq 0\}$, τότε παίρνουμε

$$\frac{1}{X(x)}\,\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y(y)}\,\frac{d^2Y(y)}{dy^2} \quad \text{για } (x,y)\in V.$$

Στην τελευταία ισότητα, το πρώτο μέλος είναι συνάρτηση μόνο του x ενώ το δεύτερο μέλος είναι συνάρτηση μόνο του y. Έτσι, η κοινή τιμή των δύο μελών της ισότητας αυτής θα είναι μια σταθερά λ, οπότε θα έχουμε

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda X(x)=0 \quad \text{και} \quad \frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\lambda Y(y)=0$$

για κάθε $(x,y)\in V$. Παρατηρούμε ότι, αν οι τελευταίες ισότητες ισχύουν για όλα τα $(x,y)\in\Omega$, τότε

$$z_{xx}(x,y)+z_{yy}(x,y)=\frac{d^2X(x)}{dx^2}Y(x)+X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=$$
$$=[\lambda X(x)]Y(x)+X(x)[-\lambda Y(y)]=0$$

για κάθε $(x,y)\in\Omega$, δηλαδή η z είναι αρμονική στο Ω. Εξάλλου, οι συνθήκες (iii) και (iv) δίνουν

$$X(0)Y(y)=X(\ell)Y(y)=0 \text{ για } 0\leq y\leq L,$$

απ'όπου, αφού $Y\neq 0$, προκύπτει ότι

$$X(0)=X(\ell)=0.$$

Επίσης, η συνθήκη (ii) γράφεται

$$X(x)Y(L)=0 \text{ για } 0\leq x\leq \ell$$

και επομένως, επειδή $X\neq 0$, θα είναι

$$Y(L)=0.$$

'Ετσι, καταλήγουμε στο να θεωρήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$(\varphi)\qquad \frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda X(x)=0,\ x\in[0,\ell];\ X(0)=X(\ell)=0$$

και τη διαφορική εξίσωση

$$(\sigma(\lambda))\qquad \frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\lambda Y(y)=0,\ y\in[0,L]$$

με τη συνθήκη $Y(L)=0$. Αν X_0 είναι μια ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος ιδιοτιμών (φ), αντίστοιχη μιας ιδιοτιμής λ_0 αυτού, και Y_0 είναι μια μη μηδενική λύση της εξίσωσης $(\sigma(\lambda_0))$ με $Y_0(L)=0$, τότε $z_0=X_0Y_0$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\bar{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τις συνθήκες (ii), (iii) και (iv).

Ας επιλύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών (φ). Η διαφορική εξίσωση έχει τη γενική λύση

$$X(x)=\begin{cases} c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{αν } \lambda>0\\ c_1+c_2x, & \text{αν } \lambda=0\\ c_1\cos\sqrt{-\lambda}x+c_2\sin\sqrt{-\lambda}x, & \text{αν } \lambda<0\end{cases}$$

για $x\in[0,\ell]$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Επίσης, οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \text{ και } c_1e^{\sqrt{\lambda}\ell}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}\ell}=0, & \text{αν } \lambda>0\\ c_1=0 \text{ και } c_1+c_2\ell=0, & \text{αν } \lambda=0\\ c_1=0 \text{ και } c_1\cos\sqrt{-\lambda}\ell+c_2\sin\sqrt{-\lambda}\ell=0, & \text{αν } \lambda<0.\end{cases}$$

Για $\lambda \geq 0$, είναι $c_1 = c_2 = 0$ και άρα $X(x) = 0$, $x \in [0,\ell]$. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\lambda < 0$. Τότε $c_1 = 0$ και, για να είναι $X \neq 0$, πρέπει και αρκεί $c_2 \neq 0$ και $\sin\sqrt{-\lambda}\ell = 0$. Έτσι, η ακολουθία ιδιοτιμών του προβλήματος ιδιοτιμών (φ) είναι

$$\lambda_n = -(n\pi/\ell)^2 \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

και, για κάθε $n \in \{1,2,\ldots\}$, η συνάρτηση

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in [0,\ell]$$

είναι μια ιδιοσυνάρτηση του (φ) αντίστοιχη της ιδιοτιμής λ_n, για οποιαδήποτε μη μηδενική σταθερά A_n. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε ένα θετικό ακέραιο n και ας βρούμε τις μη μηδενικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $(\sigma(\lambda_n))$, που πληρούν τη συνθήκη $Y(L) = 0$. Η γενική λύση της εξίσωσης $(\sigma(\lambda_n))$ είναι

$$Y_n(y) = d_1 e^{(n\pi/\ell)y} + d_2 e^{(-n\pi/\ell)y}, \quad y \in [0,L],$$

όπου d_1 και d_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Η αρχική συνθήκη $Y_n(L) = 0$ δίνει

$$d_1 = -d_2 e^{(-2n\pi/\ell)L}$$

και έτσι

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= d_2\left[e^{(-n\pi/\ell)y} - e^{(-2n\pi/\ell)L} e^{(n\pi/\ell)y}\right] \\ &= d_2 e^{(-n\pi/\ell)L}\left[e^{(n\pi/\ell)(L-y)} - e^{(-n\pi/\ell)(L-y)}\right] = \\ &= \frac{1}{2} d_2 e^{(-n\pi/\ell)L} \sinh\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right] \end{aligned}$$

για $y \in [0,L]$. Άρα, οι μηδενικές λύσεις Y_n της διαφορικής εξίσωσης $(\sigma(\lambda_n))$, που πληρούν τη συνθήκη $Y_n(L) = 0$, δίνονται απ'τον τύπο

$$Y_n(y) = B_n \sinh\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right], \quad y \in [0,L],$$

όπου $B_n \neq 0$ είναι αυθαίρετη σταθερά. Μετά απ'τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, αν n είναι ένας θετικός ακέραιος και C_n είναι μια σταθερά, τότε ο τύπος

$$z_n(x,y) = C_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \sinh\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right], \quad (x,y) \in \overline{\Omega}$$

ορίζει μια συνεχή συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τις συνθήκες (ii),(iii), και (iv) [αν $C_n = 0$, τότε z_n είναι η μηδενική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$].

Θεωρούμε, τώρα, τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right], \quad (x,y)\in\bar{\Omega},$$

όπου C_n $(n=1,2,\ldots)$ είναι σταθερές, και υποθέτουμε ότι αυτή συγκλίνει προς μια συνάρτηση $z(x,y)$, $(x,y)\in\bar{\Omega}$. Η συνάρτηση z πληροί τη (συνοριακή) συνθήκη (i) αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin h\frac{n\pi L}{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell} = F(x) \text{ για } x\in[0,\ell].$$

Μια πιθανή, λοιπόν, λύση του προβλήματός μας είναι η συνάρτηση z όπου οι συντελεστές C_n $(n=1,2,\ldots)$ πληρούν την παραπάνω σχέση.

Η ανάλυση που προηγήθηκε οδηγεί στο ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19. Ας είναι

$$\Omega=\{(x,y) : 0<x<\ell, 0<y<L\} \text{ και } \bar{\Omega}=\{(x,y) : 0\leq x\leq\ell, 0\leq y\leq L\},$$

όπου ℓ και L είναι θετικές σταθερές. Ας είναι, ακόμα, F μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ell]$ με $F(0)=F(\ell)=0$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο $[0,\ell]$.

Τότε υπάρχει μια μοναδική συνεχής συνάρτηση z στο $\bar{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη

$$\begin{cases} z(x,0)=F(x), & 0\leq x\leq\ell \quad (i)\\ z(x,L)=0, & 0\leq x\leq\ell \quad (ii)\\ z(0,y)=0, & 0\leq y\leq L \quad (iii)\\ z(\ell,y)=0, & 0\leq y\leq L \quad (iv). \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή δίνεται απ'τον τύπο

$$z(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{n\pi L}{\ell}} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,y)\in\bar{\Omega},$$

όπου

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την 2ℓ-περιοδική συνάρτηση $\tilde{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\tilde{F}(x)=F(x) \text{ για } x\in[0,\ell], \quad \tilde{F}(x)=-F(-x) \text{ για } x\in(-\ell,0).$$

Επειδή $F(0)=F(\ell)=0$, η συνάρτηση $\tilde{F}$ είναι περιττή. Ακόμα, η $\tilde{F}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Έτσι, ορίζεται η σειρά Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad x\in\mathbb{R}$$

της συνάρτησης $\tilde{F}$, όπου

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \tilde{F}(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad (n=1,2,\ldots).$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $\tilde{F}$ είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$) και ότι η $\tilde{F}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[-\ell,\ell]$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα C (για την ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών Fourier), η σειρά Fourier της $\tilde{F}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση $\tilde{F}$, δηλαδή

$$\tilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad x\in\mathbb{R} \text{ ομοιόμορφα.}$$

Ειδικά, έχουμε

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0\leq x\leq \ell \text{ ομοιόμορφα.}$$

Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sinh\frac{n\pi L}{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,y)\in\bar{\Omega}$$

και θ'αποδείξουμε ότι αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση $z(x,y)$, $(x,y)\in\bar{\Omega}$. Αν αυτό αποδειχθεί, τότε η z θα είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$ και θα πληροί, όπως αμέσως φαίνεται, τις συνθήκες (i)-(iv) και, έτσι, θ'απομένει ν'αποδειχθεί ότι η οριακή συνάρτηση z είναι αρμονική στο Ω, προκειμένου αυτή να είναι μια λύση του προβλήματος του Dirichlet για τον τόπο Ω με τη συνοριακή συνθήκη (i)-(iv). Το ότι η συνάρτηση z θα είναι τότε η μοναδική λύση του προβλήματος αυτού του Dirichlet εξασφαλίζεται απ'το Θεώρημα 17.

Για κάθε $n\in\{1,2,\ldots\}$, ας είναι

$$s_n(x,y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}, & \text{για } 0\leq x\leq \ell,\ y=0 \\ 0, & \text{για } 0\leq x\leq \ell,\ y=L \\ 0, & \text{για } x=0,\ 0\leq y\leq L \\ 0, & \text{για } x=\ell,\ 0\leq y\leq L. \end{cases}$$

Η $(s_n)_{n=1,2,\ldots}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο σύνορο $\partial\Omega$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα, αφού η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$, $0\leq x\leq \ell$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Στη συνέχεια, ας θέσουμε

$$s_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\sin h\left[\frac{k\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{k\pi L}{\ell}} \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \quad (x,y) \in \overline{\Omega} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Για κάθε $n \in \{1,2,\ldots\}$, η συνάρτηση s_n είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και πληροί τη συνοριακή συνθήκη $s_n(x,y) = s_n(x,y)$ για $(x,y) \in \partial\Omega$. Ακόμα, για τυχόντα θετικό ακέραιο n, η s_n είναι αρμονική στο Ω, αφού για κάθε $(x,y) \in \Omega$ είναι

$$\frac{\partial^2 s_n}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 s_n}{\partial y^2}(x,y) = -\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \frac{\sin h\left[\frac{k\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{k\pi L}{\ell}} \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \frac{\sin h\left[\frac{k\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{k\pi L}{\ell}} \sin\frac{k\pi x}{\ell} = 0.$$

Έτσι, σύμφωνα με το τελευταίο συμπέρασμα της Παραγράφου 4.1, η ακολουθία συναρτήσεων $(s_n)_{n=1,2,\ldots}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (στο $\overline{\Omega}$). Αυτό σημαίνει ότι η σειρά συναρτήσεων, που ορίζει τη z, συγκλίνει ομοιόμορφα.

Στη συνέχεια, θ'αποδείξουμε ότι η οριακή συνάρτηση z είναι αρμονική στο Ω. Αρκεί, ν'αποδείξουμε ότι, για κάθε ε με $0 < \varepsilon < L$, η z είναι αρμονική στον τόπο

$$\Omega_\varepsilon = \{(x,y) : 0 < x < \ell, \varepsilon < y < L\}.$$

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα τυχόντα αριθμό ε με $0 < \varepsilon < L$. Επίσης, θέτουμε για $n = 1,2,\ldots$

$$w_n(x,y) = b_n \frac{\sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{n\pi L}{\ell}} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

οπότε

$$z(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,y), \ (x,y) \in \overline{\Omega} \text{ ομοιόμορφα.}$$

Οι μερικές παράγωγοι z_x, z_y ορίζονται και είναι συνεχείς στο

$$\overline{\Omega}_\varepsilon = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \ell, \varepsilon \leq y \leq L\}$$

και δίνονται απ'τους τύπους

$$z_x(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n\left(\frac{\pi}{\ell}\right) \frac{\sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{n\pi L}{\ell}} \cos\frac{n\pi x}{\ell}, (x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$$

και

$$z_y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n\left(-\frac{\pi}{\ell}\right) \frac{\cos h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h \frac{n\pi L}{\ell}} \sin\frac{n\pi x}{\ell},\ (x,y)\in\overline{\Omega}_\varepsilon,$$

δεδομένου ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial x}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n}{\partial y}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Το γεγονός ότι οι δύο αυτές σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$ διαπιστώνεται ως εξής: Παρατηρούμε, πρώτα, ότι για κάθε θετικό ακέραιο n είναι

$$|b_n| = \frac{2}{\ell}\left|\int_0^{\ell} F(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right| \leq \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} |F(x)|\,\left|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right|dx \leq \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} |F(x)|\,dx \equiv K$$

και

$$\frac{\sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{n\pi L}{\ell}} = e^{\frac{-n\pi y}{\ell}} \left[\frac{1-e^{\frac{-2n\pi}{\ell}(L-y)}}{1-e^{\frac{-2n\pi L}{\ell}}}\right] < e^{\frac{-n\pi y}{\ell}} \ \text{για}\ (x,y)\in\overline{\Omega}_\varepsilon,$$

$$\frac{\cos h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h\frac{n\pi L}{\ell}} = e^{\frac{-n\pi y}{\ell}} \left[\frac{1+e^{-\frac{2n\pi}{\ell}(L-y)}}{1-e^{-\frac{2n\pi L}{\ell}}}\right] \leq \frac{2}{1-e^{-\frac{2n\pi L}{\ell}}}\, e^{-\frac{n\pi y}{\ell}}$$

$$\leq \Lambda e^{-\frac{n\pi y}{\ell}} \ \text{για}\ (x,y)\in\overline{\Omega}_\varepsilon,$$

όπου

$$\Lambda = 2\Big/\left(1-e^{-\frac{2\pi L}{\ell}}\right).$$

Έτσι, για κάθε $(x,y)\in\overline{\Omega}$ και για $n=1,2,\ldots$ έχουμε

$$\left|\frac{\partial w_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq n|b_n|\,\frac{\pi}{\ell}\,e^{-\frac{n\pi y}{\ell}}\left|\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right| \leq K_1\, n e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{\ell}}$$

και

$$\left|\frac{\partial w_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq n|b_n|\,\frac{\pi}{\ell}\,\Lambda e^{-\frac{n\pi y}{\ell}}\left|\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right| \leq K_2\, n e^{-\frac{n\pi\varepsilon}{\ell}},$$

όπου

$$K_1 = K\frac{\pi}{\ell} \ \text{και}\ K_2 = K\frac{\pi}{\ell}\Lambda.$$

Επειδή η σειρά πραγματικών αριθμών

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{-n\pi\varepsilon}{\ell}}$$

συγκλίνει, ο ισχυρισμός μας αληθεύει. Στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι

$$\left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq M_1 n^2 e^{\frac{-n\pi\varepsilon}{\ell}}, \quad \left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq M_1 n^2 e^{\frac{-n\pi\varepsilon}{\ell}},$$

$$\left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial y \partial x}(x,y)\right| \leq M_2 n^2 e^{\frac{-n\pi\varepsilon}{\ell}}$$

για κάθε θετικό ακέραιο n και για όλα τα $(x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$, όπου

$$M_1 = K\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \quad M_2 = K\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \Lambda.$$

Αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{\frac{-n\pi\varepsilon}{\ell}}$$

συγκλίνει, οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y \partial x}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$. 'Αρα, οι μερικές παράγωγοι z_{xx}, z_{yy} και z_{xy} ορίζονται και είναι συνεχείς στο $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Είναι

$$z_{xx}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 b_n \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{\sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h \frac{n\pi L}{\ell}} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$$

και

$$z_{yy}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \frac{\sin h\left[\frac{n\pi}{\ell}(L-y)\right]}{\sin h \frac{n\pi L}{\ell}} \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad (x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$$

και επομένως

$$z_{xx}(x,y) + z_{yy}(x,y) = 0 \text{ για όλα τα } (x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon.$$

Ας θεωρήσουμε, τέλος, το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο

$$\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \ell, 0 < y < L\} \quad (\ell > 0, L > 0)$$

με συνοριακή συνθήκη

$$(*) \qquad \begin{cases} z(x,0) = F(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ z(x,L) = F_1(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ z(0,y) = G(y), & 0 \leq y \leq L \\ z(\ell,y) = G_1(y), & 0 \leq y \leq L, \end{cases}$$

όπου F, F_1 είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\ell]$ και G, G_1 είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $[0,L]$, τέτοιες ώστε

$$F(0) = F(\ell) = F_1(0) = F_1(\ell) = 0, \quad G(0) = G(L) = G_1(0) = G_1(L) = 0.$$

Τότε θεωρούμε τα τέσσερα προβλήματα του Dirichlet για τον τόπο Ω με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} z(x,0) = F(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ z(x,L) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(0,y) = 0, & 0 \leq y \leq L \\ z(\ell,y) = 0, & 0 \leq y \leq L, \end{cases} \qquad \begin{cases} z(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(x,L) = F_1(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ z(0,y) = 0, & 0 \leq y \leq L \\ z(\ell,y) = 0, & 0 \leq y \leq L, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(x,L) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(0,y) = G(y), & 0 \leq y \leq L \\ z(\ell,y) = 0, & 0 \leq y \leq L, \end{cases} \qquad \begin{cases} z(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(x,L) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ z(0,y) = 0, & 0 \leq y \leq L \\ z(\ell,y) = G_1(y), & 0 \leq y \leq L \end{cases}$$

και τα επιλύουμε. Το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο Ω με την πρώτη απ'τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες έχει ήδη επιλυθεί (Θεώρημα 19). Τα άλλα τρία προβλήματα του Dirichlet για τον Ω επιλύονται με ανάλογο τρόπο. Το άθροισμα των λύσεων των τεσσάρων αυτών προβλημάτων είναι η λύση του προβλήματος του Dirichlet για τον τόπο Ω με τη συνοριακή συνθήκη (*).

4.4. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να επιλυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ με συνοριακή συνάρτηση $f(x,y) = x^2-y$, $(x,y) \in \partial\Omega$.

Λύση. Η μοναδική λύση δίνεται (Θεώρημα 18) απ'τον τύπο

$$z(x,y) = \begin{cases} x^2-y, \text{ για } x^2+y^2 = 1 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{(1-x^2-y^2)(\cos^2\xi-\sin\xi)}{1-2x\cos\xi-2y\sin\xi+x^2+y^2}\, d\xi, \text{ για } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 18, αυτή η λύση δίνεται επίσης απ'τον τύπο

$$z(x,y) = \begin{cases} x^2-y, \text{ για } x^2+y^2 = 1 \\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[r^n(a_n\cos n\vartheta + b_n\sin n\vartheta)\right], \\ \quad \text{για } x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta \text{ με } 0 \leq r < 1,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\xi - \sin\xi)\, d\xi$$

και για $n = 1,2,\ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\xi - \sin\xi)\cos n\xi\, d\xi \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\xi - \sin\xi)\sin n\xi\, d\xi.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1/2 \text{ και } a_n = 0 & (n = 3,4,\ldots) \\ b_1 = -1 \text{ και } b_n = 0 & (n = 2,3,\ldots) \end{cases}$$

και επομένως, για $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ με $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, παίρνουμε

$$z(x,y) = \frac{1}{2} - r\sin\vartheta + \frac{1}{2}\, r^2\cos 2\vartheta = \frac{1}{2}\,(1-r^2) - r\sin\vartheta + r^2\cos^2\vartheta.$$

'Ετσι, έχουμε

$$z(x,y) = \frac{1}{2}\,(1-x^2-y^2) - y + x^2 \quad \text{για } (x,y) \in \Omega.$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι η λύση του προβλήματός μας είναι η συνάρτηση

$$z(x,y) = \frac{1}{2}\,(1-x^2-y^2) - y + x^2 \quad \text{για } x^2+y^2 \leq 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να επιλυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 4\}$ με συνοριακή συνάρτηση $f(x,y) = |y|$ για $(x,y) \in \partial\Omega$.

<u>Λύση</u>. Σύμφωνα με το Θεώρημα 18', η λύση του προβλήματός μας δίνεται απ' τον τύπο

$$z(x,y) = \begin{cases} |y|, \text{ για } x^2+y^2 = 4 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(4-x^2-y^2)\,|2\sin\xi|}{4-4x\cos\xi-4y\sin\xi+x^2+y^2}\, d\xi, \text{ για } x^2+y^2 < 4 \end{cases}$$

ή απ' τον τύπο

$$z(x,y) = \begin{cases} |y|, \text{ για } x^2+y^2 = 4 \\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{2}\right)^n (a_n\cos n\vartheta + b_n\sin n\vartheta)\right], \\ \quad \text{για } x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta \text{ με } 0 \leq r < 2,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2|\sin\xi|d\xi$$

και για n = 1,2,...

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2|\sin\xi|\cos n\xi\, d\xi \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2|\sin\xi|\sin n\xi\, d\xi.$$

Μπορούμε να βρούμε ότι $b_n = 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ και

$$a_0 = \frac{8}{\pi}, \quad a_{2n} = \frac{8}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{και} \quad a_{2n-1} = 0 \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Έτσι, η λύση του προβλήματός μας είναι η συνάρτηση

$$z(x,y) = \begin{cases} |y|, \text{ για } x^2+y^2 = 4 \\ \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1-4n^2)} r^2 \cos 2n\vartheta, \\ \quad \text{για } x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta \text{ με } 0 \leq r < 2,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi. \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να επιλυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \pi, 0 < y < 2\}$ με συνοριακή συνθήκη

$$\begin{cases} z(x,0) = x(\pi-x), & 0 \leq x \leq \pi \\ z(x,2) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ z(0,y) = 0, & 0 \leq y \leq 2 \\ z(\pi,y) = 0, & 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

<u>Λύση</u>. Η μοναδική λύση του προβλήματός μας δίνεται, σύμφωνα με το θεώρημα 19, απ'τον τύπο

$$z(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin h(2n-ny)}{\sin h\, 2n} \sin nx, \quad (x,y) \in \bar{\Omega},$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin nx\, dx \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Εύκολα παίρνουμε

$$b_{2n} = 0 \quad \text{και} \quad b_{2n-1} = \frac{8}{\pi(2n-1)^3} \quad (n = 1,2,\ldots)$$

και επομένως η λύση είναι η συνάρτηση

$$z(x,y) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin h[(2n-1)(2-y)]}{(2n-1)^3 \sin h(4n-2)} \sin(2n-1)x \quad \text{για } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2.$$

4.5. Ασκήσεις

1. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, να επιλυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ με συνοριακή συνάρτηση την f:

(i) $f(x,y) = x^2-y^2, (x,y) \in \partial\Omega$. (iii) $f(x,y) = |y-1/2|, (x,y) \in \partial\Omega$.

(ii) $f(x,y) = xy^2, \ (x,y) \in \partial\Omega$. (iv) $f(x,y) = \sin y, \ (x,y) \in \partial\Omega$.

2. Να επιλυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο Ω με συνοριακή συνάρτηση f, όπου

$$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 < 9\} \text{ και } f(x,y) = 1+x+y^2, \ (x,y) \in \partial\Omega.$$

Ομοίως, αν

$$\Omega = \{(x,y) : (x-1)^2+(y+1)^2 < 4\} \text{ και } f(x,y) = xy^2, \ (x,y) \in \partial\Omega.$$

3. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, να επιλυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \ell, 0 < y < L\}$ με συνοριακή συνθήκη

$z(x,0)=F(x)$ και $z(x,L)=0$ για $0 \le x \le \ell$; $z(0,y)=z(\ell,y)=0$ για $0 \le y \le L$:

(i) $\ell = L = \pi$ και $F(x) = \sin 2x, \ x \in [0,\pi]$.

(ii) $\ell = \pi, \ L = 3$ και $F(x) = 1-\cos 2x, \ x \in [0,\pi]$.

(iii) $\ell = \pi, \ L = 1$ και $F(x) = x^2(\pi-x), \ x \in [0,\pi]$.

(iv) $\ell = 2, \ L = 1$ και $F(x) = x(2-x), \ x \in [0,2]$.

(v) $\ell = 1, \ L = 1$ και $F(x) = |\cos \pi x|-1, \ x \in [0,1]$.

(vi) $\ell = \pi, \ L = 2$ και $F(x) = x$ για $0 \le x \le \pi/2$, $F(x) = \pi-x$ για $\pi/2 \le x \le \pi$.

5. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xy}+Az_x+Bz_y+ABz = 0,$$

όπου A και B είναι σταθερές. Να βρεθεί η γενική λύση αυτής, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = ue^{ax+by}$ (a,b κατάλληλες σταθερές).

2. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση z στο $\bar{\Omega} = \{(x,t) : 0 \le x \le 6, t \ge 0\}$, η οποία είναι μια λύση στο $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 6, t > 0\}$ της εξίσωσης θερμότητας $4z_t-z_{xx} = 0$ και η οποία πληροί τις συνθήκες

$$z(0,t) = z(6,t) = 0, \ t \ge 0;$$

$$z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \sin\frac{n\pi x}{6}, \quad 0 \leq x \leq 6.$$

3. Να βρεθεί μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$z(x,y) = y^3+f(xy)+g(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

να είναι λύση της, για οποιεσδήποτε πραγματικές συναρτήσεις f και g με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$.

4. Ν'αποδειχθεί ότι, αν μια συνάρτηση είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$, τότε αυτή δεν είναι φραγμένη άνω ή κάτω.

5. Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_{xx}-z_{xy}+z_x = 0$. (ii) $z_{xy}+z_y = x$. (iii) $yz_{yy}-z_y = xy^2$.

6. Να βρεθεί η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_{xx}-c^2z_{yy} = y^2+xy-\sin\omega x \quad (\omega > 0 \text{ μια σταθερά}).$$

7. Ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}\times[0,1]$ με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης ως προς την πρώτη μεταβλητή της. Να βρεθεί η σχέση που πρέπει και αρκεί να πληρούν οι σταθερές ℓ, m, b και c, ώστε η συνάρτηση

$$z(x,y,t) = \int_0^1 f(\ell x+my+bt,\xi)\,d\xi, \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^3$$

να είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_{xx}+z_{yy} = c^2z_{tt}.$$

8. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή καθώς και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$z(x,y) = x^3-3xy^2, \quad x^2+y^2 \leq 1,$$

αφού πρώτα αποδειχθεί ότι αυτή είναι αρμονική στον τόπο $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$.

9. Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση z στο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}$, η οποία να είναι μια λύση στο $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, t > 0\}$ της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_t-kz_{xx} = -hz \quad (k,h > 0 \text{ σταθερές})$$

και να πληροί τις συνθήκες

$$z(x,0) = \sin x \text{ για } 0 \leq x \leq \pi, \quad z(0,t) = z(\pi,t) = 0 \text{ για } t \geq 0.$$

[Υπόδειξη: Να γίνει ο μετασχηματισμός $z(x,t) = e^{-ht}w(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$].

10. Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση z στο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : x \geq 0, t \geq 0\}$, η οποία να είναι μια λύση στο $\Omega = \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$ της εξίσωσης

$$z_{xx} - 2z_{xt} + z_{tt} = 0$$

και να πληροί τις συνθήκες

$$z(x,0) = 2x^2, \quad x \geq 0 \text{ και } z(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

11. Ας είναι f μια δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ell]$ με $f'(0) = f'(\ell) = 0$ και g μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $[0,\ell]$ με $g(0) = g(\ell) = B_0$, με $B_0 = (1/\ell)\int_0^\ell g(x)dx$. Ας είναι, ακόμα, F και G δύο 2ℓ-περιοδικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με

$$F(x) = f(x) \text{ για } 0 \leq x \leq \ell, \quad F(x) = f(-x) \text{ για } -\ell < x < 0$$

και

$$G(x) = \int_0^x [g(s) - B_0]ds \text{ για } 0 \leq x \leq \ell, \quad G(x) = G(-x) \text{ για } -\ell < x < 0.$$

Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση με τύπο

$$z(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] + \frac{1}{2c}[G(x+ct) - G(x-ct)] + B_0 t$$

είναι C^2 στο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq \ell, t \geq 0\}$ και τέτοια ώστε

$$\begin{cases} z_{tt}(x,t) - c^2 z_{xx}(x,t) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \ t \geq 0 \\ z_x(0,t) = z_x(\ell,t) = 0, & t \geq 0 \\ z(x,0) = f(x) \text{ και } z_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

όπου c είναι μια θετική σταθερά.

12. Δίνεται η μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xx} + (2x+3)z_{xy} + 6xz_{yy} = 0, \quad x > 3/2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ν'αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός

$$\overline{x} = y - 3x, \quad \overline{y} = y - x^2$$

μετασχηματίζει την εξίσωση αυτή στην

$$z_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{2}{4(\bar{y}-\bar{x})-9} z_{\bar{y}}.$$

13. Με τη βοήθεια των μετασχηματισμών $w(r,t) = rz(r,t), r > 0$, $-\infty < t < \infty$ και $\xi = r+ct$, $\eta = r-ct$, να βρεθεί η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{r^2}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad r > 0, \ -\infty < t < \infty \ (c > 0 \text{ σταθερά}).$$

14. Ν'αποδειχθεί ότι η συνεχής συνάρτηση z στο $\bar{\Omega} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$, η οποία είναι μια λύση στο $\Omega = \{(x,t) : 0<x<1, t>0\}$ της εξίσωσης $z_t - kz_{xx} = 0$ ($k > 0$ σταθερά) και πληροί τις συνθήκες

$z(0,t) = 0$ και $z(1,t) = 1$ για $t \geq 0$, $z(x,0) = 0$ για $0 \leq x \leq 1$,

δίνεται απ'τον τύπο

$$z(x,t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 kt} \sin n\pi x, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}.$$

15. Να βρεθεί η λύση z στο $\Omega = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$(x+y) z_{xy} = 1,$$

η οποία πληροί τις συνθήκες

$z(x,y) = 0$ και $z_x(x,y) = 2y/(x+y)$ για όλα τα $(x,y) \in \Omega$ με $xy = 1$.

16. Για τη μερική διαφορική εξίσωση

$$z_{xx} + 4z_{xt} + 5z_{tt} = 0$$

να βρεθούν οι λύσεις της μορφής $z(x,t) = e^{kt} f(x)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, όπου k είναι μια σταθερά και f είναι μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$.

17. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = y - \frac{3}{2} x^2,$$

να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$xz_{xx} + x^2 z_{xy} - 6x^3 z_{yy} - z_x = 0; \quad x > 0, \ y > 0.$$

18. Με κατάλληλες αντικαταστάσεις να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις:

(i) $z_{xx}-z_{xy}+z_x = 0$. (ii) $z_{xy}+z_y = x^2$.

<u>19</u>. Ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$z(x,y) = x^4+6x^2t^2+t^4+x^2+t^2+4xt, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_{tt}-z_{xx} = 0$$

που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$z(x,0) = x^4+x^2, \quad z_x(x,0) = 4x^3+2x, \quad z_t(x,0) = 4x \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

X. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ, ΑΡΧΙΚΩΝ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό θ'ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Fourier (Εδάφιο 1) και με την εφαρμογή τους (Εδάφιο 2) στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, αρχικών-συνοριακών τιμών και συνοριακών τιμών για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης. Στο Εδάφιο 3 δίνεται μια συλλογή γενικών ασκήεων.

1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

Στο Εδάφιο αυτό θ'ασχοληθούμε με τους μετασχηματισμούς Fourier. Θα δώσουμε, πρώτα, μερικές προκαταρκτικές έννοιες και θ'αποδείξουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Fourier (Θεωρήματα 1, 1α και 1β). Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης καθώς και τον μετασχηματισμό Fourier συνημιτόνων και τον μετασχηματισμό Fourier ημιτόνων μιας συνάρτησης και θα δώσουμε ισοδύναμες διατυπώσεις του ολοκληρωτικού τύπου του Fourier (Θεωρήματα 3, 3α και 3β). Ακόμα, θα ορίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier καθώς και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier συνημιτόνων και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ημιτόνων. Επίσης, θα δώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier (Θεώρημα 2, Θεώρημα 4, Θεωρήματα 5-9, Θεωρήματα 9*, $\overset{*}{9α}$ και $\overset{*}{9β}$, Θεώρημα 10). Τέλος, θ'ασχοληθούμε (Θεώρημα 11) με τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων μοναδιαίας ώθησης και της δέλτα συνάρτησης του Dirac. Παρατίθενται, ακόμα, ορισμένα παραδείγματα και προτείνονται ασκήσεις για λύση.

1.1. Προκαταρκτικά

Μια πραγματική συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$, αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\dots<x_{\nu-1}<x_\nu=b$ του $[a,b]$, τέτοια ώστε, για οποιοδήποτε $k\in\{0,1,\dots,\nu-1\}$, η f να είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (x_k, x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f(x_k+0)$ και $f(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$). Αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[a,b]$, τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη και φραγμένη στο διάστημα $[a,b]$.

Μια πραγματική συνάρτηση f θα λέγεται συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$, αν και μόνο αν υπάρχει μια διαμέριση $a=x_0<x_1<\dots<x_{\nu-1}<x_\nu=b$ του $[a,b]$, έτσι ώστε, για κάθε $k\in\{0,1,\dots,\nu-1\}$, η f να έχει συνεχή παράγωγο στο (x_k,x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ να υπάρχουν (οπότε, όπως εύκολα διαπιστώνεται, θα υπάρχουν και τα όρια $f(x_k+0)$ και $f(x_{k+1}-0)$ καθώς και τα όρια

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_k+h)-f(x_k+0)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_{k+1}+h)-f(x_{k+1}-0)}{h}$$

και μάλιστα τα δύο τελευταία όρια θα είναι ίσα με $f'(x_k+0)$ και $f'(x_{k+1}-0)$ αντίστοιχα). Είναι φανερό ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$, τότε η f είναι και συνεχής κατά τμήματα στο $[a,b]$.

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι άρτια αν και μόνο αν

$$f(-x)=f(x) \text{ για όλα τα } x\in\mathbb{R}$$

και περιττή αν και μόνο αν

$$f(-x)=-f(x) \text{ για όλα τα } x\in\mathbb{R}.$$

Ας σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ορισμοί έχουν δοθεί επίσης στην Παράγραφο 0.1 του Κεφαλαίου IX. Επαναλήφθηκαν εδώ για λόγους κάποιας αυτοδυναμίας του Κεφαλαίου αυτού.

Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,\infty)$. Τότε η συνάρτηση $f_e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f_e(x)=f(x) \text{ για } x\geq 0,\quad f_e(x)=f(-x) \text{ για } x<0$$

είναι άρτια και καλείται η άρτια επέκταση της συνάρτησης f. Επίσης, όταν $f(0)=0$, η συνάρτηση $f_o:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f_o(x)=f(x) \text{ για } x\geq 0,\quad f_o(x)=-f(-x) \text{ για } x<0$$

είναι περιττή και λέμε ότι είναι η <u>περιττή επέκταση</u> της f.

Είναι γνωστό ότι, αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[b,\infty)$, όπου $b\in\mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε σύμπαγές υποδιάστημα του $[b,\infty)$ και τέτοια ώστε $\int_b^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_b^{\infty}f(x)dx$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) και μάλιστα είναι

$$\left|\int_b^{\infty}f(x)dx\right|\leq\int_b^{\infty}|f(x)|dx.$$

Ένα ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $(-\infty,b]$, όπου $b\in\mathbb{R}$. Ακόμα, αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ υπάρχει και

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx.$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα, εξακολουθούν να ισχύουν και στην, πιο γενική, περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι μιγαδική.

Σ'ολόκληρο το Εδάφιο αυτό, $\mathcal{R}[0,\infty)$ <u>θα είναι το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων f, που είναι ορισμένες στο $[0,\infty)$ και οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$ και έχουν την ιδιότητα ότι</u> $\int_0^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. Επίσης, <u>θα συμβολίζουμε με $\mathcal{R}(-\infty,\infty)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής</u>: $f\in\mathcal{R}(-\infty,\infty)$ <u>αν και μόνο αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε</u> $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$.

<u>1.2. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Fourier</u>

Για ν'αποδείξουμε το Θεώρημα 1, που δίνει τον ολοκληρωτικό τύπο του Fourier, θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω Λήμματα 1 και 2. Οι αποδείξεις των Λημμάτων αυτών γίνονται με τη χρήση του Λήμματος Riemann-Lebesgue (Λήμμα 0), το οποίο έχει αποδειχθεί στην Παράγραφο 0.3 του Κεφαλαίου IX. Το Λήμμα 2 θα το χρειασθούμε επίσης και στην Παράγραφο 1.4.

ΛΗΜΜΑ 0 (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Αν g είναι μια πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

ΛΗΜΜΑ 1. Αν h είναι μια πραγματική συνάρτηση που είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[0,b]$, όπου $b>0$, τότε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b h(x)\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,h(0+0).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θ'αποδείξουμε, πρώτα, ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$g_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\sin(x/2)}, & \text{αν } 0<x\leq\pi \\ 0, \text{ αν } x=0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi]$ και επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 0, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi g_0(x)\sin(n+1/2)x\,dx = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x/2)}\right]\sin(n+1/2)x\,dx = 0$$

ή ακόμα

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{2}{x}\sin(n+1/2)x\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\,dx.$$

Αλλά, για τυχόντα θετικό ακέραιο n είναι

$$\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} = 1+2\sum_{k=1}^n \cos kx \quad \text{για } 0<x\leq\pi$$

και επομένως

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\,dx = \int_0^\pi\left(1+2\sum_{k=1}^n\cos kx\right)dx = \pi+2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\sin k\pi\Big|_0^\pi = \pi.$$

Άρα, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{2}{x}\sin(n+1/2)x\,dx = \pi$$

και έτσι παίρνουμε

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{(n+1/2)x}\,(n+1/2)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du,$$

δεδομένου ότι, όπως εύκολα διαπιστώνεται, το τελευταίο ολοκλήρωμα υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός).

Η συνάρτηση h είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα στο διάστημα $[0,b]$. Άρα, υπάρχουν τα όρια $h(0+0)$ και

$$L = \lim_{x\to 0+0} \frac{h(x)-h(0+0)}{x}$$

[και μάλιστα είναι $L = h'(0+0)$] και ορίζεται η συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)-h(0+0)}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq b \\ L, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα στο $[0,b]$. Για τη συνάρτηση αυτή το Λήμμα 0 εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^b g(x)\sin\lambda x\,dx = 0,$$

δηλαδή έχουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^b [h(x)-h(0+0)]\,\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = 0.$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b h(x)\frac{\sin\lambda x}{x}dx = \lim_{\lambda\to\infty}\left\{\int_0^b h(0+0)\frac{\sin\lambda x}{x}dx + \int_0^b [h(x)-h(0+0)]\frac{\sin\lambda x}{x}dx\right\}$$

$$= h(0+0)\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b \frac{\sin\lambda x}{x}dx + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b [h(x)-h(0+0)]\frac{\sin\lambda x}{x}dx$$

$$= h(0+0)\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda b}\frac{\sin u}{u}du = h(0+0)\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}h(0+0).$$

<u>ΛΗΜΜΑ 2</u>. <u>Ας είναι φ μια πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[b,\infty)$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[b,b']$, $b' > b$, και τέτοια ώστε</u> $\int_b^{\infty} |\varphi(x)|\,dx < \infty$. <u>Τότε</u>

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_b^{\infty} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι ε ένας θετικός αριθμός. Επειδή

$\int_b^{\infty} |\varphi(x)|\,dx < \infty$, είναι

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\infty} |\varphi(x)|\,dx = 0$$

και επομένως υπάρχει ένας αριθμός $b' > b$ έτσι ώστε

$$\int_{b'}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Τότε

$$\left|\int_{b'}^{\infty} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για όλα τα } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η συνάρτηση φ είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[b,b']$, το Λήμμα 0 εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_b^{b'} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx = 0$$

και άρα υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\int_b^{b'} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } \lambda \geqq \lambda_0.$$

Τώρα, για κάθε $\lambda \geqq \lambda_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_b^{\infty} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| &= \left|\int_{b'}^{\infty} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx + \int_b^{b'} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| \\ &\leqq \left|\int_{b'}^{\infty} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| + \left|\int_b^{b'} \varphi(x)\sin\lambda x\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

και έτσι αποδείχθηκε το Λήμμα.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1, χρειαζόμαστε επίσης τα παρακάτω Λήμματα 3 και 4. Το Λήμμα 3 θα το χρησιμοποιήσουμε και στην επόμενη Παράγραφο 1.3.

ΛΗΜΜΑ 3. Ας είναι h μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,dx < \infty$, δηλαδή ας είναι $h \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$. Τότε ο τύπος

$$h^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos sx\,dx, \quad s \in \mathbb{R}$$

ορίζει μια ομοιόμορφα συνεχή πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι

$$|h(x)\cos sx| \leq |h(x)| \text{ για όλα τα } x,s \in \mathbb{R}$$

και επομένως, αφού $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx < \infty$, το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cos sx\, dx$ με $s \in \mathbb{R}$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Έτσι, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η πραγματική συνάρτηση h^*. Η συνάρτηση αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πραγματικά· ας θεωρήσουμε ένα τυχόντα θετικό αριθμό ε. Επειδή

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t}^{\infty} |h(x)|dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{t} |h(x)|dx = 0,$$

υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί γ και δ με $\gamma < \delta$, έτσι ώστε

$$\int_{\delta}^{\infty} |h(x)|dx < \varepsilon/5 \text{ και } \int_{-\infty}^{\gamma} |h(x)|dx < \varepsilon/5,$$

οπότε θα είναι

$$\left|\int_{\delta}^{\infty} h(x)\cos sx\, dx\right| < \varepsilon/5 \text{ και } \left|\int_{-\infty}^{\gamma} h(x)\cos sx\, dx\right| < \varepsilon/5$$

για όλα τα $s \in \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος μέσης τιμής, διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$|\cos s_1x - \cos s_2x| \leqq x^2|s_1-s_2| \text{ για κάθε } s_1, s_2, x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, για τυχόντα $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, είναι

$$\left|\int_{\gamma}^{\delta} f(x)(\cos s_1x - \cos s_2x)dx\right| \leqq |s_1-s_2| \int_{\gamma}^{\delta} |f(x)|x^2dx \leqq K|s_1-s_2|,$$

όπου

$$K = \max\left\{1, \int_{\gamma}^{\delta} |f(x)|x^2dx\right\} > 0.$$

Έτσι, για οποιαδήποτε $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}|h^*(s_1) - h^*(s_2)| \leqq & \left|\int_{\delta}^{\infty} f(x)\cos s_1x\, dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{\gamma} f(x)\cos s_1x\, dx\right| + \\ & + \left|\int_{\delta}^{\infty} f(x)\cos s_2x\, dx\right| + \left|\int_{-\infty}^{\gamma} f(x)\cos s_2x\, dx\right| \\ & + \left|\int_{\gamma}^{\delta} f(x)(\cos s_1x - \cos s_2x)dx\right| \\ & < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + K|s_1-s_2| = \frac{4\varepsilon}{5} + K|s_1-s_2|.\end{aligned}$$

Θέτοντας λοιπόν $\delta = \varepsilon/(5K)$, παίρνουμε

$$|h^*(s_1) - h^*(s_2)| < \varepsilon \text{ για κάθε } s_1, s_2 \in \mathbb{R} \text{ με } |s_1-s_2| < \delta.$$

<u>ΛΗΜΜΑ 4</u>. <u>Ας είναι</u> h <u>μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο</u> $\mathbb{R}$,

<u>η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε</u> $\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|dx<\infty$. <u>Ας είναι, ακόμα,</u> λ <u>ένας θετικός αριθμός. Τότε</u>

$$\int_0^\lambda\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\cos sx\,dx\right]ds=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\left[\int_0^\lambda\cos sx\,ds\right]dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε, πρώτα, ότι το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους του τύπου του συμπεράσματος του Λήμματος ορίζεται, γιατί το Λήμμα 3 εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση

$$h^*(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\cos sx\,dx,\quad s\in\mathbb{R}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής. Εφαρμόζοντας επίσης το Λήμμα 3 για τη συνάρτηση $h_1(x)=h(x)$ για $x\geq 0$ και $h_1(x)=0$ για $x<0$ καθώς και για τη συνάρτηση $h_2(x)=h(x)$ για $x\leq 0$ και $h_2(x)=0$ για $x>0$, συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις

$$h_1^*(s)=\int_0^{\infty}h(x)\cos sx\,dx,\quad s\in\mathbb{R}\quad\text{και}\quad h_2^*(s)=\int_{-\infty}^{0}h(x)\cos sx\,dx,\quad s\in\mathbb{R}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς και επομένως ορίζονται τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\lambda\left[\int_0^{\infty}h(x)\cos sx\,dx\right]ds\quad\text{και}\quad\int_0^\lambda\left[\int_{-\infty}^{0}h(x)\cos sx\,dx\right]ds.$$

Το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους του τύπου που είναι για απόδειξη υπάρχει και είναι πεπερασμένο, αφού η συνάρτηση

$$\sigma(x)=\int_0^\lambda\cos sx\,ds=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda x}{x}, & \text{αν } x\in\mathbb{R}-\{0\}\\[2ex] \lambda, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

είναι συνεχής και φραγμένη.

Επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα, μπορούμε να θεωρήσουμε μια μη φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών $0=\xi_0<\xi_1<\xi_2<\ldots$ τέτοια ώστε, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n, η h να είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (ξ_n,ξ_{n+1}) και τα πλευρικά όρια $h(\xi_n+0)$ και $h(\xi_{n+1}-0)$ να υπάρχουν. Για οποιοδήποτε $n\in\{0,1,\ldots\}$, η συνάρτηση h_n με

$h_n(x)=h(x)$ για $x\in(\xi_n,\xi_{n+1})$, $h_n(\xi_n)=h(\xi_n+0)$ και $h_n(\xi_{n+1})=h(\xi_{n+1}-0)$

είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_n,\xi_{n+1}]$ και επομένως

$$\int_0^\lambda\left[\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}h_n(x)\cos sx\,dx\right]ds=\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}h_n(x)\left[\int_0^\lambda\cos sx\,ds\right]dx,$$

δηλαδή

$$\int_0^\lambda\left[\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} h(x)\cos sx\,dx\right]ds = \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} h(x)\left[\int_0^\lambda \cos sx\,ds\right]dx.$$

Τώρα, για κάθε θετικό ακέραιο N, παίρνουμε

$$\int_0^\lambda\left[\int_0^{\xi_N} h(x)\cos sx\,dx\right]ds = \int_0^\lambda\left[\sum_{n=1}^{N-1}\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} h(x)\cos sx\,dx\right]ds$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\int_0^\lambda\left[\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} h(x)\cos sx\,dx\right]ds$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} h(x)\left[\int_0^\lambda \cos sx\,ds\right]dx$$

$$= \int_0^{\xi_N} h(x)\left[\int_0^\lambda \cos sx\,ds\right]dx.$$

Ας είναι ε ένας θετικός αριθμός. Επειδή $\int_0^\infty |h(x)|dx < \infty$, ισχύει

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty |h(x)|dx = 0$$

και επομένως, αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \infty$, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε

$$\int_{\xi_N}^\infty |h(x)|dx < \varepsilon/\lambda \text{ για κάθε } N \geqq n_0.$$

Τότε, έχουμε

$$\left|\int_{\xi_N}^\infty h(x)\cos sx\,dx\right| < \varepsilon/\lambda \text{ για } N \geqq n_0 \text{ και για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

'Ετσι, για όλα τα $N \geqq n_0$, παίρνουμε

$$\left|\int_0^\lambda\left[\int_0^\infty h(x)\cos sx\,dx\right]ds - \int_0^{\xi_N} h(x)\left[\int_0^\lambda \cos sx\,ds\right]dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^\lambda\left[\int_0^\infty h(x)\cos sx\,dx\right]ds - \int_0^\lambda\left[\int_0^{\xi_N} h(x)\cos sx\,dx\right]ds\right|$$

$$= \left|\int_0^\lambda\left[\int_0^\infty h(x)\cos sx\,dx - \int_0^{\xi_N} h(x)\cos sx\,dx\right]ds\right|$$

$$= \left| \int_0^{\lambda} \left[\int_{\xi_N}^{\infty} h(x)\cos sx\,dx \right] ds \right| \leq \int_0^{\lambda} \left| \int_{\xi_N}^{\infty} h(x)\cos sx\,dx \right| ds$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\lambda} \int_0^{\lambda} ds = \varepsilon .$$

Επειδή

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\xi_N} h(x) \left[\int_0^{\lambda} \cos sx\,ds \right] dx = \int_0^{\infty} h(x) \left[\int_0^{\lambda} \cos sx\,ds \right] dx,$$

θα έχουμε

$$\left| \int_0^{\lambda} \left[\int_0^{\infty} h(x)\cos sx\,dx \right] ds - \int_0^{\infty} h(x) \left[\int_0^{\lambda} \cos sx\,ds \right] dx \right| \leq \varepsilon .$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, και άρα

$$(*) \qquad \int_0^{\lambda} \left[\int_0^{\infty} h(x)\cos sx\,dx \right] ds = \int_0^{\infty} h(x) \left[\int_0^{\lambda} \cos sx\,ds \right] dx .$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (*) για τη συνάρτηση h_1 με $h_1(x) = h(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ (η οποία πληροί τις συνθήκες του Λήμματος), παίρνουμε

$$\int_0^{\lambda} \left[\int_0^{\infty} h(-x)\cos sx\,dx \right] ds = \int_0^{\infty} h(-x) \left[\int_0^{\lambda} \cos sx\,ds \right] dx$$

ή

$$(**) \qquad \int_0^{\lambda} \left[\int_{-\infty}^{0} h(x)\cos sx\,dx \right] ds = \int_{-\infty}^{0} h(x) \left[\int_0^{\lambda} \cos sx\,ds \right] dx .$$

Τέλος, προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες (*) και (**), καταλήγουμε αμέσως στον τύπο του συμπεράσματος του Λήμματος.

Ο τύπος που εμφανίζεται στο παρακάτω Θεώρημα είναι γνωστός ως <u>ολοκληρωτικός τύπος του Fourier</u> (ή, ακόμα, ως <u>ολοκληρωτική παράσταση του Fourier</u>) για τη συνάρτηση f, το δε Θεώρημα αυτό αναφέρεται ως <u>ολοκληρωτικό Θεώρημα του Fourier</u>.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1</u>. <u>Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε</u> $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. <u>Τότε</u>

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du \right] ds \quad \underline{\text{για όλα τα}}\ x \in \mathbb{R}.$$

<u>Αν η f είναι συνεχής, τότε</u>

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du \right] ds \quad \underline{\text{για κάθε}}\ x \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε ένα τυχόντα πραγματικό αριθμό x. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα, οπότε το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση f_1 με

$$f_1(v) = f(x-v), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Ακόμα, η συνάρτηση f_1 είναι τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(v)|dv < \infty$, αφού $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|du < \infty$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3, ο τύπος

$$f_1^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)\cos sv\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\, du, \quad s \in \mathbb{R}$$

ορίζει μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής. Στη συνέχεια, για κάθε $\lambda > 0$, θέτουμε

$$I(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} f_1^*(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)\cos sv\, dv\right]ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\, du\right]ds,$$

οπότε το Λήμμα 4 εξασφαλίζει ότι

$$I(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(v)\left[\int_0^{\lambda}\cos svds\right]dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\left[\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right]dv.$$

Τώρα, θεωρούμε ένα θετικό αριθμό b και, για κάθε $\lambda > 0$, παίρνουμε

$$I(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{b} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv + \int_{-b}^{0} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv\right.$$

$$\left.+\int_b^{\infty} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv + \int_{-\infty}^{-b} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{b} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv + \int_0^{b} f(x+v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv\right.$$

$$\left.+\int_b^{\infty} f(x-v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv + \int_b^{\infty} f(x+v)\left(\int_0^{\lambda}\cos sv\, ds\right)dv\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{b} f(x-v)\ \frac{\sin\lambda v}{v}\ dv + \int_0^{b} f(x+v)\ \frac{\sin\lambda v}{v}\ dv + \int_b^{\infty}\frac{f(x-v)}{v}\sin\lambda v\, dv\right.$$

$$\left.+\int_b^{\infty}\frac{f(x+v)}{v}\sin\lambda v\, dv\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{b} h(v)\ \frac{\sin\lambda v}{v}\ dv + \int_0^{b} h_1(v)\ \frac{\sin\lambda v}{v}\ dv + \int_0^{\infty}\varphi(v)\sin\lambda v\, dv\right.$$

$$\left.+\int_b^{\infty}\varphi_1(v)\sin\lambda v\, dv\right],$$

όπου

$$h(v) = f(x-v) \text{ και } h_1(v) = f(x+v) \text{ για } v \in [0,b]$$

και

$$\varphi(v) = \frac{1}{v} f(x-v) \text{ και } \varphi_1(v) = \frac{1}{v} f(x+v) \text{ για } x \in [b,\infty).$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις h και h_1 είναι συνεχώς παραγωγίσιμες κατά τμήματα στο διάστημα $[0,b]$ και επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 1, είναι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b h(v)\frac{\sin \lambda v}{v}dv = \frac{\pi}{2}\, h(0+0) \text{ και } \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^b h_1(v)\,\frac{\sin\lambda v}{v}\, dv = \frac{\pi}{2}\, h_1(0+0).$$

Εξάλλου, οι συναρτήσεις φ και φ_1 είναι συνεχείς κατά τμήματα σε κάθε διάστημα της μορφής $[b',\infty)$, $b' > b$, και ακόμα είναι

$$\int_b^\infty |\varphi(v)|dv \leqq \frac{1}{b}\int_b^\infty |f(x-v)|dv = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{x-b} |f(u)|du \leqq \frac{1}{b}\int_{-\infty}^\infty |f(u)|du < \infty$$

και

$$\int_b^\infty |\varphi_1(v)|dv \leqq \frac{1}{b}\int_b^\infty |f(x+v)|dv = \frac{1}{b}\int_{x+b}^\infty |f(u)|du \leqq \frac{1}{b}\int_{-\infty}^\infty |f(u)|du < \infty.$$

Έτσι, το Λήμμα 2 εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_b^\infty \varphi(v)\sin\lambda v\, dv = 0 \text{ και } \lim_{\lambda\to\infty}\int_b^\infty \varphi_1(v)\sin\lambda v\, dv = 0.$$

Άρα, έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos s(x-u)\,du\right]ds = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\, h(0+0) + \frac{\pi}{2}\, h_1(0+0)+0+0\right]$$

$$= \frac{h(0+0)+h_1(0+0)}{2} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

αφού $h(0+0) = f(x-0)$ και $h_1(0+0) = f(x-0)$.

<u>Ας είναι</u> f <u>όπως στο Θεώρημα</u> 1. <u>Τότε το δεύτερο μέρος του ολοκληρωτικού τύπου του Fourier για τη συνάρτηση</u> f <u>μπορεί να γραφεί ως εξής</u>:

$$\int_0^\infty [A(s)\cos sx + B(s)\sin sx]ds,\quad x \in \mathbb{R},$$

<u>όπου</u>

$$A(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos su\, du,\ s\in\mathbb{R} \ \underline{\text{και}}\ B(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin su\, du,\ s\in\mathbb{R}$$

(και έτσι μπορεί να γίνει ένας παραλληλισμός μεταξύ του ολοκληρωτικού τύπου του Fourier και του τύπου για την κατά σημείο σύγκλιση της σειράς Fourier). Πραγματικά· για τυχόν $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du\right]ds =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,(\cos sx\cos su+\sin sx\sin su)\,du\right]ds$$

$$=\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos su\,du\right]\cos sx+\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin su\,du\right]\sin sx\right\}ds$$

$$=\int_0^{\infty}[A(s)\cos sx+B(s)\sin sx]ds.$$

Τα παρακάτω Θεωρήματα 1α και 1β είναι, ουσιαστικά, πορίσματα του Θεωρήματος 1.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1α</u>. <u>Ας είναι</u> f <u>μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο</u> $[0,\infty)$, <u>η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του</u> $[0,\infty)$ <u>και τέτοια ώστε</u> $\int_0^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. <u>Τότε</u>

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\cos su\,du\right]\cos sx\,ds=\begin{cases}\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{για } x>0\\[2ex] f(0+0), & \text{για } x=0.\end{cases}$$

<u>Αν η</u> f <u>είναι συνεχής, τότε</u>

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\cos su\,du\right]\cos sx\,ds \quad \text{για κάθε } x\geq 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την άρτια επέκταση f_e της συνάρτησης f:

$$f_e(x)=f(x)\ \text{για}\ x\geq 0,\quad f_e(x)=f(-x)\ \text{για}\ x<0.$$

Η f_e είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_e(x)|dx=\int_{-\infty}^{0}|f(-x)|dx+\int_0^{\infty}|f(x)|dx=2\int_0^{\infty}|f(x)|dx<\infty.$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, για κάθε $x\geq 0$ είναι

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_e(u)\cos s(x-u)\,du\right]ds=\frac{f_e(x+0)+f_e(x-0)}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{αν } x>0\\[2ex] f(0+0), & \text{αν } x=0.\end{cases}$$

Αλλά, για οποιοδήποτε $x \geq 0$, έχουμε για κάθε $s \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(u)\cos s(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\cos s(x-u)\,du + \int_{0}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du$$

$$= \int_0^{\infty} f(u)\cos s(x+u)\,du + \int_0^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du$$

$$= \int_0^{\infty} f(u)[\cos s(x+u)+\cos s(x-u)]du$$

$$= 2\left[\int_0^{\infty} f(u)\cos su\,du\right]\cos sx\,,$$

και έτσι αποδείχθηκε το Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1β. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[0,\infty)$ με $f(0)=0$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$ και η οποία είναι τέτοια ώστε $\int_0^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Τότε

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\sin su\,du\right]\sin sx\,ds = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{για } x>0 \\ 0, & \text{για } x=0. \end{cases}$$

Αν η f είναι συνεχής, τότε

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\sin u\,du\right]\sin sx\,ds \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας είναι f_o η περιττή επέκταση της f, δηλαδή

$$f_o(x) = f(x) \text{ για } x \geq 0, \quad f_o(x) = -f(-x) \text{ για } x<0.$$

Η συνάρτηση f_o είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |f_o(x)|dx < \infty$. Επομένως, το Θεώρημα 1 εξασφαλίζει ότι για οποιοδήποτε $x \geq 0$ είναι

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_o(u)\cos s(x-u)\,du\right]ds = \frac{f_o(x+0)+f_o(x-0)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0. \end{cases}$$

Όμως, για τυχόντα $x \geq 0$ και $s \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_o(u)\cos s(x-u)\,du = -\int_{-\infty}^{0} f(-u)\cos s(x-u)\,du + \int_{0}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du$$
$$= \int_{0}^{\infty} f(u)[-\cos s(x+u)+\cos s(x-u)]du$$
$$= 2\left[\int_{0}^{\infty} f(u)\sin su\,du\right]\sin sx.$$

1.3. <u>Ο μετασχηματισμός Fourier. Ο αντίστροφος μετασχηματιμός Fourier</u>

Αν $\sigma,\tau \in \mathbb{R}$, τότε $|\sigma+i\tau| = (\sigma^2+\tau^2)^{1/2}$ και $e^{i\tau} = \cos\tau + i\sin\tau$. Για τυχούσα συνάρτηση $f \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$ και για οποιοδήποτε $s \in \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx$ υπάρχει, αφού

$$|f(x)e^{-isx}| = |f(x)|\,|e^{-isx}| = |f(x)|\,|\cos sx - i\sin sx| = |f(x)|$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

'Ετσι, μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Αν $f \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$, τότε η (μιγαδική) συνάρτηση $\mathcal{F}[f]$ που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με τον τύπο

$$\mathcal{F}[f](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx, \quad s \in \mathbb{R}$$

λέμε ότι είναι ο <u>μετασχηματισμός Fourier</u> της συνάρτησης f.

Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία της απόδειξης του Λήμματος 3 με το ημίτονο στη θέση του συνημιτόνου, έχουμε τότε την απόδειξη του παρακάτω Λήμματος 3'.

<u>ΛΗΜΜΑ 3'</u>. <u>Ας είναι h όπως στο Λήμμα 3. Τότε ο τύπος</u>

$$h^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\sin sx\,dx, \quad s \in \mathbb{R}$$

<u>ορίζει μια ομοιόμορφα συνεχή πραγματική συνάρτηση στο</u> $\mathbb{R}$.

Αν $f \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$, τότε για όλα τα $s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathcal{F}[f](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos sx - i\sin sx)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx\right],$$

και έτσι τα Λήμματα 3 και 3' εξασφαλίζουν ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης f με $f \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$, είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, έχουμε

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos s(x-u)\,du\right]ds \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αλλά είναι

$$\cos s(x-u) = \frac{1}{2}\left[e^{is(x-u)}+e^{-is(x-u)}\right] \quad \text{για } s,x,u \in \mathbb{R}$$

και έτσι, για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{is(x-u)}du+\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-is(x-u)}du\right]ds$$

$$= \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-isu}du\right]e^{isx}+\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{isu}du\right]e^{-isx}\right\}ds$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-isu}du\right]e^{isx}ds+\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{isu}du\right]e^{-isx}ds$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-isu}du\right]e^{isx}ds+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-isu}du\right]e^{isx}ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-isu}du\right]e^{isx}ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](s)e^{isx}ds.$$

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει το παρακάτω θεώρημα, το οποίο δεν είναι παρά μια άλλη ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Ας είναι f όπως στο Θεώρημα 1. Τότε

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](s)e^{isx}ds \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι συνεχής, τότε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](s)e^{isx}ds \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ας είναι, τώρα, $f \in \mathcal{R}[0,\infty)$. Τότε ο τύπος

$$\mathcal{F}_c[f](s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos sx\,dx, \quad s \geq 0$$

ορίζει μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία λέμε ότι είναι ο <u>μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων</u> της συνάρτησης f. Εφόσον $f(0) = 0$, τότε με τον τύπο

$$\mathcal{F}_s[f](s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin sx\,dx, \quad s \geq 0$$

ορίζεται μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία καλείται ο <u>μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων</u> της f.

Αν $f \in \mathcal{R}[0,\infty)$ και εφαρμόσουμε τα Λήμματα 3 και 3' για τη συνάρτηση h με $h(x) = f(x)$ για $x \geq 0$ και $h(x) = 0$ για $x < 0$, συμπεραίνουμε ότι:

<u>Ο μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων μιας συνάρτησης f με $f \in \mathcal{R}[0,\infty)$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής πραγματική συνάρτηση. Επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{R}[0,\infty)$ με $f(0) = 0$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής πραγματική συνάρτηση</u>.

Τα παρακάτω Θεωρήματα 3α και 3β είναι, ουσιαστικά, ισοδύναμες διατυπώσεις των Θεωρημάτων 1α και 1β αντίστοιχα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3α</u>. <u>Ας είναι f όπως στο Θεώρημα 1α. Τότε</u>

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](s)\cos sx\,ds = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{για } x > 0 \\ \\ f(0+0), & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

<u>Αν η f είναι συνεχής, τότε</u>

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](s)\cos sx\,ds \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3β</u>. <u>Ας είναι f όπως στο Θεώρημα 1β. Τότε</u>

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_s[f](s)\sin sx\,ds = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & \text{για } x > 0 \\ \\ 0, & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

<u>Αν η f είναι συνεχής, τότε</u>

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_s[f](s)\sin sx\, ds \quad \underline{\text{για}} \ \underline{\text{κάθε}} \ x \geq 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Ας είναι $f \in \mathcal{R}[0,\infty)$ και ας θεωρήσουμε την άρτια επέκταση f_e της f και, εφόσον $f(0)=0$, την περιττή επέκταση f_o της f. Τότε για κάθε $s \geq 0$

$$\mathcal{F}_c[f](s) = 2\mathcal{F}[f_e](s) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}_s[f](s) = 2i\mathcal{F}[f_o](s).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι $f_e(x) = f(x)$ για $x \geq 0$ και $f_e(x) = f(-x)$ για $x<0$. Έτσι, για κάθε $s \geq 0$, παίρνουμε

$$\mathcal{F}[f_e](s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)e^{-isx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 f(-x)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)e^{-isx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)e^{isx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)\left(e^{-isx}+e^{isx}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos sx\, dx = \frac{1}{2}\mathcal{F}_c[f](s).$$

Επίσης, επειδή $f_o(x) = f(x)$ για $x \geq 0$ και $f_o(x) = -f(-x)$ για $x<0$, για οποιοδήποτε $s \geq 0$ έχουμε

$$\mathcal{F}[f_o](s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)e^{-isx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 f(-x)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)\left(e^{-isx}-e^{isx}\right)dx$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin sx\, dx = -\frac{i}{2}\mathcal{F}_s[f](s).$$

Ας είναι F μια (πραγματική ή μιγαδική) συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^\infty |F(s)|ds < \infty$. Τότε ο τύπος

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \int_{-\infty}^\infty F(s)e^{isx}ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

ορίζει μια συνάρτηση $\mathcal{F}^{-1}[F]$, η οποία καλείται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της F. Απ' το Θεώρημα 3 προκύπτει ότι:

Αν η συνάρτηση f είναι όπως στο Θεώρημα 1 και, επιπλέον, η f έχει την ιδιότητα ότι $f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (όπως στην περίπτωση που αυτή είναι συνεχής), τότε

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right] = f, \text{ δηλαδή } f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}[f] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f.$$

Επίσης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων μιας συνάρτησης $F \in \mathcal{R}[0,\infty)$ ορίζεται με τον τύπο

$$\mathcal{F}_c^{-1}[F](x) = \int_0^{\infty} F(s)\cos sx\,ds, \quad x \geq 0$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων μιας συνάρτησης $F \in \mathcal{R}[0,\infty)$ με $F(0) = 0$ ορίζεται με τον τύπο

$$\mathcal{F}_s^{-1}[F](x) = \int_0^{\infty} F(s)\sin sx\,ds, \quad x \geq 0.$$

Τα Θεωρήματα 3α και 3β εξασφαλίζουν ότι:

Αν η συνάρτηση f είναι όπως στο θεώρημα 1α (αντίστοιχα, όπως στο θεώρημα 1β) και, επιπλέον, είναι τέτοια ώστε $f(0) = f(0+0)$ και $f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)]$ για κάθε $x > 0$ (αυτό συμβαίνει όταν η f είναι συνεχής), τότε

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left[\mathcal{F}_c[f]\right] = f \quad \left(\text{αντίστοιχα, } \mathcal{F}_s^{-1}\left[\mathcal{F}_s[f]\right] = f\right).$$

1.4. Βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Θα δώσουμε εδώ ορισμένες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Η πρώτη απ'αυτές είναι η γραμμικότητα του τελεστή $\mathcal{F}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Αν $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$ και c_1, c_2 είναι πραγματικές σταθερές, τότε

$$\mathcal{F}[c_1f_1+c_2f_2] = c_1\mathcal{F}[f_1]+c_2\mathcal{F}[f_2].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για όλα τα $s \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[c_1f_1+c_2f_2](s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]e^{-isx}dx \\
&= c_1\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-isx}dx\right]+c_2\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-isx}dx\right] \\
&= c_1\mathcal{F}[f_1](s)+c_2\mathcal{F}[f_2](s).
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των Θεωρημάτων 4 και 5 ή και απευθείας απ'τους ορισμούς, προκύπτει ότι:

<u>Οι τελεστές</u> $\mathcal{F}_c$ <u>και</u> $\mathcal{F}_s$ <u>είναι γραμμικοί</u>.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 6</u>. <u>Αν</u> $f \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$, $c \in \mathbb{R}$ <u>και</u> $g(x) = f(x-c)$ <u>για</u> $x \in \mathbb{R}$, <u>τότε</u>

$$\mathcal{F}[g](s) = e^{-isc}\mathcal{F}[f](s) \ \underline{\text{για}}\ s \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-c)e^{-isx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-is(x+c)}dx \\ &= e^{-isc}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx\right] = e^{-isc}\mathcal{F}[f](s).\end{aligned}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 7</u>. <u>Αν</u> $f \in \mathcal{R}(-\infty,\infty)$, $c \in \mathbb{R}-\{0\}$ <u>και</u> $g(x) = f(cx)$ <u>για</u> $x \in \mathbb{R}$, <u>τότε</u>

$$\mathcal{F}[g](s) = (1/|c|)\mathcal{F}[f](s/c) \ \underline{\text{για}}\ s \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-isx}dx \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{c}\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s/c)x}dx\right], & \text{αν } c > 0 \\ -\dfrac{1}{c}\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s/c)x}dx\right], & \text{αν } c < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|c|}\mathcal{F}[f](s/c).\end{aligned}$$

Με μια εντελώς ανάλογη διαδικασία μ'αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην Παράγραφο 0.3 του Κεφαλαίου IX για την απόδειξη του Λήμματος 0, μπορεί ν'αποδειχθεί το παρακάτω Λήμμα που είναι επίσης γνωστό ως Λήμμα Riemann-Lebesgue.

<u>ΛΗΜΜΑ 0'</u> (<u>Λήμμα Riemann-Lebesgue</u>). <u>Αν</u> g <u>είναι μια πραγματική</u>

<u>συνάρτηση που είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα</u> $[a,b]$, <u>τότε</u>

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(x)\cos\lambda x\,dx = 0.$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία της απόδειξης του Λήμματος 2 με το συνημίτονο στη θέση του ημιτόνου και με χρήση του Λήμματος 0′ αντί του Λήμματος 0, έχουμε τότε την απόδειξη του Λήμματος 2′, το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε μαζί με το Λήμμα 2 στην απόδειξη του επομένου Θεωρήματος.

<u>ΛΗΜΜΑ 2′</u>. <u>Ας είναι</u> φ <u>όπως στο Λήμμα</u> 2. <u>Τότε</u>

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_b^\infty \varphi(x)\cos\lambda x\,dx = 0.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 8</u>. <u>Ας είναι</u> f <u>μια πραγματική συνάρτηση στο</u> $\mathbb{R}$, <u>η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε</u> $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$. <u>Τότε</u>

$$\lim_{s\to\pm\infty}\mathcal{F}[f](s) = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για όλα τα $s\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
2\pi\mathcal{F}[f](s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos sx - i\sin sx)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx\\
&= \left[\int_0^{\infty} f(x)\cos sx\,dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\cos sx\,dx\right]\\
&\qquad -i\left[\int_0^{\infty} f(x)\sin sx\,dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\sin sx\,dx\right]\\
&= \int_0^{\infty}[f(x)+f(-x)]\cos sx\,dx - i\int_0^{\infty}[f(x)-f(-x)]\sin sx\,dx\\
&= \int_0^{\infty}\varphi_1(x)\cos sx\,dx - i\int_0^{\infty}\varphi_2(x)\sin sx\,dx,
\end{aligned}$$

όπου

$$\varphi_1(x) = f(x)+f(-x) \text{ και } \varphi_2(x) = f(x)-f(-x) \text{ για } x\geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις φ_1 και φ_2 είναι συνεχείς κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$ και, επιπλέον, είναι

$$\int_0^\infty |\varphi_i(x)|dx \leq \int_0^\infty |f(x)|dx + \int_0^\infty |f(-x)|dx = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty \quad (i=1,2).$$

Έτσι, τα Λήμματα 2 και 2' εξασφαλίζουν ότι

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \varphi_1(x)\cos sx\,dx = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \varphi_2(x)\sin sx\,dx = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{F}[f](s) = 0.$$

Τώρα, θέτουμε $\hat{f}(x) = -f(-x)$ για $x \in \mathbb{R}$, οπότε παίρνουμε για $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty [-f(-x)]\,e^{-i(-s)x}dx = \mathcal{F}[\hat{f}](-s).$$

Η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(x)|dx < \infty$. Άρα, έχουμε

$$\lim_{s\to-\infty} \mathcal{F}[f](s) = \lim_{s\to-\infty} \mathcal{F}[\hat{f}](-s) = 0.$$

Με ένα συνδυασμό των Θεωρημάτων 4 και 8 ή και απευθείας με χρήση των Λημμάτων 2 και 2', συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

<u>Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$ και τέτοια ώστε $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$, τότε</u>

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{F}_c[f](s) = 0 \quad \underline{\text{και}} \quad (\underline{\text{εφόσον}}\ f(0)=0)\ \lim_{s\to\infty} \mathcal{F}_s[f](s) = 0.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 9</u>. <u>Ας είναι f μια n-φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, όπου η $f^{(n)}$ είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα, και ας υποθέσουμε ότι $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty$ και $\int_{-\infty}^\infty |f^{(n)}(x)|dx < \infty$ καθώς και ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f^{(k)}(x) = 0$ $(k=0,1,\dots,n-1)$. Τότε</u>

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](s) = (is)^n \mathcal{F}[f](s) \quad \underline{\text{για κάθε}}\ s \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσουμε τυχόν $s \in \mathbb{R}$. Αν a είναι ένας θετικός αριθμός, τότε, για τυχόν $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, η συνάρτηση $f^{(k+1)}$ είναι συνεχής κατά τμήματα στο διάστημα $[0,a]$ (αν $k < n-1$, η $f^{(k+1)}$ είναι συνεχής στο $[0,a]$) και έτσι, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βρίσκουμε

$$\int_0^a f^{(k+1)}(x)e^{-isx}dx = f^{(k)}(x)e^{-isx}\Big|_0^a + is\int_0^a f^{(k)}(x)e^{-isx}dx,$$

δηλαδή

$$\int_0^a f^{(k+1)}(x)e^{-isx}dx = f^{(k)}(a)e^{-isa} - f^{(k)}(0) + is\int_0^a f^{(k)}(x)e^{-isx}dx.$$

Με τη βοήθεια του τύπου αυτού, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, για όλα τα $a > 0$, ισχύει

$$\int_0^a f^{(n)}(x)e^{-isx}dx = \sum_{k=0}^{n-1}(is)^{n-1-k}f^{(k)}(a)e^{-isa} - \sum_{k=0}^{n-1}(is)^{n-1-k}f^{(k)}(0) + (is)^n\int_0^a f(x)e^{-isx}dx.$$

Επειδή $\lim_{a\to\infty}[f^{(k)}(a)e^{-isa}] = 0$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$, παίρνουμε ότι

$$(*) \quad \int_0^\infty f^{(n)}(x)e^{-isx}dx = -\sum_{k=0}^{n-1}(is)^{n-1-k}f^{(k)}(0) + (is)^n\int_0^\infty f(x)e^{-isx}dx.$$

Με ανάλογη διαδικασία, προκύπτει ότι για κάθε $a > 0$ είναι

$$\int_{-a}^0 f^{(n)}(x)e^{-isx}dx = \sum_{k=0}^{n-1}(is)^{n-1-k}f^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1}(is)^{n-1-k}f^{(k)}(-a)e^{isa} + (is)^n\int_{-a}^0 f(x)e^{-isx}dx$$

και έτσι, αφού $\lim_{a\to\infty}[f^{(k)}(-a)e^{isa}] = \lim_{a\to-\infty}[f^{(k)}(a)e^{-isa}] = 0$ για $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, θα ισχύει

$$(**) \quad \int_{-\infty}^0 f^{(n)}(x)e^{-isx}dx = \sum_{k=0}^{n-1}(is)^{n-1-k}f^{(k)}(0) + (is)^n\int_{-\infty}^0 f(x)e^{-isx}dx.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες (*) και (**), έχουμε

$$\int_{-\infty}^\infty f^{(n)}(x)e^{-isx}dx = (is)^n\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-isx}dx,$$

δηλαδή

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](s) = (is)^n\mathcal{F}[f](s).$$

Στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, αρχικών-συνοριακών τιμών και συνοριακών τιμών για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, μας χρειάζεται το Θεώρημα 9 για $n = 2$ και για πραγματικές συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, χρειαζόμαστε το ακόλουθο Θεώρημα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 9*</u>. <u>Αν f είναι μια δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη</u>

<u>πραγματική συνάρτηση στο</u> $\mathbb{R}$ <u>με</u> $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ <u>και</u> $\int_{-\infty}^{\infty}|f''(x)|dx<\infty$ <u>και τέτοια ώστε</u> $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=0$, <u>τότε</u>

$$\mathcal{F}[f''](s)=-s^2\mathcal{F}[f](s) \text{ για κάθε } s\in\mathbb{R}.$$

Επίσης, για τον ίδιο σκοπό, μας χρειάζονται τα παρακάτω Θεωρήματα $9\overset{*}{\alpha}$ και $9\overset{*}{\beta}$, που αναφέρονται στον μετασχηματισμό Fourier συνημιτόνων και στον μετασχηματισμό Fourier ημιτόνων αντίστοιχα. Θ'αποδείξουμε μόνο το Θεώρημα $9\overset{*}{\alpha}$, δεδομένου ότι η απόδειξη του Θεωρήματος $9\overset{*}{\beta}$ μπορεί να γίνει με μια ανάλογη διαδικασία. Ας σημειώσουμε, ακόμα, ότι στα Θεωρήματα αυτά μπορεί ν'αντικατασταθεί η υπόθεση "η f'' είναι συνεχής στο $[0,\infty)$" με την ασθενέστερη υπόθεση "η f'' είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$".

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ $9\overset{*}{\alpha}$</u>. <u>Αν</u> f <u>είναι μια δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο</u> $[0,\infty)$ <u>με</u> $\int_0^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ <u>και</u> $\int_0^{\infty}|f''(x)|dx<\infty$ <u>και τέτοια ώστε</u> $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$, <u>τότε</u>

$$\mathcal{F}_c[f''](s)=-\frac{2}{\pi}f'(0)-s^2\mathcal{F}_c[f](s) \text{ για κάθε } s\geq 0.$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ $9\overset{*}{\beta}$</u>. <u>Αν</u> f <u>είναι μια δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο</u> $[0,\infty)$ <u>με</u> $f(0)=f''(0)=0$ <u>και</u> $\int_0^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, $\int_0^{\infty}|f''(x)|dx<\infty$, <u>και τέτοια ώστε</u> $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$, <u>τότε</u>

$$\mathcal{F}_s[f''](s)=-s^2\mathcal{F}_s[f](s) \text{ για κάθε } s\geq 0.$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ $9\overset{*}{\alpha}$</u>. Ας θεωρήσουμε τυχόν $s\geq 0$. Είναι

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)\sin sx]=\lim_{x\to\infty}[f'(x)\cos sx]=0.$$

Για κάθε $a>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^a f''(x)\cos sx\,dx &= f'(x)\cos sx\Big|_0^a+s\int_0^a f'(x)\sin sx\,dx\\ &= f'(x)\cos sx\Big|_0^a+sf(x)\sin sx\Big|_0^a-s^2\int_0^a f(x)\cos sx\,dx\\ &= f'(a)\cos sa-f'(0)+sf(a)\sin sa-s^2\int_0^a f(x)\cos sx\,dx\end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_0^\infty f''(x)\cos sx\,dx = \lim_{a\to\infty}[f'(a)\cos sa] - f'(0) + s\lim_{a\to\infty}[f(a)\sin sa] - s^2\int_0^\infty f(x)\cos sx\,dx$$

$$= -f'(0) - s^2\int_0^\infty f(x)\cos sx\,dx,$$

απ'όπου προκύπτει το συμπέρασμα του Θεωρήματός μας.

Ας είναι f και g δύο πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοιες ώστε $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$ και $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx < \infty$, και μια τουλάχιστον απ'αυτές είναι φραγμένη. Αποδεικνύεται ότι: Ο τύπος

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad x\in\mathbb{R}$$

ορίζει μια ομοιόμορφα συνεχή πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|dx < \infty$. Η συνάρτηση $f*g$ λέμε ότι είναι η συνέλιξη των f και g (είναι $f*g = g*f$). Δίνουμε, χωρίς απόδειξη, το παρακάτω Θεώρημα που είναι γνωστό ως Θεώρημα συνέλιξης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 (Θεώρημα συνέλιξης). Αν f και g είναι όπως παραπάνω, τότε

$$\mathcal{F}[f*g] = 2\pi\,\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g].$$

1.5. Συναρτήσεις μοναδιαίας ώθησης. Η δέλτα συνάρτηση του Dirac

Ας είναι $a \geq 0$ μια σταθερά. Αν ε είναι μια "μικρή" θετική σταθερά, τότε η συνάρτηση $I_{a,\varepsilon}$ με

$$I_{a,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{αν } a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \\ 0, & \text{αν } x \leq a-\varepsilon \text{ ή } x \geq a+\varepsilon \end{cases}$$

λέμε ότι είναι μια συνάρτηση μοναδιαίας ώθησης· αν, επιπλέον, h είναι μια "μεγάλη" θετική σταθερά, τότε η συνάρτηση $I_{a,\varepsilon,h}$ με

$$I_{a,\varepsilon,h}(x) = \begin{cases} h, & \text{αν } a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \\ 0, & \text{αν } x \leq a-\varepsilon \text{ ή } x \geq a+\varepsilon \end{cases}$$

θα λέμε ότι είναι μια <u>συνάρτηση ώθησης</u>. Παρατηρούμε ότι $I_{a,\varepsilon,h} = 2\varepsilon h\, I_{a,\varepsilon}$. Τώρα, για $\varepsilon > 0$, παίρνουμε

$$\Omega_{a,\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} I_{a,\varepsilon}(x)\,dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dx = 1.$$

Έτσι, στο όριο για $\varepsilon \to 0$, έχουμε

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} I_{a,\varepsilon}(x) = 0 \text{ για } x \neq a \text{ και } \lim_{\varepsilon\to 0+0} \Omega_{a,\varepsilon} = 1.$$

Απ'το συμπέρασμα αυτό παίρνουμε τη <u>δέλτα συνάρτηση του Dirac</u> δ_a, η οποία πληροί τις συνθήκες

$$\delta_a(x) = 0 \text{ για } x \neq a \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\,dx = 1.$$

Για $a = 0$ έχουμε τη δέλτα συνάρτηση του Dirac δ_0, που τη συμβολίζουμε και πιο απλά με δ. Είναι $\delta_a(x) = \delta(x-a)$ για όλα τα x, και οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\delta(x-a) = 0 \text{ για } x \neq a \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1.$$

Ας είναι, πάλι, a μια μη αρνητική σταθερά. Αν $\varepsilon > 0$, τότε για $s \neq 0$ έχουμε

$$\mathcal{F}[I_{a,\varepsilon}](s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_{a,\varepsilon}(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}e^{-isx}dx = -\frac{1}{4\pi\varepsilon is}\Big[e^{-isx}\Big]_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}$$

$$= -\frac{e^{-isa}}{4\pi\varepsilon is}\left(e^{-is\varepsilon} - e^{is\varepsilon}\right) = -\frac{e^{-isa}}{4\pi\varepsilon is}(-2i\sin s\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}e^{-isa}\,\frac{\sin s\varepsilon}{s\varepsilon},$$

ενώ για $s = 0$ παίρνουμε

$$\mathcal{F}[I_{a,\varepsilon}](0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_{a,\varepsilon}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi},$$

δηλαδή είναι

$$\mathcal{F}[I_{a,\varepsilon}](s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-isa}\,\dfrac{\sin s\varepsilon}{s\varepsilon}, & \text{για } s \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}, & \text{για } s = 0. \end{cases}$$

Τώρα, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της δέλτα συνάρτησης του Dirac δ_a με τον τύπο

$$\mathcal{F}[\delta_a](s) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \mathcal{F}[I_{a,\varepsilon}](s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, έχουμε (αφού $\lim_{\varepsilon\to 0+0} [(\sin s\varepsilon)/(s\varepsilon)] = 1$ για $s \neq 0$)

$$\mathcal{F}[\delta_a](s) = \frac{1}{2\pi} e^{-isa} \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα περιέχονται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11. Ας είναι a μια μη αρνητική σταθερά. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης μοναδιαίας ώθησης

$$I_{a,\varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{αν } a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \\ 0, & \text{αν } x \leq a-\varepsilon \text{ ή } x \geq a+\varepsilon, \end{cases}$$

όπου ε είναι μια θετική σταθερά, δίνεται απ' τον τύπο

$$\mathcal{F}[I_{a,\varepsilon}](s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-isa} \frac{\sin s\varepsilon}{s\varepsilon}, & \text{για } s \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{για } s = 0. \end{cases}$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier της δέλτα συνάρτησης του Dirac δ_a είναι

$$\mathcal{F}[\delta_a](s) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0+0} \mathcal{F}[I_{a,\varepsilon}](s) = \frac{1}{2\pi} e^{-isa} \text{ για } s \in \mathbb{R}.$$

1.6. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} \cos sx \, ds \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και είναι $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = 2 < \infty$. Για $s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathcal{F}[f](s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-isx} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{-(1+is)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(1-is)x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+is} + \frac{1}{1-is}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+s^2}.$$

Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και επομένως, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3, για τυχόν $x \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$e^{-|x|}=f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}[f](s)e^{isx}ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+s^2}e^{isx}ds$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}e^{isx}ds+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+s^2}e^{isx}ds\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}(e^{isx}+e^{-isx})ds$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+s^2}\cos sx\,ds\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με $f(x)=1$ για $|x|\leq 1$ και $f(x)=0$ για $|x|>1$, και ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\cos sx\,ds=\begin{cases}1, & \text{για } |x|<1\\ 1/2, & \text{για } |x|=1\\ 0, & \text{για } |x|>1.\end{cases}$$

<u>Λύση</u>. Η f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα. Επίσης, είναι $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=2<\infty$. Για κάθε $s\neq 0$, παίρνουμε

$$\mathfrak{F}[f](s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-isx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-isx}dx=-\frac{1}{2\pi is}(e^{-is}-e^{is})=\frac{\sin s}{\pi s},$$

ενώ

$$\mathfrak{F}[f](0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}dx=\frac{1}{\pi}\,.$$

Επομένως

$$\mathfrak{F}[f](s)=\begin{cases}\dfrac{\sin s}{\pi s}, & \text{για } s\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}, & \text{για } s=0.\end{cases}$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι η συνάρτηση f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}[f](s)e^{isx}ds=\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{\pi s}e^{isx}ds+\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin s}{\pi s}e^{isx}ds$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}e^{isx}ds+\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}e^{-isx}ds\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\left(e^{isx}+e^{-isx}\right)ds$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\cos sx\,ds.$$

Αλλά, είναι

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\begin{cases}1, & \text{για } |x|<1\\ \frac{1}{2}, & \text{για } |x|=1\\ 0, & \text{για } |x|>1.\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης f με $f(x)=e^{-ax}$, $x\geqq 0$ (όπου $a>0$ είναι μια σταθερά), και ν'αποδειχθεί ότι

$$e^{-ax}=\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^2+a^2}\cos sx\, ds \quad \text{για κάθε } x\geqq 0.$$

Λύση. Η f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και, επιπλέον, είναι $\int_0^\infty |f(x)|dx=\frac{1}{a}<\infty$. Για όλα τα $s\geqq 0$, έχουμε

$$\mathcal{F}_c[f](s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\cos sx\, dx=-\frac{2}{\pi a}e^{-ax}\cos sx\Big|_0^\infty-\frac{2s}{\pi a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin sx\, dx$$

$$=-\frac{2}{\pi a}e^{-ax}\cos sx\Big|_0^\infty+\frac{2s}{\pi a^2}e^{-ax}\sin sx\Big|_0^\infty-\frac{2s^2}{\pi a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos sx\, dx$$

$$=\frac{2}{\pi a}-\frac{2s^2}{\pi a^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos sx\, dx=\frac{2}{\pi a}-\frac{s^2}{a^2}\mathcal{F}_c[f](s).$$

'Ετσι, παίρνουμε

$$\mathcal{F}_c[f](s)=\frac{2a}{\pi}\frac{1}{s^2+a^2},\quad s\geqq 0.$$

Τώρα, επειδή η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,\infty)$, με χρήση του Θεωρήματος 3α, για κάθε $x\geqq 0$ έχουμε

$$e^{-ax}=f(x)=\int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](s)\cos sx\, ds=\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s^2+a^2}\cos sx\, ds.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων της συνάρτησης f με $f(0)=0$ και $f(x)=e^{ax}$ για $x>0$ (όπου $a>0$ είναι μια σταθερά), και ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{s}{s^2+a^2}\sin sx\, ds=\begin{cases}e^{-ax}, & \text{για } x>0\\ 0, & \text{για } x=0.\end{cases}$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και, επιπλέον, έχουμε $\int_0^\infty |f(x)|dx = \frac{1}{a} < \infty$. Με ανάλογη διαδικασία με εκείνη που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 3, βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{F}_s[f](s) = \frac{2a}{\pi}\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s \geq 0.$$

Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$, το Θεώρημα 3β εξασφαλίζει ότι

$$\int_0^\infty \mathcal{F}_s[f](s)\sin sx\,ds = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{s}{s^2+a^2}\sin sx\,ds = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{για } x > 0 \\ 0, & \text{για } x = 0. \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης f με $f(x) = \cos x$ για $0 \leq x \leq \pi/2$ και $f(x)=0$ για $x > \pi/2$. Στη συνέχεια, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi s/2)}{1-s^2}\,ds.$$

<u>Λύση</u>. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και, ακόμα, ότι $\int_0^\infty |f(x)|dx = 1 < \infty$. Έτσι, για κάθε $s \geq 0$, είναι

$$\mathcal{F}_c[f](s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos sx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos sx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[\cos(s+1)x+\cos(s-1)x]dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\cos(\pi s/2)}{1-s^2}, & \text{αν } s \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } s = 1. \end{cases}$$

Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα του $[0,\infty)$, και έτσι το Θεώρημα 3α δίνει

$$f(x) = \int_0^\infty \mathcal{F}_c[f](s)\cos sx\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\pi s/2)}{1-s^2}\cos sx\,ds$$

για όλα τα $x \geq 0$. Για $x = 0$, παίρνουμε

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi s/2)}{1-s^2}\,ds = f(0)\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Θ'αποδείξουμε πρώτα ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι πεπερασμένο, και θέτουμε

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

οπότε έχουμε

$$I^2 = \left[\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right]\left[\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy\right] = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy\right]dx.$$

Με τον μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$I^2 = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr\right]d\vartheta = \left[\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr\right]\left[\int_0^{\pi/2} d\vartheta\right] = \frac{\pi}{4}$$

και επομένως $I = \sqrt{\pi}/2$. 'Αρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Τώρα, για όλα τα $s \in \mathbb{R}$ παίρνουμε (θεωρούμε γνωστό εδώ ότι επιτρέπεται στην περίπτωσή μας η εναλλαγή της σειράς της παραγώγισης ως προς s και της ολοκλήρωσης)

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}[f](s) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(\frac{d}{ds}e^{-isx}\right)dx$$

$$= \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}e^{-isx}dx = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}de^{-x^2}$$

$$= \frac{i}{4\pi}e^{-isx}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{s}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-isx}dx,$$

δηλαδή ισχύει

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}[f](s) = -\frac{s}{2}\mathcal{F}[f](s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

'Αρα, για κάθε $s \in \mathbb{R}$, είναι

$$\mathcal{F}[f](s) = \mathcal{F}[f](0)\exp\left[\int_0^{s}(-t/2)dt\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-s^2/4},$$

αφού

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης g με $g(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $g = f''$, όπου

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 9*, οπότε παίρνουμε

$$\mathfrak{F}[g](s) = \mathfrak{F}[f''](s) = -s^2\mathfrak{F}[f](s) \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

Αλλά είναι (Παράδειγμα 6) $\mathfrak{F}[f](s) = (1/2\sqrt{\pi})e^{-s^2/4}$, $s \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$\mathfrak{F}[g](s) = -\frac{s^2}{2\sqrt{\pi}} e^{-s^2/4}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f*f$, όπου $f(x) = 1$ για $|x| \leq 1$ και $f(x) = 0$ για $|x| > 1$. Στη συνέχεια, ν'αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 s}{s^2}\, ds = \frac{\pi}{2}.$$

Λύση. Η συνάρτηση f είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Επίσης, η f είναι φραγμένη. Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $f*f$ με

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |(f*f)(x)|dx < \infty$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10, είναι

$$\mathfrak{F}[f*f] = 2\pi\left(\mathfrak{F}[f]\right)^2.$$

Αλλά (Παράδειγμα 2) έχουμε

$$\mathfrak{F}[f](s) = \begin{cases} (\sin s)/(\pi s), \text{ για } s \neq 0 \\ \\ 1/\pi, \text{ για } s = 0. \end{cases}$$

Άρα

$$\mathfrak{F}[f*f](s) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sin^2 s}{s^2}, & \gamma\iota\alpha\ s \neq 0 \\ \\ \dfrac{2}{\pi}, & \gamma\iota\alpha\ \ s = 0. \end{cases}$$

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 3, είναι

$$(f*f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}[f*f](s)ds = 2\int_0^{\infty} \mathfrak{F}[f*f](s)ds$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds.$$

'Ομως

$$(f*f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(-t)dt = \int_{-1}^{1} dt = 2,$$

και έτσι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds = \frac{\pi}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \alpha\nu\ x \in [3/2, 5/2] \\ \\ 0, & \alpha\nu\ x < 3/2\ \acute{\eta}\ x > 5/2. \end{cases}$$

<u>Λύση</u>. Παρατηρούμε ότι $f = 3I_{2,1/2}$, όπου

$$I_{2,1/2}(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x \in [3/2, 5/2] \\ \\ 0, & \alpha\nu\ x < 3/2\ \acute{\eta}\ x > 5/2. \end{cases}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, είναι

$$\mathfrak{F}[I_{2,1/2}](s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\, e^{-2is}\, \dfrac{\sin(s/2)}{s/2}, & \alpha\nu\ s \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2\pi}, & \alpha\nu\ s = 0. \end{cases}$$

Εξάλλου το Θεώρημα 5 εξασφαλίζει ότι $\mathfrak{F}[f] = 3\mathfrak{F}[I_{2,1/2}]$. 'Ετσι, έχουμε

$$\mathcal{F}[f](s) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\pi} e^{-2is} \dfrac{\sin(s/2)}{s/2}, & \text{για } s \neq 0 \\ \\ \dfrac{3}{2\pi}, & \text{για } s = 0. \end{cases}$$

1.7. Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με

$$f(x) = e^{-x} \text{ για } x > 0,\ f(0) = 1/2 \text{ και } f(x) = 0 \text{ για } x < 0.$$

Να βρεθεί, επίσης ο μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων του περιορισμού της f στο $[0,\infty)$.

2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων της συνάρτησης f με $f(x) = e^{-x}\sin x$, $x \geq 0$. Στη συνέχεια, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{4s}{4+s^4} \sin s\, ds.$$

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{για } |x| \leq 1 \\ \\ 0, & \text{για } |x| > 1 \end{cases}$$

και ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2} \sin^2(s/2) e^{isx} ds = \begin{cases} 1-|x|, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ \\ 0, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με $f(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά).

5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ και ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-s} \cos sx\, ds \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

6. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης f με

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{αν } x \in [0,\pi] \\ 0, & \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > \pi. \end{cases}$$

7. Να επαληθευθεί το Θεώρημα συνέλιξης με $f(x) = e^{-x^2} = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων της συνάρτησης f με

$$f(x) = 1-x, \text{ αν } 0 < x \leq 1; \quad f(x) = 0, \text{ αν } x = 0 \text{ ή } x > 1.$$

Στη συνέχεια, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos s}{s} \sin(s/2)\,ds.$$

9. Ν'αποδειχθεί ότι

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^3}{4+s^4} \sin sx\,ds \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

10. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin s}{s} \cos(s/2)\,ds = \pi/2,$$

με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού τύπου του Fourier για τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ για $|x| \leq 1$ και $f(x) = 0$ για $|x| > 1$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x$ για $|x| \leq 1$ και $f(x)=0$ για $|x| > 1$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier αυτής. Στη συνέχεια, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f*f$. Τέλος, να γραφεί ο ολοκληρωτικός τύπος του Fourier για τη συνάρτηση $f*f$ και ν'αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{s^4}(s\cos s - \sin s)^2\,ds = \frac{\pi}{3}.$$

12. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων της συνάρτησης f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{αν } 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{αν } x > a \end{cases} \qquad (a > 0 \text{ σταθερά}).$$

2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ FOURIER ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ, ΑΡΧΙΚΩΝ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Στο Εδάφιο αυτό θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο που στηρίζεται στη χρήση των μετασχηματισμών Fourier, για να επιλύσουμε προβλήματα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση (Θεώρημα 12), προβλήματα αρχικών τιμών (Θεώρημα 13) και αρχικών-συνοριακών τιμών (Θεώρημα 14) για την εξίσωση θερμότητας καθώς και προβλήματα συνοριακών τιμών (προβλήματα του Dirichlet) για την εξίσωση Laplace (Θεώρημα 15). Θα παραθέσουμε, ακόμα, μερικά παραδείγματα και θα προτείνουμε ορισμένες ασκήσεις για λύση.

2.1. Προκαταρκτικά

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών-τιμών ή αρχικών-συνοριακών τιμών ή συνοριακών τιμών για μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, και ότι επιζητούμε την εύρεση μιας λύσης αυτού. Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη λύση έχει ορισμένες επιπρόσθετες ιδιότητες (που δεν περιγράφονται απ'το πρόβλημα και βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Fourier αυτής. Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier προκύπτει τότε η "λύση". Το αποτέλεσμα, στο οποίο καταλήγουμε με τη διαδικασία αυτή, είναι μια <u>πιθανή</u> λύση του προβλήματός μας. Απομένει τότε ν'αποδειχθεί ότι αυτή είναι πραγματικά μια λύση του προβλήματος.

Η μέθοδος εφαρμογής των μετασχηματισμών Fourier, για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών ή αρχικών-συνοριακών τιμών ή συνοριακών τιμών για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις τέτοιων προβλημάτων. Εδώ έχουν επιλεγεί τέσσερα κλασσικά προβλήματα για να εφαρμοσθεί η μέθοδος αυτή.

Χρειαζόμαστε το παρακάτω Θεώρημα, για την εναλλαγή της σειράς εφαρμογής των τελεστών παραγώγισης και ολοκλήρωσης.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Α. Ας είναι Ι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας</u>

και ας θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση $h(u,v)$, $(u,v)\in I\times\mathbb{R}$, τέτοια ώστε η μερική παράγωγος h_u να υπάρχει και να είναι συνεχής στο $I\times\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι, για κάποιο $u_0\in I$, το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} h(u_0,v)\,dv$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός) και ότι

$$|h_u(u,v)| \leq g(v) \text{ για κάθε } (u,v)\in I\times\mathbb{R},$$

όπου g είναι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v)\,dv < \infty.$$

Τότε ο τύπος

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u,v)\,dv,\quad u\in I$$

ορίζει μια συνεχώς παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο I με

$$H'(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h_u(u,v)\,dv \text{ για όλα τα } u\in I.$$

2.2. Προβλήματα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση

Στην παράγραφο αυτή θ'ασχοληθούμε με προβλήματα αρχικών τιμών για την (μονοδιάστατη) κυματική εξίσωση

$$(W)\qquad z_{tt}-c^2z_{xx}=0 \quad (c \text{ θετική σταθερά}).$$

Ας είναι p μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$ και q μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Όπως είναι γνωστό (Παράγραφος 2.1 του Κεφαλαίου IX), όταν αναζητούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης (W) που πληρούν τις συνθήκες

$$(*)\qquad z(x,0)=p(x),\ x\in\mathbb{R} \text{ και } z_t(x,0)=q(x),\ x\in\mathbb{R},$$

τότε λέμε ότι έχουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (W)-(*), όπου οι συνθήκες (*) λέγονται αρχικές συνθήκες.

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (W)-(*) έχει μελετηθεί στην Παράγραφο 2.1 του Κεφαλαίου IX, όπου αποδείχθηκε ότι αυτό έχει μια μοναδική λύση z που δίνεται απ'τον τύπο του D'Alembert. Εδώ, θ'ακολουθήσουμε μια άλλη μέθοδο, που στηρίζεται στη χρήση των μετασχηματισμών Fourier, για να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (W)-(*). Θα καταλήξουμε δε πάλι στον τύπο του D'Alembert για τη μοναδική λύση του προβλήματος αυτού.

Ας είναι z μια λύση της κυματικής εξίσωσης (W), η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες (*). Ας υποθέσουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|z(x,t)|dx<\infty$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$, και ας θέσουμε

$$Z(s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z(x,t)e^{-isx}dx,\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Για οποιοδήποτε $t\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $Z(s,t)$, $s\in\mathbb{R}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $z(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε, στη συνέχεια, ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|z_{xx}(x,t)|dx<\infty$ για όλα τα $t\in\mathbb{R}$, οπότε απ' την εξίσωση (W) προκύπτει ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|z_{tt}(x,t)|dx<\infty$ για $t\in\mathbb{R}$ και ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}z_{tt}(x,t)e^{-isx}dx=c^2\int_{-\infty}^{\infty}z_{xx}(x,t)e^{-isx}dx \text{ για } (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Αλλά, υποθέτοντας ότι $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z_{tt}(x,t)e^{-isx}dx=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z(x,t)e^{-isx}dx\right]=Z_{tt}(s,t),\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι για οποιοδήποτε $t\in\mathbb{R}$ είναι $\lim_{x\to\pm\infty}z(x,t)=$ $=\lim_{x\to\pm\infty}z_x(x,t)=0$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 9*, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z_{xx}(x,t)e^{-isx}dx=-s^2Z(s,t),\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Επομένως

$$Z_{tt}(s,t)+c^2s^2Z(s,t)=0 \text{ για κάθε } (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Για οποιοδήποτε δεδομένο $s\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $Z_{tt}+c^2s^2Z=0$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έτσι, για όλα τα $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, είναι

$$Z(t,s)=\begin{cases}c_1+c_2t, & \text{αν } s=0\\ C_1(s)\cos cst+C_2(s)\sin cst, & \text{αν } s\neq 0,\end{cases}$$

όπου c_1,c_2 είναι σταθερές και C_1,C_2 είναι συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}-\{0\}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε, τώρα, τις αρχικές συνθήκες (*). Παρατηρούμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|p(x)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|z(x,0)|dx<\infty$, και συμβολίζουμε με P τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης p, δηλαδή θέτουμε

$$P(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-isx}dx,\quad s\in\mathbb{R}.$$

Τότε είναι

(i) $$Z(s,0)=P(s),\quad s\in\mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|z_t(x,t)|dx<\infty$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}$, οπότε παίρνουμε

$$Z_t(s,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}z(x,t)e^{-isx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}z_t(x,t)e^{-isx}dx$$

για όλα τα $(s,t)\in\mathbb{R}^2$. Έτσι, αφού $\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|z_t(x,0)|dx<\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier Q της συνάρτησης q, δηλαδή μπορούμε να θέσουμε

$$Q(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}q(x)e^{-isx}dx,\quad s\in\mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

(ii) $$Z_t(s,0)=Q(s),\quad s\in\mathbb{R}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες (i) και (ii), εύκολα βρίσκουμε

$$c_1=P(0)\ \text{και}\ c_2=Q(0)$$

και

$$C_1(s)=P(s)\ \text{και}\ C_2(s)=\frac{Q(s)}{cs}\ \text{για κάθε}\ s\neq 0.$$

Επομένως, είναι

$$Z(s,t)=\begin{cases}P(0)+tQ(0), & \text{για } s=0 \text{ και } t\in\mathbb{R}\\[2ex] P(s)\cos cst+\frac{Q(s)}{cs}\sin cst, & \text{για } s\in\mathbb{R}-\{0\} \text{ και } t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3 και έχουμε

$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}P(s)e^{isx}ds\ \text{και}\ q(x)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(s)e^{isx}ds\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

και

$$z(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}Z(s,t)e^{isx}ds\ \text{για όλα τα}\ (x,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Τότε

$$z(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}P(s)e^{isx}\cos cst\,ds+\int_{0}^{\infty}\frac{Q(s)}{cs}e^{isx}\sin cst\,ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} \frac{Q(s)}{cs}\, e^{isx}\sin cst\, ds.$$

Αλλά, είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s)e^{isx}\cos cst\, ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} P(s)e^{isx}\left(e^{icst}+e^{-icst}\right)ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} P(s)e^{is(x+ct)}ds + \int_{-\infty}^{\infty} P(s)e^{is(x-ct)}ds\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,[p(x+ct)+p(x-ct)].$$

Επίσης, παίρνουμε

$$\int_{0}^{\infty} \frac{Q(s)}{cs}\, e^{isx}\sin cst\, ds = \frac{1}{2c}\int_{0}^{\infty}\frac{Q(s)}{is}\left(e^{isx}\; e^{icst}-e^{-icst}\right)ds$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{0}^{\infty} Q(s)\, \frac{e^{is(x+ct)}-e^{is(x-ct)}}{is}\, ds$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{0}^{\infty} Q(s)\left[\int_{x-ct}^{x+ct} e^{is\tau}d\tau\right]ds.$$

'Ετσι, υποθέτοντας ότι στο τελευταίο ολοκλήρωμα επιτρέπεται η ε-ναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης, έχουμε

$$\int_{0}^{\infty} \frac{Q(s)}{cs}\, e^{isx}\sin cst\, ds = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left[\int_{0}^{\infty} Q(s)e^{is\tau}ds\right]d\tau.$$

Με ανάλογο τρόπο, προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{Q(s)}{cs}\, e^{isx}\sin cst\, ds = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left[\int_{-\infty}^{0} Q(s)e^{is\tau}ds\right]d\tau.$$

'Αρα, είναι

$$\int_{0}^{\infty}\frac{Q(s)}{cs}e^{isx}\sin cst\, ds+\int_{-\infty}^{0}\frac{Q(s)}{cs}e^{isx}\sin cst\, ds = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\left[\int_{-\infty}^{\infty} Q(s)e^{is\tau}ds\right]d\tau$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x+ct} q(\tau)\,d\tau.$$

Τελικά, έχουμε

$$z(x,t) = \frac{1}{2}\,[p(x+ct)+p(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(\tau)\,d\tau \quad \text{για κάθε}\ (x,t)\in \mathbb{R}^2.$$

Ο τύπος αυτός δίνει μια <u>πιθανή</u> λύση της (W) που πληροί τις συνθή-κες (*).

Στη συνέχεια, θ'αποδείξουμε ότι η συνάρτηση z, που ορίζεται με τον παραπάνω τύπο, είναι πραγματικά μια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (W)-(*) και μάλιστα είναι η μοναδική λύση αυτού. Έχουμε, λοιπόν, το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12. <u>Ας είναι p μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$ και q μια πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Τότε η κυματική εξίσωση (W) έχει μια μοναδική λύση z που πληροί τις αρχικές συνθήκες</u>

(*) $\quad z(x,0)=p(x),\ x\in\mathbb{R}$ <u>και</u> $z_t(x,0)=q(x),\ x\in\mathbb{R}.$

<u>Η λύση αυτή δίνεται απ'τον τύπο (τύπος του D'Alembert)</u>

$$z(x,t)=\frac{p(x+ct)+p(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} q(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση z, που ορίζεται απ'τον τύπο του D'Alembert, είναι μια λύση της εξίσωσης (W) και πληροί τις συνθήκες (*). Πραγματικά· η συνάρτηση z είναι C^2 στο $\mathbb{R}^2$. Ακόμα, για κάθε $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, είναι

$$z_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}\,[p''(x+ct)+p''(x-ct)]+\frac{1}{2c}\,[q'(x+ct)-q'(x-ct)]$$

και

$$z_{tt}(x,t)=\frac{c^2}{2}\,[p''(x+ct)+p''(x-ct)]+\frac{c}{2}\,[q'(x+ct)-q'(x-ct)]$$

και επομένως

$$z_{tt}(x,t)-c^2z_{xx}(x,t)=0.$$

Εξάλλου, είναι $z(x,0)=p(x)$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$. Επίσης, έχουμε

$z_t(x,t)=\frac{c}{2}[p'(x+ct)-p'(x-ct)]+\frac{1}{2}[q(x+ct)+q(x-ct)]$ για $(x,t)\in\mathbb{R}^2$,

απ'όπου προκύπτει ότι $z_t(x,0)=q(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τώρα, θ'αποδείξουμε ότι η συνάρτηση z είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (W)-(*). Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{z}$ είναι μια (άλλη) λύση της εξίσωσης (W) με

$$\tilde{z}(x,0)=p(x),\ x\in\mathbb{R} \text{ και } \tilde{z}_t(x,0)=q(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

Τότε η συνάρτηση $u=z-\tilde{z}$ θα είναι μια λύση της (W) με

(σ) $\quad u(x,0)=u_t(x,0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι, θα υπάρχουν (Παράδειγμα 2 του Εδαφίου 1 του Κεφαλαίου IX) πραγματικές συναρτήσεις F_1 και F_2 με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης στο $\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$u(x,t) = F_1(x+ct)+F_2(x-ct) \text{ για όλα τα } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Οι αρχικές συνθήκες (σ) δίνουν

$$F_1(x)+F_2(x) = 0 \text{ και } cF_1(x)-cF_2(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και επομένως είναι $F_1 = F_2 = 0$. Άρα, έχουμε $u = 0$, που σημαίνει ότι $z = \tilde{z}$.

2.3. Προβλήματα αρχικών τιμών και προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας

Θα θεωρήσουμε εδώ την (μονοδιάστατη) εξίσωση θερμότητας

(H) $$z_t - kz_{xx} = 0 \quad (k \text{ θετική σταθερά})$$

και θ'ασχοληθούμε με προβλήματα αρχικών τιμών καθώς και με προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών γι'αυτήν.

Ας είναι f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ας θέσουμε $\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ και $\overline{\Omega} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$. Τότε το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνεχούς συνάρτησης z στο $\overline{\Omega}$, της οποίας ο περιορισμός στο Ω να είναι μια λύση στον τόπο Ω της εξίσωσης θερμότητας (H), και η οποία να πληροί τη συνθήκη

(*) $$z(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

λέμε ότι είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Η συνθήκη (*) καλείται αρχική συνθήκη.

Ας υποθέσουμε ότι z είναι μια λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών, τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |z(x,t)|dx < \infty$ για κάθε $t > 0$, και ότι

$$Z(s,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,t)e^{-isx}dx \text{ για } s \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Υποθέτουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} |z_t(x,t)|dx < \infty$ για $t > 0$ και ότι $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}$, και έχουμε

$$Z_t(s,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,t)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_t(x,t)e^{-isx}dx, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Λαμβάνοντας δε υπόψη την εξίσωση (H), παίρνουμε

$$Z_t(s,t) = k\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_{xx}(x,t)e^{-isx}dx \text{ για } s\in\mathbb{R},\ t>0,$$

όπου είναι $\int_{-\infty}^{\infty} |z_{xx}(x,t)|dx = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}|z_t(x,t)|dx < \infty$ για κάθε $t>0$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση z είναι τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} z(x,t) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} z_x(x,t) = 0$ για οποιοδήποτε $t>0$, οπότε το θεώρημα 9* εξασφαλίζει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_{xx}(x,t)e^{-isx}dx = -s^2 Z(s,t),\ s\in\mathbb{R},\ t>0.$$

Έτσι, έχουμε

$$Z_t(s,t)+ks^2 Z(s,t) = 0 \text{ για όλα τα } s\in\mathbb{R},\ t>0.$$

Για οποιοδήποτε δεδομένο $s\in\mathbb{R}$, η τελευταία εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως μια ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Επομένως, είναι

$$Z(s,t) = C(s)e^{-ks^2t} \text{ για } s\in\mathbb{R},\ t>0.$$

όπου C είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ και ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης f, τον οποίο ας συμβολίσουμε με F, δηλαδή

$$F(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx,\ s\in\mathbb{R}.$$

Υποθέτοντας ότι $\lim\limits_{t\to 0+0}\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}\lim\limits_{t\to 0+0}$ και λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη (*), παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0+0} Z(s,t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0+0}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,t)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,0)e^{-isx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = F(s)$$

για κάθε $s\in\mathbb{R}$. Αλλά, είναι $\lim\limits_{t\to 0+0} Z(s,t) = C(s)$ για $s\in\mathbb{R}$. Άρα, έχουμε

$$Z(t,s) = F(s)e^{-ks^2t} \text{ για όλα τα } s\in\mathbb{R},\ t>0.$$

Στο Παράδειγμα 6 του Εδαφίου 1 έχουμε βρεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης h με $h(x) = e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\mathcal{F}[h](s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-s^2/4}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με

$$g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\, e^{-x^2/(4kt)}, \quad (x,t) \in \Omega,$$

τότε είναι

$$g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\, h(x/\sqrt{4kt}) \quad \text{για } (x,t) \in \Omega.$$

Έτσι, θέτοντας

$$G(s,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t) e^{-isx} dx, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

και εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 5 και 7, παίρνουμε για $s \in \mathbb{R}$ και $t > 0$

$$G(s,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{4kt}}\, \mathcal{F}[h]\left(\frac{s}{1/\sqrt{4kt}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \mathcal{F}[h](s\sqrt{4kt})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-(s\sqrt{4kt})^2/4} = \frac{1}{2\pi}\, e^{-ks^2 t}.$$

Άρα, είναι

$$Z(s,t) = 2\pi F(s) G(s,t) \quad \text{για όλα τα } s \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Παρατηρούμε ότι, για οποιοδήποτε $t > 0$, η συνάρτηση $g(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Ορίζεται, λοιπόν, η συνέλιξη:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi,t) d\xi, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Είναι

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} d\xi \quad \text{για κάθε } (x,t) \in \Omega.$$

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη, τότε αποδεικνύεται εύκολα, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Α, ότι η συνάρτηση w έχει συνεχή μερική παράγωγο ως προς x. Εφαρμόζοντας, έτσι, τα Θεωρήματα 10 και 3, παίρνουμε ότι $z(x,t) = w(x,t)$ για όλα τα $(x,t) \in \Omega$.

Μια <u>πιθανή</u>, λοιπόν, λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η

$$z(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} d\xi, & \text{για } (x,t) \in \Omega \\ f(x), & \text{για } x \in \mathbb{R} \text{ και } t = 0. \end{cases}$$

Όπως θ'αποδειχθεί παρακάτω, η συνάρτηση z είναι πραγματικά μια λύση (και μάλιστα φραγμένη) του προβλήματός μας. Έχουμε, λοιπόν, το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13. Ας είναι f μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, και ας θέσουμε $\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ και $\overline{\Omega} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$. Τότε ο τύπος

$$z(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} d\xi, & \text{για } (x,t) \in \Omega \\ f(x), & \text{για } x \in \mathbb{R} \text{ και } t = 0 \end{cases}$$

ορίζει μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$, τέτοια ώστε:

(P) Η z είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, ο περιορισμός της z στον τόπο Ω είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας (H) και η z πληροί την αρχική συνθήκη

(*) $z(x,0) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον, η z δεν είναι η μοναδική φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$, αμέσως διαπιστώνουμε ότι, για οποιοδήποτε $(x,t) \in \Omega$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} d\xi$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Έτσι, ο τύπος ορίζει μια πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$. Αυτή η συνάρτηση πληροί, απ'τον ορισμό της, την αρχική συνθήκη $z(x,0) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θ'αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της συνάρτησης z στον τόπο Ω είναι μια λύση της εξίσωσης (H). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα A (μετά απ'τη διαπίστωση ότι πληρούνται οι αντίστοιχες προϋποθέσεις· τέτοιες διαπιστώσεις αφήνονται ως ασκήσεις), για να συμπεράνουμε ότι η μερική παράγωγος z_t υπάρχει και είναι συνεχής στο Ω και μάλιστα είναι

$$z_t(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(4kt)}\right] d\xi, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Επίσης, με δύο εφαρμογές του Θεωρήματος A, είναι δυνατόν να διαπιστώσουμε ότι η μερική παράγωγος z_{xx} υπάρχει και είναι συνεχής στο Ω και δίνεται απ'τον τύπο

$$z_{xx}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(4kt)}\right] d\xi, \quad (x,t) \in \Omega.$$

Επιπλέον, πάλι με τη βοήθεια του Θεωρήματος A, διαπιστώνεται ότι και οι μερικές παράγωγοι z_{tt} και z_{xt} υπάρχουν και είναι συνεχείς στο Ω. Έτσι, η συνάρτηση z είναι C^2 στον τόπο Ω. Ακόμα, αν θέσουμε

$$w(\xi;x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/(4kt)} \quad \text{για } \xi \in \mathbb{R} \text{ και } (x,t) \in \Omega,$$

τότε παίρνουμε για όλα τα $(x,t) \in \Omega$

$$z_t(x,t) - kz_{xx}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) w_t(\xi;x,t) d\xi - k\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) w_{xx}(\xi;x,t) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [w_t(\xi;x,t) - kw_{xx}(\xi;x,t)] d\xi = 0,$$

αφού, όπως εύκολα διαπιστώνεται, ισχύει

$$w_t(\xi;x,t) - kw_{xx}(\xi;x,t) = 0 \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R},\ (x,t) \in \Omega.$$

Άρα, ο περιορισμός της z στο Ω είναι μια λύση της (H).

Αν (x,t) είναι ένα σημείο του Ω, τότε μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό $\xi = x + 2\eta\sqrt{kt}$ στο ολοκλήρωμα που ορίζει την τιμή $z(x,t)$. Μ'αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε ότι

$$z(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+2\eta\sqrt{kt}) e^{-\eta^2} d\eta \quad \text{για κάθε } (x,t) \in \Omega.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι φραγμένη, μπορούμε να θεωρήσουμε μια θετική σταθερά M, έτσι ώστε

$$|f(\xi)| \leq M \quad \text{για όλα τα } \xi \in \mathbb{R}.$$

Τότε, για κάθε $(x,t) \in \Omega$, είναι

$$|z(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+2\eta\sqrt{kt})| e^{-\eta^2} d\eta \leq M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = M,$$

αφού (Παράδειγμα 6 του Εδαφίου 1) ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}.$$

Άρα, έχουμε

$$|z(x,t)| \leq M \quad \text{για όλα τα } (x,t) \in \overline{\Omega},$$

δηλαδή η συνάρτηση z είναι φραγμένη στο $\overline{\Omega}$.

Στη συνέχεια, θ'αποδείξουμε ότι η συνάρτηση z είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$. Επειδή η z είναι συνεχής στο Ω (αφού είναι C^2 στον τόπο Ω), αρκεί ν'αποδειχθεί ότι αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\bar{\Omega}-\Omega$. Ας είναι, λοιπόν, $(x_0,0)$ ένα τυχαίο σημείο του συνόρου $\bar{\Omega}-\Omega$, και ας θεωρήσουμε ένα τυχόντα αριθμό $\varepsilon>0$. Επειδή $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta<\infty$, θα είναι

$$\lim_{v\to\infty}\int_v^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta=0$$

και άρα, για κάποιο $r>0$, ισχύει

$$\int_r^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta<\frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{8M}.$$

Η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας και άρα υπάρχει θετικός αριθμός δ έτσι ώστε, για όλα τα η,x,t με

$$|\eta|\leq r,\ |x-x_0|<\delta \text{ και } 0<t<\delta,$$

να είναι

$$|f(x+2\eta\sqrt{kt})-f(x_0)|<\varepsilon/2.$$

Έτσι, για τυχόντα x και t με $|x-x_0|<\delta$ και $0<t<\delta$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|z(x,t)-z(x_0,0)| &= |z(x,t)-f(x_0)|\\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2\eta\sqrt{kt})e^{-\eta^2}d\eta-f(x_0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta\right|\\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+2\eta\sqrt{kt})-f(x_0)]e^{-\eta^2}d\eta\right|\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+2\eta\sqrt{kt})-f(x_0)|e^{-\eta^2}d\eta\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_r^{\infty}|f(x+2\eta\sqrt{kt})-f(x_0)|e^{-\eta^2}d\eta+\right.\\
&\qquad\left.+\int_{-\infty}^{-r}|f(x+2\eta\sqrt{kt})-f(x_0)|e^{-\eta^2}d\eta\right]\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{r}|f(x+2\eta\sqrt{kt})-f(x_0)|e^{-\eta^2}d\eta\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2M\int_r^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta+2M\int_{-\infty}^{-r}e^{-\eta^2}d\eta\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\varepsilon}{2}\int_{-r}^{r}e^{-\eta^2}d\eta\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}4M\int_r^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\varepsilon}{2}\int_{-r}^{r}e^{-\eta^2}d\eta\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αποδείχθηκε, λοιπόν, η συνέχεια της συνάρτησης z στο σημείο $(x_0,0)$.

Απομένει ν'αποδειχθεί ότι η συνάρτηση z δεν είναι η μοναδική φραγμένη συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση z_0 με

$$z_0(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{4kt\sqrt{k\pi t}}\, e^{-x^2/(4kt)}, & \text{για } (x,t) \in \Omega \\ 0, \text{ για } x \in \mathbb{R} \text{ και } t=0 \end{cases}$$

είναι συνεχής και φραγμένη στο $\overline{\Omega}$. Απ'τον ορισμό της, η z_0 είναι τέτοια ώστε

$$z_0(x,0) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ακόμα, μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι ο περιορισμός της z_0 στον τόπο Ω είναι μια λύση της εξίσωσης (H). Έτσι, η συνάρτηση $\tilde{z} = z+z_0$ είναι μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με $\tilde{z}(x,0) = z(x,0)+z_0(x,0) = f(x)$ για $x \in \mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε ο περιορισμός αυτής στον τόπο Ω να είναι μια λύση της (H). Είναι φανερό ότι $\tilde{z} \neq z$.

Ας είναι, τώρα, f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στον ημιάξονα $[0,\infty)$ με $f(0)=0$, και ας θέσουμε $\Omega = \{(x,t) : x>0, t>0\}$ και $\overline{\Omega} = \{(x,t) : x \geq 0, t \geq 0\}$. Ας θεωρήσουμε ότι αναζητούμε μια συνεχή πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$, της οποίας ο περιορισμός στον τόπο Ω να είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας (H), και η οποία να πληροί τις συνθήκες

(i) $\quad z(x,0) = f(x)$ για κάθε $x \geq 0$

και

(ii) $\quad z(0,t) = 0$ για όλα τα $t \geq 0$.

Θα λέμε τότε ότι έχουμε ένα <u>πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών</u>. Η (i) είναι η <u>αρχική συνθήκη</u> και η (ii) είναι η <u>συνοριακή συνθήκη</u>.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier ημιτόνων. Εδώ δεν θ'ακολουθήσουμε τη μέθοδο αυτή, αλλά θα "επεκτείνουμε" το παραπάνω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών ώστε ν'αναχθούμε σ'ένα πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής που μελετήσαμε προηγουμένως. Έτσι, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο θ'αποδειχθεί με τη χρήση του Θεωρήματος 13.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14. Ας είναι f μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $[0,\infty)$ με $f(0)=0$, και ας θέσουμε $\Omega=\{(x,t):x>0,t>0\}$ και $\overline{\Omega}=\{(x,t)\ ;x\geq 0,t\geq 0\}$. Ας είναι, ακόμα, f_o η περιττή επέκταση της f. Τότε ο τύπος

$$z(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_o(\xi)e^{-(x-\xi)^2/(4kt)}d\xi, & \text{για } x\geq 0 \text{ και } t>0\\[2mm] f(x), & \text{για } x\geq 0 \text{ και } t=0\end{cases}$$

ορίζει μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$, τέτοια ώστε:

(P) Η z είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$, ο περιορισμός της z στον τόπο Ω είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας (H) και η z πληροί την αρχική συνθήκη

(i) $\qquad z(x,0)=f(x)$ για κάθε $x\geq 0$

και την συνοριακή συνθήκη

(ii) $\qquad z(0,t)=0$ για κάθε $t\geq 0$.

Επιπλέον, η z δεν είναι η μοναδική φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $f(0)=0$, μπορεί να ορισθεί η περιττή επέκταση f_o της f:

$$f_o(x)=f(x) \text{ για } x\geq 0 \text{ και } f_o(x)=-f(-x) \text{ για } x<0.$$

Η συνάρτηση f_o είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι συνεχής και φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 13, ο τύπος

$$\tilde{z}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_o(\xi)e^{-(x-\xi)^2/(4kt)}d\xi, & \text{για } x\in\mathbb{R} \text{ και } t>0\\[2mm] f_o(x), & \text{για } x\in\mathbb{R} \text{ και } t=0\end{cases}$$

ορίζει μια συνεχή και φραγμένη πραγματική συνάρτηση $\tilde{z}$ στο $\overline{\Omega}_*=\{(x,t):x\in\mathbb{R},t\geq 0\}$, της οποίας ο περιορισμός $\Omega_*=\{(x,t):x\in\mathbb{R}, t>0\}$ είναι μια λύση της εξίσωσης (H) και η οποία πληροί την αρχική συνθήκη

$$\tilde{z}(x,0)=f_o(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι $\tilde{z}(0,0)=f(0)=0$. Επίσης, για κάθε $t>0$, είναι

$$\tilde{z}(0,t)=\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f_o(\xi)e^{-\xi^2/(4kt)}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_0^{\infty} f(\xi)e^{-\xi^2/(4kt)}d\xi - \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{0} f(-\xi)e^{-\xi^2/(4kt)}d\xi = 0.$$

'Εχουμε, λοιπόν,

$$\tilde{z}(0,t) = 0 \text{ για όλα τα } t \geqq 0.$$

Η συνάρτηση z είναι ο περιορισμός στο $\overline{\Omega}$ της συνάρτησης $\tilde{z}$ και, έτσι, η z είναι μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ που έχει την ιδιότητα (P). Ακόμα, η z δεν είναι η μοναδική φραγμένη συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P). Πραγματικά η συνάρτηση z_0 με

$$z_0(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{4kt\sqrt{k\pi t}}\, e^{-x^2/(4kt)}, & \text{για } x \geqq 0 \text{ και } t > 0 \\ 0, \text{ για } x \geqq 0 \text{ και } t = 0 \end{cases}$$

είναι μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$, η οποία πληροί τις συνθήκες

$$z_0(x,0) = 0 \text{ για } x \geqq 0 \text{ και } z_0(0,t) = 0 \text{ για } t \geqq 0$$

και της οποίας ο περιορισμός στο Ω είναι μια λύση της (H). 'Αρα, η συνάρτηση $z^* = z + z_0$ είναι μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P).

Ας ασχοληθούμε πάλι με το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών που θεωρήθηκε παραπάνω, για να μελετήσουμε αυτό με τη μέθοδο της χρήσης των <u>μετασχηματισμών Fourier ημιτόνων</u>.

Ας είναι z μια λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών με $\int_0^{\infty}|z(x,t)|dx < \infty$ για κάθε $t > 0$, και ας θέσουμε

$$Z(s,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} z(x,t)\sin sx\,dx, \quad s \geqq 0, \ t > 0.$$

Υποθέτουμε ότι η z είναι C^2 στο σύνολο $\{(x,t) : x \geqq 0, t > 0\}$ και ότι

$$z_t(x,t) - kz_{xx}(x,t) = 0 \text{ για όλα τα } x \geqq 0, \ t > 0.$$

Τότε, εφόσον $\int_0^{\infty}|z_t(x,t)|dx < \infty$ για κάθε $t > 0$, θα είναι επίσης $\int_0^{\infty}|z_{xx}(x,t)|dx < \infty$ για $t > 0$ και θα έχουμε

$$Z_t(s,t) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty} z(x,t)\sin sx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} z_t(x,t)\sin sx\,dx =$$

$$= k\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} z_{xx}(x,t)\sin sx\,dx$$

για όλα τα $s \geq 0$ και $t > 0$, όπου υποθέσαμε ότι $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}$. Αλλά, υποθέτοντας ότι $z_{xx}(0,t) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} z(x,t) = \lim_{x\to\infty} z_x(x,t) = 0$ για οποιοδήποτε $t > 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα $9\beta^*$ για να πάρουμε

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty z_{xx}(x,t)\sin sx\,dx = -s^2 Z(s,t) \quad \text{για κάθε } s \geq 0,\ t > 0.$$

'Ετσι, έχουμε

$$Z_t(s,t) + ks^2 Z(s,t) = 0 \quad \text{για } s \geq 0,\ t > 0.$$

Επομένως, είναι

$$Z(s,t) = C(s)e^{-ks^2t} \quad \text{για όλα τα } s \geq 0,\ t > 0,$$

όπου C είναι μια πραγματική συνάρτηση στον ημιάξονα $[0,\infty)$. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι $\int_0^\infty |f(x)|dx < \infty$ και ας θέσουμε

$$F(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin sx\,dx, \quad s \geq 0.$$

Με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης (i) και με την υπόθεση ότι $\lim_{t\to 0+0}\int_0^\infty = \int_0^\infty \lim_{t\to 0+0}$, παίρνουμε για $s \geq 0$

$$C(s) = \lim_{t\to 0+0} Z(s,t) = \frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0+0}\int_0^\infty z(x,t)\sin sx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty z(x,0)\sin sx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin sx\,dx = F(s).$$

Επομένως,

$$Z(s,t) = F(s)e^{-ks^2t} \quad \text{για κάθε } s \geq 0,\ t > 0.$$

Τέλος, σύμφωνα με το Θεώρημα 3β, είναι για $x \geq 0$ και $t > 0$

$$z(x,t) = \int_0^\infty Z(s,t)\sin sx\,ds = \int_0^\infty F(s)e^{-ks^2t}\sin sx\,ds.$$

'Αρα, έχουμε

$$z(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(\xi)\sin s\xi\,d\xi\right]e^{-ks^2t}\sin sx\,ds \quad \text{για όλα τα } x \geq 0, t > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $z(0,t) = 0$ για κάθε $t > 0$. Μια <u>πιθανή</u> λύση του προβλήματός μας δίνεται, λοιπόν, απ'τον τύπο

$$z(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(\xi)\sin s\xi\,d\xi\right]e^{-ks^2t}\sin sx\,ds, & \text{για } x \geq 0,\ t > 0 \\ f(x), & \text{για } x \geq 0 \text{ και } t = 0. \end{cases}$$

2.4. Προβλήματα του Dirichlet

Ας είναι $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ και $\overline{\Omega} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$. Ας είναι, ακόμα, f μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα της εύρεσης μιας συνεχούς συνάρτησης z στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι αρμονική στο Ω (δηλαδή ο περιορισμός της στον τόπο Ω είναι μια λύση της (διδιάστατης) εξίσωσης του Laplace $z_{xx}+z_{yy}=0$) και η οποία πληροί τη συνθήκη

$$(*) \qquad z(x,0) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

λέμε ότι είναι ένα πρόβλημα του Dirichlet για τον τόπο Ω. Η συνθήκη (*) λέγεται συνοριακή συνθήκη (του Dirichlet) και η συνάρτηση f καλείται συνοριακή συνάρτηση ή συνοριακό δεδομένο (του Dirichlet). Ακόμα, λέμε ότι το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Ας υποθέσουμε ότι z είναι μια λύση του παραπάνω προβλήματος του Dirichlet με $\int_{-\infty}^{\infty} |z(x,y)|dx < \infty$ για όλα τα $y > 0$, και ας είναι

$$Z(s,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,y)e^{-isx}dx \text{ για } s \in \mathbb{R} \text{ και } y > 0.$$

Υποθέτοντας ότι $\int_{-\infty}^{\infty} |z_{xx}(x,y)|dx < \infty$ για κάθε $y > 0$, θα έχουμε και $\int_{-\infty}^{\infty} |z_{yy}(x,y)|dx < \infty$ για όλα τα $y > 0$ και ακόμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_{yy}(x,y)e^{-isx}dx = -\int_{-\infty}^{\infty} z_{xx}(x,y)e^{-isx}dx, \quad s \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ και παίρνουμε

$$Z_{yy}(s,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty} z(x,y)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_{yy}(x,y)e^{-isx}dx \text{ για } s \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} z(x,y) = \lim_{x\to\pm\infty} z_x(x,y) = 0$ για κάθε $y>0$, οπότε το Θεώρημα 9* εξασφαλίζει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_{xx}(x,y)e^{-isx}dx = -s^2 Z(s,y) \text{ για } s \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Επομένως, είναι

$$Z_{yy}(s,y) - s^2 Z(s,y) = 0 \text{ για όλα τα } s \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Για οποιοδήποτε δεδομένο $s \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $Z_{yy} - s^2 Z = 0$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Έτσι, βρίσκουμε ότι

$$Z(s,y) = C_1(s)e^{sy} + C_2(s)e^{-sy} \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι

$$|z(x,y)| \leqq Mg(x) \text{ για όλα τα } (x,y) \in \Omega,$$

όπου M είναι μια θετική σταθερά και g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty$. Τότε, για κάθε $s \in \mathbb{R}$ και $y>0$, παίρνουμε

$$|Z(s,y)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |z(x,y)||e^{-isx}|dx \leqq \frac{M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση Z είναι φραγμένη. Επομένως, για $s > 0$ θα πρέπει να είναι $C_1(s) = 0$, ενώ για $s < 0$ αναγκαστικά θα είναι $C_2(s) = 0$. Άρα, είναι

$$Z(s,y) = C(s)e^{-|s|y} \text{ για όλα τα } s \in \mathbb{R},\ y > 0,$$

όπου θέσαμε

$$C(s) = C_2(s) \text{ για } s > 0,\ C(s) = C_1(s) \text{ για } s < 0 \text{ και } C(0) = C_1(0) + C_2(0).$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ και θέτουμε

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx,\quad s \in \mathbb{R}.$$

Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τη συνοριακή συνθήκη (*) και κάνοντας την υπόθεση ότι $\lim\limits_{y \to 0+0} \int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim\limits_{y \to 0+0}$, παίρνουμε για κάθε $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} C(s) &= \lim_{y \to 0+0} Z(s,y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \to 0+0} \int_{-\infty}^{\infty} z(x,y)e^{-isx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(x,0)e^{-isx}dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = F(s). \end{aligned}$$

Έτσι, είναι

$$Z(s,y) = F(s)e^{-|s|y} \text{ για όλα τα } s \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

Τέλος, το θεώρημα 3 δίνει για κάθε $(x,y) \in \Omega$

$$z(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(s,y)e^{isx}ds = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-|s|y}e^{isx}ds$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-is\xi}d\xi\right]e^{-|s|y}e^{isx}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-\xi)-|s|y}ds\right]d\xi,$$

όπου υποθέσαμε ότι επιτρέπεται η αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης στο τελευταίο ολοκλήρωμα. Αλλά, για όλα τα ξ, $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $y>0$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-\xi)-|s|y}ds=\int_{0}^{\infty} e^{s[-y+i(x-\xi)]}ds+\int_{-\infty}^{0} e^{s[y+i(x-\xi)]}ds$$

$$=\frac{1}{-y+i(x-\xi)}\left[e^{-sy}e^{i(x-\xi)s}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{y+i(x-\xi)}\left[e^{sy}e^{i(x-\xi)s}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$=-\frac{1}{-y+i(x-\xi)}+\frac{1}{y+i(x-\xi)}=\frac{2y}{(x-\xi)^2+y^2}.$$

Επομένως, ο τύπος

$$z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi, & \text{για } (x,y)\in\Omega\\[2ex] f(x), & \text{για } x\in\mathbb{R} \text{ και } y=0\end{cases}$$

ορίζει μια <u>πιθανή</u> λύση του προβλήματός μας. Παρακάτω θ'αποδείξουμε ότι, αν η συνάρτηση f είναι φραγμένη, τότε ο τύπος αυτός ορίζει πραγματικά μια λύση (και μάλιστα φραγμένη) του προβλήματος του Dirichlet που θεωρήθηκε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 15. *Ας είναι f μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο* $\mathbb{R}$, *και ας θέσουμε* $\Omega=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y>0\}$ *και* $\overline{\Omega}=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y\geq 0\}$. *Τότε ο τύπος*

$$z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi, & \text{για } (x,y)\in\Omega\\[2ex] f(x), & \text{για } x\in\mathbb{R} \text{ και } y=0\end{cases}$$

ορίζει μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}$, *τέτοια ώστε:*

(P) *Η z είναι συνεχής στο* $\overline{\Omega}$, *αρμονική στο* Ω, *και πληροί τη συνοριακή συνθήκη*

(*) $z(x,0)=f(x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον, η z δεν είναι η μοναδική φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ *με την ιδιότητα* (P).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η συνάρτηση f είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$ έτσι ώστε

$$|f(x)| \leq M \text{ για όλα τα } x \in \mathbb{R}.$$

Για οποιοδήποτε $(x,y) \in \Omega$, κάνουμε τον μετασχηματισμό $\eta = (\xi-x)/y$ στο ολοκλήρωμα που ορίζει την τιμή $z(x,y)$, οπότε παίρνουμε

$$z(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+y\eta)}{\eta^2+1}\, d\eta.$$

Έτσι, για κάθε $(x,y) \in \Omega$, έχουμε

$$|z(x,y)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+y\eta)|}{\eta^2+1}\, d\eta \leq \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2+1} = \frac{M}{\pi}\, \mathrm{Ar\,tg}\eta \Big|_{-\infty}^{\infty} = M.$$

Άρα,

$$|z(x,y)| \leq M \text{ για όλα τα } (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση z είναι φραγμένη στο $\overline{\Omega}$.

Απ'τον ορισμό της η συνάρτηση z πληροί τη συνοριακή συνθήκη (*). Θ'αποδείξουμε ότι η z είναι αρμονική στον τόπο Ω. Με επανειλημμένες εφαρμογές του Θεωρήματος Α (αφού, κάθε φορά, διαπιστωθεί πρώτα ότι πληρούνται οι αντίστοιχες προϋποθέσεις· τέτοιες διαπιστώσεις αφήνονται ώς άσκηση), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση z είναι C^2 στον τόπο Ω και ότι οι μερικές παράγωγοι z_{xx} και z_{yy} δίνονται απ'τους τύπους

$$z_{xx}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\right] d\xi, \quad (x,y) \in \Omega$$

και

$$z_{yy}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\right] d\xi, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Έτσι, για όλα τα $(x,y) \in \Omega$, παίρνουμε

$$z_{xx}(x,y)+z_{yy}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\right] \right\} d\xi = 0,$$

αφού, όπως εύκολα διαπιστώνεται, είναι

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\right] = 0 \text{ για } (x,y) \in \Omega \text{ και } \xi \in \mathbb{R}.$$

Θ'αποδείξουμε, στη συνέχεια, ότι η συνάρτηση z είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$. Αρκεί ν'αποδειχθεί ότι η z είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόρου $\overline{\Omega}-\Omega$, αφού αυτή είναι συνεχής στο Ω. Ας είναι, λοιπόν, $(x_0,0)$ ένα σημείο του $\overline{\Omega}-\Omega$, και ας θεωρήσουμε έναν οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε. Υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{r}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2+1} < \frac{\varepsilon\pi}{8M}.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε, για όλα τα x, y και η με

$$|x-x_0| < \delta, \ 0 < y < \delta \ \text{και} \ |\eta| \leq r,$$

να ισχύει

$$|f(x+y\eta)-f(x_0)| < \varepsilon/2.$$

Έτσι, για κάθε x, y με $|x-x_0| < \delta$ και $0 < y < \delta$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|z(x,y)-z(x_0,0)| &= |z(x,y)-f(x_0)| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+y\eta)}{\eta^2+1}\,d\eta - f(x_0)\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^2+1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+y\eta)-f(x_0)]\,\frac{1}{\eta^2+1}\,d\eta\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+y\eta)-f(x_0)|\,\frac{1}{\eta^2+1}\,d\eta \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{r}^{\infty}|f(x+y\eta)-f(x_0)|\,\frac{1}{\eta^2+1}\,d\eta + \right. \\
&\qquad \left. + \int_{-\infty}^{-r}|f(x+y\eta)-f(x_0)|\,\frac{1}{\eta^2+1}\,d\eta\right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}|f(x+y\eta)-f(x_0)|\,\frac{1}{\eta^2+1}\,d\eta \\
&\leq \frac{1}{\pi}\left(2M\int_{r}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^2+1} + 2M\int_{-\infty}^{-r}\frac{d\eta}{\eta^2+1}\right) + \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{2}\int_{-r}^{r}\frac{d\eta}{\eta^2+1} \\
&= \frac{1}{\pi}\,4M\int_{r}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^2+1} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{2}\int_{-r}^{r}\frac{d\eta}{\eta^2+1} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^2+1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

αφού

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^2+1} = \pi.$$

Τέλος, θ'αποδείξουμε ότι η z δεν είναι η μοναδική φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P). Η συνάρτηση z_0 με

$$z_0(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{για } (x,y) \in \Omega \\ 0, & \text{για } x \in \mathbb{R} \text{ και } y = 0 \end{cases}$$

είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι φραγμένη και συνεχής στο $\overline{\Omega}$.Ακόμα, η z_0 είναι αρμονική στον τόπο Ω και πληροί τη συνοριακή συνθήκη

$$z_0(x,0)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έτσι, η συνάρτηση $\tilde{z}=z+z_0$ είναι μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $\overline{\Omega}$ με την ιδιότητα (P).

2.5. Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Να βρεθεί η λύση z της κυματικής εξίσωσης $z_{tt}-z_{xx}=0$, η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$z(x,0)=x^2,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } z_t(x,0)=\cos x,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Λύση. Για όλα τα $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, είναι (Θεώρημα 12)

$$z(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos\xi\, d\xi=x^2+t^2+\cos x\sin t.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}=\{(x,t): x\in\mathbb{R},\, t\geq 0\}$, της οποίας ο περιορισμός στον τόπο $\Omega=\{(x,t): x\in\mathbb{R},\, t>0\}$ να είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας $z_t-2z_{xx}=0$, και η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $z(x,0)=e^{-|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 13, είναι

$$z(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\xi|}e^{-(x-\xi)^2/(8t)}d\xi, & \text{για } (x,t)\in\Omega\\[2ex] e^{-|x|}, & \text{για } x\in\mathbb{R} \text{ και } t=0.\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}=\{(x,t): x\geq 0,\, t\geq 0\}$, της οποίας ο περιορισμός στον τόπο $\Omega=\{(x,t): x>0,\, t>0\}$ να είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας $z_t-z_{xx}=0$, και η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $z(x,0)=\sin x$, $x\geq 0$ καθώς και τη συνοριακή συνθήκη $z(0,t)=0$, $t\geq 0$.

Λύση. Το Θεώρημα 14 εξασφαλίζει ότι

$$z(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\sin\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/(4t)}d\xi, & \text{για } x\geq 0 \text{ και } t>0\\[2ex] \sin x, & \text{για } x\geq 0 \text{ και } t=0.\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y>0\}$, η οποία να είναι αρμονική στον τόπο $\Omega=\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y>0\}$ και η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $z(x,0)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση. Σύμφωνα με το θεώρημα 15, έχουμε

$$z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\xi}{(\xi-x)^2+y^2}\,d\xi, & \text{για } (x,y)\in\Omega\\[2ex] \cos x, & \text{για } x\in\mathbb{R} \text{ και } y=0.\end{cases}$$

2.6. Ασκήσεις

1. Σε καθεμιά απ'τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρεθεί η λύση της κυματικής εξίσωσης $z_{tt}-4z_{xx}=0$ που πληροί τις αρχικές συνθήκες:

(i) $z(x,0)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ και $z_t(x,0)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

(ii) $z(x,0)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ και $z_t(x,0)=xe^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

(iii) $z(x,0)=x\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ και $z_t(x,0)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}=\{(x,t): x\in\mathbb{R}, t\geq 0\}$, της οποίας ο περιορισμός στο $\Omega=\{(x,t): x\in\mathbb{R}, t>0\}$ να είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας $z_t-4z_{xx}=0$ και η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $z(x,0)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου:

(i) $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$. (ii) $f(x)=e^{-|x|}\cos x$, $x\in\mathbb{R}$. (iii) $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}=\{(x,t): x\geq 0, t\geq 0\}$, της οποίας ο περιορισμός στο $\Omega=\{(x,t): x>0, t>0\}$ να είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας $z_t-z_{xx}=0$ και η οποία να πληροί την αρχική συνθήκη $z(x,0)=|x|e^{-x^2}$ για κάθε $x\geq 0$ και τη συνοριακή συνθήκη $z(0,t)=0$ για κάθε $t\geq 0$.

4. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega}=\{(x,t): x\in\mathbb{R}, t\geq 0\}$, η οποία να είναι αρμονική στο $\Omega=\{(x,t): x\in\mathbb{R}, t>0\}$ και να πληροί τη συνοριακή συνθήκη $z(x,0)=xe^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Ν'αποδειχθεί ότι υπάρχουν μια άρτια συνάρτηση f_e και μια περιττή συνάρτηση f_o, έτσι ώστε $f = f_e + f_o$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f_e(u)\cos su\,du\right]ds + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f_o(u)\sin su\,du\right]ds.$$

2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi/2x), & \text{αν } -1 \leq x < 0 \text{ ή } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } x < -1 \text{ ή } x > 1. \end{cases}$$

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με

$$f(x) = e^{-|x|}\,\frac{\sin x}{x} \text{ για } x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

4. Ας είναι $f(x) = 1$ για $-1 \leq x \leq 1$ και $f(x) = 0$ για $x < -1$ και για $x > 1$. Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f*f$ και $f*f*f$.

5. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. Θέτουμε $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Ν'αποδειχθεί ότι, αν $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$, τότε

$$\mathfrak{F}[g](s) = \frac{1}{is}\mathfrak{F}[f](s) \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

6. Ας είναι f μια πραγματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής κατά τμήματα σε κάθε συμπαγές διάστημα και τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)dx| < \infty$. Θέτουμε $g(x) = xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{F}[f](s) = -i\mathfrak{F}[g](s) \text{ για κάθε } s \in \mathbb{R}.$$

7. Ν'αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{s\sin sx}{1+s^2}\,ds = \frac{\pi x}{2|x|}\,e^{-|x|} \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

8. Ας είναι $f(x) = e^{-x^2}$ και $g(x) = xf(x)$ για $x \in \mathbb{R}$. Ν'αποδειχθεί ότι

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \cos sx \, ds \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(s) \sin sx \, ds$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Ας είναι f μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στον ημιάξονα $[0,\infty)$ με $f(0) = 0$. Ν'αποδειχθεί ότι ο τύπος

$$z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} f(\xi) \left[\dfrac{1}{(\xi-x)^2+y^2} - \dfrac{1}{(\xi+x)^2+y^2}\right] d\xi, & \text{για } x \geqq 0 \text{ και } y > 0 \\ f(x), & \text{για } x \geqq 0 \text{ και } y = 0 \end{cases}$$

ορίζει μια συνεχή και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega} = \{(x,y) : x \geqq 0, y \geqq 0\}$, η οποία είναι αρμονική στον τόπο $\Omega = \{(x,y): x > 0, y > 0\}$ και η οποία πληροί την αρχική συνθήκη

$$z(x,0) = f(x) \text{ για κάθε } x \geqq 0$$

καθώς και τη συνοριακή συνθήκη

$$z(0,y) = 0 \text{ για κάθε } y \geqq 0.$$

10. Να βρεθεί μια συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση z στο $\overline{\Omega} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \geqq 0\}$, η οποία να πληροί τη συνθήκη $z(x,0) = \sin x$ για $x \in \mathbb{R}$ και της οποίας ο περιορισμός στον τόπο $\Omega = \{(x,t): x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ να είναι μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_t - z_{xx} = tz$.

Βιβλιογραφία

P.W. BERG and J.L. McGREGOR. *Elementary Partial Differential Equations*. Holden-Day, London, 1966.

G. BIRKHOFF and G.-C. ROTA. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York, 1978.

M. BRAUN. *Differential Equations and Their Applications, An Introduction to Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.

M. BRAUN. *Differential Equations and Their Applications, Short Version*. Springer-Verlag, New York, 1978.

E. ORAN BRIGHAM. *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.

A. BROMAN. *Introduction to Partial Differential Equations: From Fourier Series to Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1970.

P. CARABEDIAN. *Partial Differential Equations*. Wiley, New York, 1964.

G.F. CARRIER and C.E. PEARSON. *Partial Differential Equations (Theory and Technique)*. Academic Press, New York, 1976.

F. CHORLTON. *Ordinary Differential and Difference Equations (Theory and Applications)*. D. Van Nostrand Company Ltd., London, 1965.

R.V. CHURCHILL. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

E. CODDINGTON. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, New York, 1961.

E. CODDINGTON and N. LEVINSON. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

W. COPPEL. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. D.C. Heath and Company, Boston, 1965.

C. CORDUNEANU. *Principles of Differential and Integral Equations*. Chelsea Publishing Company, New York, 1977.

J. CRONIN. Differential Equations (Introduction and Qualitative Theory). Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.

R. DENNEMEYER. Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems. McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

R. DRIVER. Ordinary and Delay Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1977.

M.S.P. EASTHAM. Theory of Ordinary Differential Equations. Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

B. EPSEIN. Partial Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

G. ETGEN and W. MORRIS. An Introduction to Ordinary Differential Equations (with Difference Equations, Numerical Methods, and Applications). Harper and Row, New York, 1977.

S.J. FARLOW. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. John Wiley and Sons, 1982.

N. FINIZIO and G. LADAS. An Introduction to Differential Equations (with Difference Equations, Fourier Analysis, and Partial Differential Equations). Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1982.

L. FORD. Differential Equations. McGraw-Hill, New York, 1955.

F. HAGIN. A First Course in Differential Equations. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

P. HARTMAN. Ordinary Differential Equations. Wiley, New York, 1964.

H. HOCHSTADT. Differential Equations (A Modern Approach). Dover Publications, Inc., New York, 1964.

W. HUREWICZ. Lectures on Ordinary Differential Equations. Wiley, New York, 1958.

D. GREENSPAN. Introduction to Partial Differential Equations.McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

E. INCE. Ordinary Differential Equations. Dover, New York, 1956.

A. ΚΑΤΣΑΡΑΣ. Ακολουθίες και Σειρές Συναρτήσεων-Στοιχεία Διαφορικών Εξισώσεων-Μετασχηματισμοί Laplace. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, 1982.

R. MARTIN. Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, New York, 1983.

R. MARTIN. Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. McGraw-Hill, New York, 1984.

Z. MOTTELER. Introduction to Ordinary Differential Equations. Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1972.

T. MYINT-U. Ordinary Differential Equations. North-Holland, New York, 1978.

T. MYINT-U. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. American Elsevier Publishing Company, New York, 1973.

F.J. MURRAY and K.S. MILLER. Existence Theorems for Ordinary Differential Equations. Robert E. Krieger Publishing Company, New York, 1976.

O. PLAAT. Ordinary Differential Equations. Holden-Day, San Francisco, 1971.

D.L. POWERS. Boundary Value Problems. Academic Press, New York, 1972.

A. RABENSTEIN. Introduction to Ordinary Differential Equations. Academic Press, New York, 1966.

E. RAINVILLE. Elementary Differential Equations, Third Edition. The Macmillan Company, New York, 1964.

E. RAINVILLE and P. BEDIENT. A Short Course in Differential Equations, Fourth Edition. The Macmillan Company, New York, 1969.

S. ROSS. Differential Equations, Second Edition. Xerox,Lexington, 1974.

D. SANCHEZ, R. ALLEN and W. KYNER. Differential Equations, An Introduction. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1983.

G. SIMMONS. Differential Equations with Applications and Historical Notes. McGraw-Hill, New York, 1972.

M.M. SMIRNOV. Second-Order Partial Differential Equations. Groningen, Noordhoff, 1966.

I.N. SNEDDON. Elements of Partial Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.

I.N. SNEDDON. Fourier Transforms, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

G. STEPHENSON. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Longman Group Ltd, London, 1985.

T. YOSHIZAWA. Stability Theory by Liapunov's Second Method. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

P.L. WALKER. The Theory of Fourier Series and Integrals. John Wiley and Sons, Chichester, 1986.

H. WEINBERGER. A First Course in Partial Differential Equations. Blaisdell Publishing Co., New York, 1965.

C. WYLIE. Differential Equations. McGraw-Hill, Tokyo, 1979.

Ευρετήριο Όρων

'Αγνωστες συναρτήσεις διαφορικού συστήματος: 2
'Αγνωστη συνάρτηση διαφορικής εξίσωσης: 1,4
'Αγνωστη συνάρτηση μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης: 404
Ακολουθία ιδιοσυναρτήσεων προβλήματος ιδιοτιμών: 131
Ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς: 229
Αναλυτική συνάρτηση: 231
Ανάπτυξη σε σειρά Fourier: 426
Ανεξάρτητες μεταβλητές γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης: 452
Ανεξάρτητες μεταβλητές μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης: 404
Ανεξάρτητη μεταβλητή διαφορικής εξίσωσης: 1,4
Ανεξάρτητη μεταβλητή διαφορικού συστήματος: 2
Ανισότητα του Bessel: 432
Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier: 544
Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων: 545
Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων: 545
Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace: 341
Ανώμαλο σημείο: 232
Απλή ακολουθία πολυωνύμων: 302
Αρμονική συνάρτηση: 501,578
Αρχή μεγίστου-ελαχίστου: 489,501,502
Αρχικά δεδομένα: 475
Αρχικές συνθήκες: 2,4,12,475,479,491 563,568,572
Ασταθής λύση μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 372
Ασυμπτωτικά ευσταθές γραμμικό διαφορικό σύστημα: 214
Ασυμπτωτικά ευσταθής λύση γραμμικού διαφορικού συστήματος: 214
Ασυμπτωτικά ευσταθής λύση μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 372
Αυτόνομη μη γραμμική διαφορική εξίσωση: 395
Αυτοσυζυγής ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση: 61
Αυτοσυζυγής ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 117,118,119

Βασικό σύνολο λύσεων ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 69
Βασικός πίνακας ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος: 159

Γάμμα συνάρτηση: 293,336,368
Γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις: 65,159
Γραμμικά εξαρτημένες συναρτήσεις: 65,159
Γραμμική διαφορική εξίσωση: 4,60
Γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 51
Γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές: 60
Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 30,64,84,96
Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές: 96

Γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 452
Γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές: 452
Γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 404,407
Γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές: 408
Γραμμικό διαφορικό σύστημα: 3,146
Γραμμικό διαφορικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές: 146

Δέλτα συνάρτηση του Dirac: 339,552
Δεύτερη κανονική μορφή της υπερβολικής εξίσωσης: 453,457
Δεύτερη μέθοδος του Lyapunov: 384
Διακρίνουσα γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης: 453
Διάστημα εξάρτησης προβλήματος αρχικών τιμών (κυματική εξίσωση): 476
Διάστημα ορισμού γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 60
Διάστημα ορισμού γραμμικού διαφορικού συστήματος: 146
Διάστημα σύγκλισης δυναμοσειράς: 229
Διαφορική εξίσωση: 1,4
Διαφορική εξίσωση αμέσως ολοκληρώσιμη: 42
Διαφορική εξίσωση Bernoulli: 32
Διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μη περιέχουσα την άγνωστη συνάρτηση: 49
Διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης μη περιέχουσα την ανεξάρτητη μεταβλητή: 50
Διαφορική εξίσωση Euler: 105
Διαφορική εξίσωση Riccati: 34
Διαφορική εξίσωση του Airy: 242,318
Διαφορική εξίσωση του Bessel:228,293
Διαφορική εξίσωση του Chebyshev:228, 276
Διαφορική εξίσωση του Hermite: 228, 281
Διαφορική εξίσωση του Laguerre:228, 288
Διαφορική εξίσωση του Legendre:228, 266
Διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών: 37
Διαφορικό σύστημα: 2
Δυναμοσειρά: 229
Δυναμοσειρές λύσεις γύρω από κανονικά ανώμαλα σημεία: 249
Δυναμοσειρές λύσεις γύρω από ομαλά σημεία: 236

Εκθετικός πίνακας ενός πίνακα: 152
Ελάχιστο πολυώνυμο πίνακα: 153
Ελλειπτική γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 453
Ενδεικτική εξίσωση: 250
Εξίσωση θερμότητας: 454,489,568
Εξίσωση Laplace (εξίσωση δυναμικού): 454,501,578
Επέκταση άρτια περιοδική συνάρτησης: 421
Επέκταση άρτια συνάρτησης: 528
Επέκταση περιοδική συνάρτησης: 421
Επέκταση περιττή περιοδική συνάρτησης: 422
Επέκταση περιττή συνάρτησης: 528
Επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών: 131
Ευσταθές γραμμικό διαφορικό σύστημα: 214
Ευσταθής λύση γραμμικού διαφορικού

συστήματος: 214
Ευσταθής λύση μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 372

Ημιγραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 404

Θετικά ορισμένη συνάρτηση: 385
Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: 123
Θεώρημα Cayley-Hamilton: 150
Θεώρημα διαχωρισμού του Sturm: 125
Θεώρημα σύγκρισης του Sturm: 127
Θεώρημα συνέλιξης: 336,551
Θεώρημα του Lerch: 341
Θεώρημα του Putzer: 184

Ιδιοσυνάρτηση προβλήματος ιδιοτιμών: 129
Ιδιοτιμή πίνακα: 150
Ιδιοτιμή προβλήματος ιδιοτιμών: 129

Κανονική μορφή ελλειπτικής εξίσωσης: 454,461
Κανονική μορφή παραβολικής εξίσωσης: 454,459,461
Κανονικό ανώμαλο σημείο: 232
Κατά σημείο σύγκλιση σειρών Fourier: 426,432
Κέντρο δυναμοσειράς: 229
Κυματική εξίσωση: 454,474,563

Λήμμα Riemann-Lebesgue: 426,530,546
Λήμμα του Gronwall: 375
Λύση γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης: 452
Λύση γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης: 408
Λύση διαφορικής εξίσωσης: 1,4
Λύση διαφορικού συστήματος: 2
Λύση μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης: 404

Μέθοδος μεταβολής των σταθερών: 86
Μέθοδος της απαλειφής: 207
Μέθοδος του Frobenius: 250
Μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών: 481,493,510
Μέθοδος των αγνώστων σταθερών: 103
Μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 404
Μερική λύση μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 85
Μερική λύση μη ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος: 175
Μετασχηματισμός Fourier: 541
Μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων: 543
Μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων: 543
Μετασχηματισμός Laplace: 324
Μηδενική λύση ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 61
Μηδενική λύση ομογενούς γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης: 453
Μηδενική λύση ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος: 148
Μη γραμμική διαφορική εξίσωση: 372
Μη επεκτάσιμη λύση μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 372,373
Μη κανονικό ανώμαλο σημείο: 233
Μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα: 146
Μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση: 60
Μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 84

Μη ομογενής γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 452
Μη ομογενής γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 408

Ολοκληρωτική εξίσωση: 369
Ολοκληρωτικό Θεώρημα του Fourier: 536
Ολοκληρωτικός παράγοντας: 45
Ολοκληρωτικός τύπος του Fourier (ολοκληρωτική παράσταση του Fourier): 536
Ομαλό σημείο: 232
Ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα: 146
Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση: 60
Ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 64
Ομογενής γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 452
Ομογενής γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 408
Ομογενής διαφορική εξίσωση: 39
Ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές γραμμικό διαφορικό σύστημα: 214
Ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής λύση γραμμικού διαφορικού συστήματος: 214
Ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθής λύση μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 372
Ομοιόμορφα ευσταθές γραμμικό διαφορικό σύστημα: 214
Ομοιόμορφα ευσταθής λύση γραμμικού διαφορικού συστήματος: 214
Ομοιόμορφα ευσταθής λύση μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 372
Ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών Fourier: 434

Ορθογώνια ακολουθία πολυωνύμων: 303
Ορθογώνια ακολουθία συναρτήσεων: 273, 281
Ορθογώνιες συναρτήσεις: 129,273,281
Ορίζουσα Wronski: 65

Παραβολική γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης: 453
Περιοδική συνάρτηση: 332,420
Περίοδος περιοδικής συνάρτησης: 420
Πίνακας λύσεων ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος: 154
Πολυώνυμο του Chebyshev: 279
Πολυώνυμο του Hermite: 285
Πολυώνυμο του Laguerre: 290
Πολυώνυμο του Legendre: 271
Πραγματική λύση ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές: 100
Πραγματική λύση ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές: 185
Πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών: 479, 491,572
Πρόβλημα αρχικών τιμών: 2,4,12,475, 563,568
Πρόβλημα ιδιοτιμών: 129
Πρόβλημα συνοριακών τιμών: 128,578
Πρόβλημα του Cauchy: 475
Πρόβλημα του Dirichlet: 503,504,510, 578

Σειρά Chebyshev: 308
Σειρά Fourier: 307,425
Σειρά Fourier-Bessel: 311
Σειρά Fourier ημιτόνων: 425
Σειρά Fourier συνημιτόνων: 425
Σειρά ημιτόνων: 312

Σειρά Hermite: 309
Σειρά Laguerre: 310
Σειρά Legendre: 307
Σειρά Maclaurin: 230
Σειρά συνημιτόνων: 312
Σειρά Taylor: 230
Στάθμη διανύσματος: 10
Στάθμη πίνακα: 21,152
Συζυγής διαφορική εξίσωση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 61
Συνάρτηση άρτια: 421,528
Συνάρτηση βάρους: 129,281
Συνάρτηση βήματος: 338
Συνάρτηση δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα: 422
Συνάρτηση με απειροστό άνω φράγμα: 385
Συνάρτηση μοναδιαίας ώθησης:339,551
Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος: 338
Συνάρτηση περιττή: 421,528
Συνάρτηση συνεχής κατά τμήματα: 307,324,420,528
Συνάρτηση συνεχώς παραγωγίσιμη κατά τμήματα: 307,422,528
Συνάρτηση του Bessel δεύτερου είδους: 300
Συνάρτηση του Bessel πρώτου είδους: 298
Συνάρτηση του Heaviside: 338
Συνάρτηση ώθησης: 339,552
Συνέλιξη δύο συναρτήσεων: 336,551
Συνθήκη του Lipschitz: 10
Συνιστώσες πίνακα: 154
Συνοριακές συνθήκες:128,479,491,503,572,578
Συνοριακή συνάρτηση (συνοριακό δεδομένο): 503,578
Συντελεστές γραμμικής διαφορικής εξίσωσης: 60
Συντελεστές γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης:452
Συντελεστές γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης: 408
Συντελεστές γραμμικού διαφορικού συστήματος: 146
Συντελεστές Chebyshev: 308
Συντελεστές δυναμοσειράς: 229
Συντελεστές Fourier: 306,425
Συντελεστές Fourier-Bessel: 311
Συντελεστές Hermite: 309
Συντελεστές Laguerre: 310
Συντελεστές Legendre: 307
Συντελεστής πίνακας γραμμικού διαφορικού συστήματος: 147
Σχεδόν γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: 404

Ταυτότητα του Lagrange: 115
Τόπος ορισμού γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης: 452
Τόπος ορισμού γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης:408
Τριγωνομετρική σειρά: 313
Τύπος του Abel: 124
Τύπος του D'Alembert: 475,567
Τύπος του Green: 116
Τύπος του Jacobi: 156
Τύπος του Liouville: 67
Τύπος του Parseval: 433
Τύπος του Rodrigues: 271,285,290

Ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών: 12
Υπερβολική γραμμική μερική διαφορική

εξίσωση δεύτερης τάξης: 453

Χαρακτηριστική εξίσωση ομογενούς
γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
με σταθερούς συντελεστές: 97
Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ομογενούς
γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
με σταθερούς συντελεστές: 97

Ευρετήριο Ονομάτων

Abel 124
Airy 242,318

Bernoulli 32
Bessel 228,293,298,300,310,432
Bolzano 123

Cauchy 475
Cayley 150
Chebyshev 228,276,279,308

D'Alembert 475,567
De Moivre 279
Dirac 339,341,552
Dirichlet 503,504,510,578

Euler 105

Fourier 306,307,425,536,541,
543,544
Frobenius 250

Gauss 317
Green 116

Heaviside 339
Hamilton 150
Hermite 228,281,285,308

Jacobi 156

Lagrange 115
Laguerre 228,288,290,309
Laplace 324,341,454,501
Lebesgue 426,530, 546
Leibnitz 98
Lerch 341
Liouville 67
Lipschitz 10
Lyapunov 384

Parseval 433
Poisson 506
Putzer 182,184

Riccati 34
Riemann 426,530,546
Rodrigues 271,285,290

Sturm 125,127
Weierstrass 123
Wronski 65